Construcciones con regla y compás

Cristina Ferraris

¿Qué figuras geométricas se pueden construir con regla y compás? O más aún: ¿Qué significa decir que una figura se puede construir con regla y compás? En primer lugar cabe aclarar que la regla ha de utilizarse como mero instrumento para trazar rectas (y no en el sentido de "medir") y el compás para trazar circunferencias. En segundo lugar, debe tenerse en cuenta que la construcción con regla y compás será aceptada en tanto se pueda demostrar que la figura construida cumple con todas las propiedades geométricas que la caracterizan.

Desde los comienzos de la geometría han interesado las construcciones con regla y compás. Así, para Euclides significa precisamente *todo lo que se puede obtener utilizando rectas y circunferencias*, cuya existencia está garantizada por sus primeros postulados:

1- Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar un segmento.

2- Y cada segmento se puede prolongar por derecho.

3- Y con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo. ([4]).

Es conveniente tener en cuenta lo subrayado en el párrafo anterior pues se trata de garantizar la posibilidad conceptual de la construcción, esto es, cuando se habla de construir con compás se refiere a la existencia de la circunferencia que queda garantizada por el axioma 3 citado.

Veamos un ejemplo: Euclides realiza una construcción diríamos importante para transportar un segmento dado sobre una semirrecta también dada (o sea, en el lenguaje utilizado actualmente, construir sobre la misma, un segmento *congruente* al dado), de modo que el origen de ésta coincida con uno de los extremos del segmento transportado. Si $\overline{ab}$ es el segmento a transportar y $\overrightarrow{a'd}$ es la semirrecta sobre la cual se lo quiere llevar, la construcción es la siguiente:

paso 1 - se construye un triángulo equilátero de lado $\overline{a'a}$ (existe una circunferencia con centro en a' y radio $\overline{a'a}$ y otra con centro a y radio $\overline{a'a}$ que se cortan, por ejemplo, en un punto c el que determina el triángulo buscado con

a y a').

paso 2 - se determina b_1 como la intersección de la circunferencia de centro a y radio $\overline{ab}$ con la semirrecta $\overrightarrow{a\ c}$ (semirrecta opuesta a $\overrightarrow{ac}$).

paso 3 - se determina b'' como la intersección de la circunferencia de centro c y radio $\overline{cb_1}$ con la semirrecta $\overrightarrow{ca'}$. El segmento $\overline{a'b''}$ (diferencia entre los segmentos $\overline{cb''}$ y $\overline{ca'}$), resulta congruente al segmento $\overline{ab_1}$ (diferencia entre los segmentos $\overline{cb_1}$ y $\overline{ca}$) el que es también congruentes a $\overline{ab}$.

paso 4 - con centro a' y radio $\overline{a'b''}$ se determina b' sobre $\overrightarrow{a'd}$, resultando $\overline{a'b'}$ el segmento buscado.

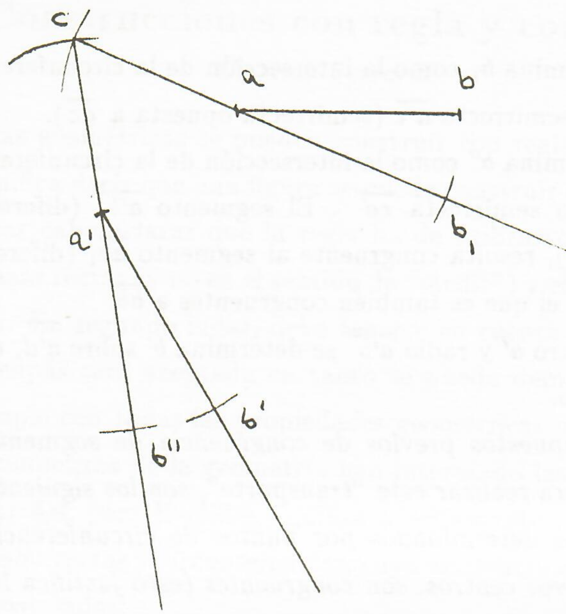
Nota 1: Los supuestos previos de congruencia de segmentos de los que dispone Euclides para realizar este "transporte", son los siguientes:

a) los segmentos determinados por puntos de circunferencias del mismo radio y sus respectivos centros, son congruentes (esto justifica la construcción del triángulo equilátero del paso 1).

b) las sumas (o diferencias) de segmentos respectivamente congruentes, son congruentes

(De este modo, la construcción anterior permite decir que el segmento obtenido es congruente al dado).

