Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio; se trata de situaciones cotidianas, como dos amigas que se encuentran en la entrada del colegio o la de pelar una manzana. En el tercer problema hay que ayudar a sobrevivir a un aventurero que quedó solo en el desierto. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. ENTRADA AL COLEGIO. Dos amigas siempre llegan al colegio antes de que toque el timbre a las 8. Sus padres las traen en cualquier momento entre las 7 y media y las 8, aleatoriamente.

Ellas siempre hacen así: cuando una llega, espera a la otra durante 10 minutos y, si no aparece, entonces entra al colegio. La probabilidad de que se encuentren antes de entrar ¿es mayor o menor que un medio?

Problema 2. CÁSCARA DE MANZANA. A algunas personas les gusta comer las manzanas sin su cáscara o piel, y para pelarlas a veces lo hacen cortando de manera que la cáscara va quedando en una sola pieza, como una tira enroscada sobre la manzana. Si al terminar, la estiran, puede resultar bastante más larga de lo esperado. Quizás esto motivó a que apareciera el récord Guiness de la *cáscara de manzana más larga del mundo*. Por supuesto que para obtener una cáscara larga, hay que ser cuidadosos, pacientes y hábiles. Supongamos que fuésemos capaces de ir cortando la cáscara con 1 mm de ancho arpoximadamente, ¿cuál sería el largo de nuestra cáscara? ¿Superaríamos el récord Guiness?

[Aclaración: para este problema, suponemos que nuestras manzanas son esferas, y que para intentar batir el récord, en lugar de elegir una de 6 cm de diámetro, conseguimos una grande, de 10 cm de diámetro. El sorprendente récord es de ¡$52,5$ metros!]

Problema 3. El aventurero del desierto. Un aventurero quedó varado, solo, en un gran desierto. Afortunadamente conocía muy bien el (largo) camino para salir de ahí; el único problema era la provisión de agua, indispensable para sobrevivir al recorrer el camino. Son exactamente 184 km y sabe que necesita 1 litro de agua cada 4 kms que camine. Además, sólo puede cargar hasta 30 lts en su mochila. Dispone de 90 lts en donde se encuentra. Sabe que nadie vendrá en su ayuda, así que se dispone a partir. Puede avanzar un poco, dejar agua, regresar para cargar más agua de los 90 lts de los que dispone, etc. ¿Podrá salvarse? Seguramente necesita la ayuda de un buen cálculo matemático para tener chances. ¿Podés ayudar al aventurero perdido?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\}: \quad 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 0, 5, \ldots$$
$$\{b_n\}: \quad 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \ldots$$
$$\{c_n\}: \quad 4, 11, 30, 85, 248, 735, 2194, \ldots$$
$$\{d_n\}: \quad 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, \ldots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 60.

SOLUCIONES

✓ *Solución 1.* La probabilidad de que se encuentren es de $\frac{5}{9}$, así que es mayor que $\frac{1}{2}$. Una forma de verlo, es graficar en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el cuadrado de 30×30 dado por el intervalo $[0, 30]$ producto con el intervalo $[0, 30]$. Allí, la primera coordenada representa la hora a la que llega una de las amigas y la segunda coordenada la hora a la que llega la otra amiga. Se puede sombrear la región del cuadrado correspondiente a horarios en las que se encuentran y luego se ve que la región sombreada es de área $\frac{5}{9}$ del total del área del cuadrado. Como los horarios de llegada son aleatorios e uniformes, esta proporción entre las áreas representa la probabilidad pedida en el problema.

✓ *Solución 2.* No alcanzaremos a batir el récord de este modo, aunque sí obtendremos una cáscara muy larga, de unos 30 mts de largo. El área (o superficie) de una esfera es de $4\pi r^2$ (r=radio), o lo que es lo mismo πd^2 (d=diámetro), por lo que si nuestra manzana tiene 10 cm de diámetro, la superficie de la cáscara sería de aproximadamente 314 cm^2, lo cual nos daría un largo máximo de 31,4 mts de largo para nuestra cáscara cortada con 1 mm de ancho.

[*Nota*: en realidad, el largo sería un poco menor, puesto que nuestra cáscara no sería una cinta plana, sino que viene de ir cortando algo esférico, con lo que se