Nota 2: Es interesante señalar que esta construcción nos permite ver que a través de ella Euclides deja implícita la idea de "movimiento" (hoy diríamos "transformación rígida o congruencia") para comparar segmentos, ya que para decidir si dos segmentos son congruentes tendremos que "llevar", "mover" o "transportar" un segmento a otro y ver si el "transportado" del primero coincide o no con el otro. Asimismo, esta construcción también permite construir circunferencias congruentes (o comparar circunferencias).



Nota: después de esta construcción, sí es válido el "transporte" de segmentos con un compás.

Pero volvamos a las pregunas del comienzo. Lo que se pretende es realizar, a partir de ciertas "operaciones básicas" (que podrán garantizarse en base a los primeros axiomas), otras construcciones. Dichas operaciones básicas las podríamos enunciar así:

-Trazar la recta que pasa por dos puntos y encontrar el punto de intersección de dos rectas no paralelas.

-Construir un segmento congruente a uno dado sobre una dada semirreca, haciendo coincidir uno de los extremos con el origen de la misma.

-Construir un ángulo congruente a uno dado, de modo que uno de sus lados sea una semirrecta dada y el otro esté en uno de los semiplanos que ella determina. (Esta construcción utiliza el hecho de que ángulos centrales correspondientes a cuerdas congruentes de la misma circunferencia o de circunferencias de radios congruentes, son congruentes).

-Construir una paralela a una recta dada por un punto dado (figura 2).

-Construir una perpendicular a una recta dada por un punto dado.

Es posible demostrar que estas cinco operaciones se pueden realizar haciendo uso de los axiomas que, en la clasificación de Hilbert, son llamados de incidencia, ordenación, congruencia (o rigidez) y paralelismo, reemplazando el axioma de continuidad (que es, justamente, el que nos permite *medir** por una versión menos fuerte que podríamos enunciar así:

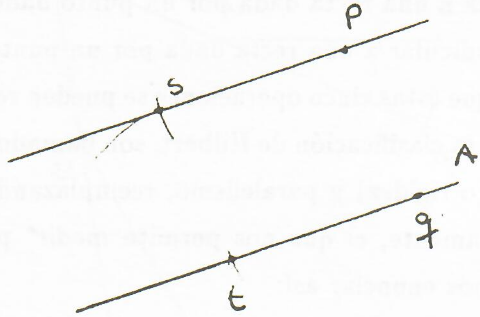
APCE a) La intersección entre una recta y una circunferencia consiste de dos, uno o ningún punto según que el segmento de perpendicular a la recta por el centro de la circunferencia determinado por dicho centro y el pie de la misma sea menor, igual o mayor que el radio.

b) La intersección entre dos circunferencias consiste de dos, uno o ningún punto, según que el segmento determinado por los centros de las mismas sea menor, igual o mayor que la suma de los radios.

El APCE (*axioma precursor del de continuidad debido a Euclides*) no es enunciado por Euclides de esta manera entre sus axiomas y postulados, pero sin embargo hace uso de él (por ejemplo, cuando construye el triángulo equilátero a partir de un segmento construyendo sendas circunferencias con centro en los extremos del segmento y radio congruente al mismo, da por hecho que las mismas se intersectan para poder tomar el tercer vértice. Ver, por ejemplo, el "transporte de un segmento" descripto en la figura 1).

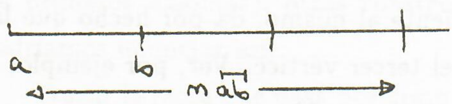
Retomando las operaciones básicas, veamos como ejemplo la cuarta:

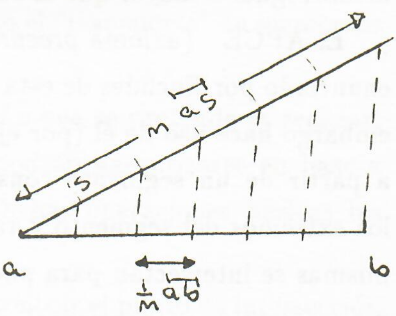
Sean A y p la recta y el punto dados, y $\overline{qt}$ un segmento incluído en A. Las circunferencias de radios $\overline{qt}$ y $\overline{qp}$ y centros p y t respectivamente, se cortan en dos puntos, uno de los cuales es interior al ángulo $\widehat{pqt}$; llamando s a tal punto, el cuadrilátero $pqts$ resulta un paralelogramo (por tener sus lados opuestos respectivamente congruentes). Entonces la recta $\overleftrightarrow{ps}$ resulta la paralela buscada.



A esta altura nos podríamos preguntar: *a partir de un segmento dado*, ¿qué otros se pueden construir con regla y compás? (que son los que llamaremos "segmentos construibles").

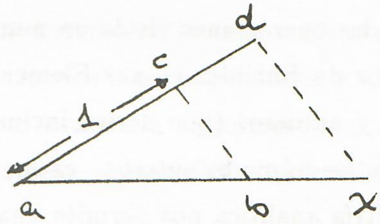
Los primeros segmentos que aparecen para responder a estas preguntas son los múltiplos (transportando n veces el segmento sobre una semirrecta) y submúltiplos:





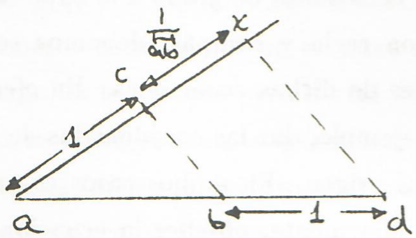
También es fácil ver, partiendo de dos segmentos construibles, que se pueden construir el segmento suma y el segmento diferencia entre el mayor y el menor.

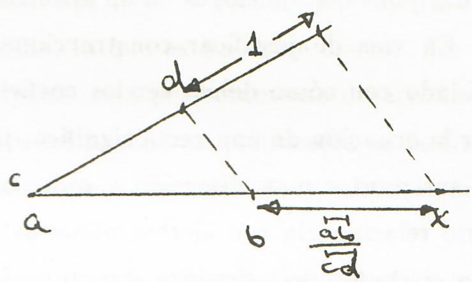
Asimismo, si definimos "segmento producto" de otros dos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ (construibles a partir de uno dado que llamaremos segmento unitario o segmento unidad) al segmento $\overline{bx}$ que resulta de la siguiente construcción:



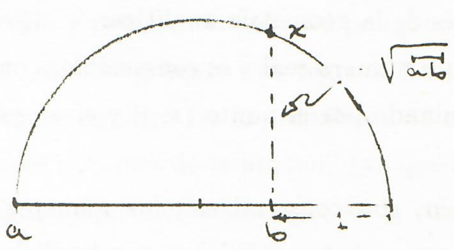
donde $\overline{ac}$ es el segmento unitario y $\overleftrightarrow{dx} \parallel \overleftrightarrow{cb}$, dicho segmento será construible toda vez que lo sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ (a partir de $\overline{ac}$).

Esto nos permite justificar las siguientes construcciones de los segmentos "inverso" y "cociente" a partir de dos segmentos construibles $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$.





Para cerrar este primer grupo de segmentos construibles a partir de otro que lo es, se puede ver la construcción de la "raíz cuadrada" del mismo cuya justificación viene dada por resultados de triángulos semejantes.



Como es de imaginar, aquí no se agota el conjunto de segmentos construibles (ya que se pueden reiterar las operaciones vistas un número finito de veces).

Otra sugerencia que nos da Euclides en sus Elementos, es la relación que establece entre segmentos y números (que deriva incluso en un estudio de la aritmética - propiedades de los números enteros - en los Libros VII al X).

Actualmente, la geometría analítica nos permite una fácil identificación de los puntos del plano con pares de números reales (sus coordenadas), a partir de lo cual se pueden expresar las rectas con ecuaciones de primer grado y las circunferencias con ecuaciones de segundo grado. Entonces, las construcciones que nos ocupan (que consisten en hallar puntos de intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias), vendrán dadas por la/s solucio/es de un sistema de ecuaciones de grado a lo sumo dos.

En vías de justificar construcciones con regla y compás, debemos tener cuidado con cómo deben ser los coeficientes de dichas ecuaciones. En efecto, dar la ecuación de una recta significa, por ejemplo, dar las coordenadas de dos de sus puntos o su dirección y ordenada al origen. En ambos casos es necesario relacionarla con ciertos números. Similarmente, obtener la ecuación de una circunferencia significa dar, por ejemplo, las coordenadas del centro y el segmento congruente con el radio: ambos deben poder construirse a *partir de un segmento dado* (que, sin pérdida de generalidad, puede pensarse como el segmento unitario).

A partir de esto, una figura será construible con regla y compás si lo son los puntos que la determinan. Veamos un poco más de la manera en que comienza este estudio a través de la geometría analítica:

i) Diremos que un número real r es construible (con regla y compás), si lo es el segmento determinado por el punto (r, o) y el origen, a partir de segmentos construibles.

Así, por ejemplo, son construibles: los números enteros, $1/m (m \in \mathbf{Z})$, cualquier número racional, los múltiplos y submúltiplos de un número construible, la raíz cuadrada de un número natural cualquiera (ver espiral de raíces cuadradas de números naturales), la raíz cuadrada de un número construible, la suma de números construibles, el producto y el cociente de números construibles, el número que forma con un número construible la razón áurea, etc.

ii) Un número complejo (a, b) se dirá construible, si lo son los números reales a y b.

iii) Un punto del plano se dirá construible si lo es el complejo que lo representa.

Por lo visto antes, los primeros números construibles que podemos reconocer son, entonces, los racionales y sus raíces cuadradas. Y, a partir de ellos, "muchos mas" (por ejemplo las raíces cuadradas de números de la forma $p + q\sqrt{r}$ con p, q, y r números racionales). Esto nos lleva a pensar que describir los números construibles no es tarea sencilla, lo que es bastante cierto. Sin embargo, la teoría que permite tal descripción está perfectamente desarrollada y sus resultados, además de resolver todos los problemas planteados en la Grecia antigua (diciendo, incluso, qué construcciones *no* son posibles), permitieron un gran avance en álgebra.

No es interés de este trabajo detallar la teoría citada en el párrafo anterior (pueden consultarse, por ej., [1] y [2] sino dar un panorama rápido de la misma que permita tener una idea acerca del significado matemático de la expresión "construcciones con regla y compás".

Uno de los problemas que interesan en geometría es ver que polígonos regulares son constuíbles. En términos geométricos significa: para un n dado ¿es posible construir (con regla y compás) el lado del polígono de n lados inscripto en una circunferencia de radio congruente a un segmento tomado como unitario? Y, traducido a lo visto antes, significa ver la posibilidad de construir los números complejos llamados "raíces n-ésimas de la unidad" (ya que los mismos representan los vértices del polígono equivalente inscripto en la circunferencia unitaria) o sea, las soluciones complejas de la ecuación $x^n - 1 = 0$. Como 1 es solución, basta buscar las soluciones del polinomio ciclotómico $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$.

El resultado más trascendente al respecto es debido a C.F. Gauss (1777 - 1855) que dice que si n es un número primo de la forma:

$$2^{2^r} + 1, \text{ con } r \in \mathbf{Z}, r \geq 0$$

dicho polígono es construible.

Nota: los números de esta forma son llamados números de Fermat (1601 - 1665). Si bien los cinco primeros son primos, se sabe que el 6º es compuesto (este resultado se debe a Euler quien demostró que 641 es divisor de $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$) y más aún, no se conocen otros primos de Fermat.

El resultado final es: "El polígono regular de n lados es construible con regla y compás, *si* y *solo si* n es de la forma

$$2^t.p_1.....p_s$$

con $t \in \mathbf{Z}$, $t \geq 0$ y los p_i primos de Fermat (distintos)".

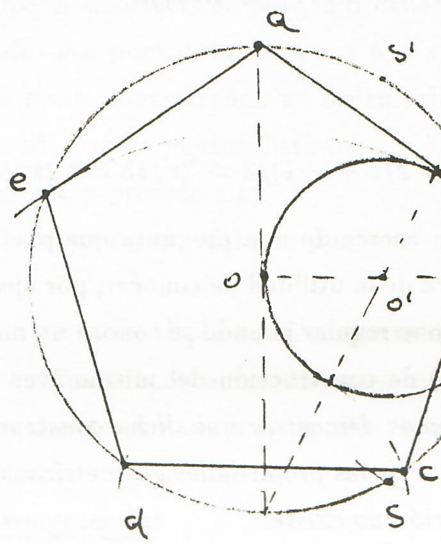
Con respecto a la construcción propiamente dicha de estos polígonos, y ya sabiendo con cuáles es inútil probar, veamos a modo de ejemplos:

1 - cuadrado (interseccción de dos rectas perpendiculares con la circunferencia con centro en el punto común a las mismas) y todos los polígonos con $n = 2^t, t \geq 3$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}$ lados).

2 - triángulo (ver paso 1 de la construcción de segmentos equivalentes) y todos los polígonos de n lados con $n = 2^t.3$ y $t \geq 1$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}.3$ lados).

3 - pentágono (figura 7) y todos los polígonos de n lados con $n = 2^t.5$ y $t \geq 1$ (subdividiendo en dos ángulos congruentes, por medio de la bisectriz, los

ángulos del polígono de $n = 2^{t-1}.5$ lados).



4 - pentadecágono, observando que el ángulo central correspondiente se puede obtener de los centrales correspondientes al pentágono y al triángulo así:

$$2\pi/15 = 2\pi.2/5 + (-1).2\pi/3$$

Nota: esta es la forma en que se construyen en general los polígonos de n lados, con $n = n_1.n_2$, a partir de los de n_1 y n_2 lados, si n_1 y n_2 son coprimos. En efecto, basta observar que en ese caso, 1 (máximo común divisor de n_1 y n_2), es combinación entera de n_1 y n_2, esto es:

$$1 = a.n_1 + b.n_2$$

entonces,

$$1/n = 1/n_1.n_2 = a/n_2 + b/n_1$$

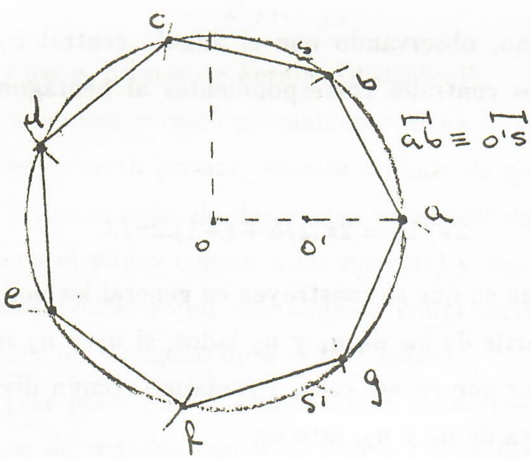
y

$$2\pi/n = a.2\pi/n_2 + b.2\pi/n_1$$

En el caso del ejemplo,

$$1 = 2.3 + (-1).5 \Rightarrow 1/15 = 2/5 + (-1)/3 \Rightarrow 2\pi/15 = 2.2\pi/5 + (-1).2\pi/3$$

Por último, una reflexión acerca de una pregunta que puede hacerse quien se interese por el tema, acerca de la utilidad de conocer, por ejemplo, la imposibilidad de construir el eptágono regular cuando se conoce un muy buen método (en cuanto a aproximación) de construcción del mismo (ver figura 8): pues, que en este caso, *no busquemos demostrar que dicha construcción nos provee de la figura correcta (en cuanto a las propiedades geométricas que la definen se refiere) ya que tal demostración no existe.*



(*) Axiomas de incidencia, ordenmación, congruencia, paralelismo y continuidad en el plano:

Axiomas de incidencia y ordenación:

i - El plano es un conjunto infinito de puntos.

ii- Las rectas son subconjuntos propios del plano.

iii- Dados dos puntos distintos, existe una única recta a la que ellos pertenecen.

iv - Los puntos de una recta se pueden ordenar según dos órdenes opuestos de nodo que, dados dos puntos distintos a y b, o a precede a b o b precede a a.

v - Dada una recta, considerando un orden sobre ella,

1) para todo par de puntos distintos a y b, si a precede a b, existe otro punto c que sigue a a y precede a b;

2) para todo punto m existe un punto m' que le precede y otro m'' que le sigue.

vi - Dada una recta en el plano, el conjunto de puntos que no pertenecen a ella se divide en dos subconjuntos disjuntos convexos de modo que si m y n están respectivamente en cada uno de ellos, el segmento $\overline{mn}$ intersecta a la recta en un punto.

Axioma de congruencia:

vii - Las transformaciones rígidas son aplicaciones biyectivas del plano en sí mismo que satisfacen las propiedades

1) si tres puntos a, b y c están en una recta y c está entre a y b; sus transformados a', b' y c' están alineados y c' está entre a' y b'.

2) si $\overline{ab}$ se transforma en $\overline{a'b'}$ y $\overline{ab} \subset \overline{a'b'} \vee \overline{a'b'} \subset \overline{ab}$, entonces $\overline{a'b'} = \overline{ab}$

3) si $\widehat{aob}$ se transforma en $\widehat{a'o'b'}$ y $\widehat{aob} \subset \widehat{a'o'b'} \vee \widehat{a'o'b'} \subset \widehat{aob}$, entonces $\widehat{aob} = \widehat{a'o'b'}$

viii - La composición de transformaciones rígidas es una transformación rígida y la inversa de una transformación rígida es una transformación rígida.

ix - Existe una única transformación rígida que transforma una dada semirrecta en otra y un determinado semiplano limitado por la primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

Axioma de paralelismo:

x - La paralela que pasa por un punto exterior a una recta, es única.

Axioma de continuidad:

xi - Sean A una recta ordenada, $\overline{U}$ un segmento, u_i con $i \in \mathbf{Z}$ puntos de la recta tales que

$$\overline{u_i u_{i+1}} \equiv \overline{U} \quad \wedge \quad u_j \text{ precede a } u_i \text{ si } j < i$$

Entonces existe una única función biyectiva

$$f : A \to \mathbf{R}$$

que preserva el orden, tal que $f(u_i) = i \;\; \forall i \in \mathbf{Z}$ y que si m es el punto medio de cualquier segmento $\overline{ab} \subset A$, verifica

$$f(m) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] *"Contrucciones con regla y comás"*, Enzo Gentile. Revista de Educación Matemática, vol. 3 N^o 2, Córdoba 1987.

[2] *"Foundations of Geometry"*, David Hilbert. 2da. edición en inglés de 1971 (original de 1887), La Salle Illinois.

[3] *"Geometría Elemental"*, A.V. Pogorélov. Ed. MIR, Moscú, 1974. (Versión en castellano del mismo año).

[4] *Leyendo a Euclides"*, Beppo Levi. Ed. Rosario S.A. 1947.

[5] *Geometría Teórico - Práctica para los Niños"*. Aquilino Fernández. 10^a edición (no trae fecha). F. Crespillo, Editor, Buenos Aires.

[6] *Problemas Gráficos y Numéricos de Geometría"*. M. García Ardua. 15^a. edición, Madrid 1968.

Centro Regional Universitario Bariloche.

Universidad Nacional del Comahue.

C.C. 1336 - 8400 - San Carlos de Bariloche.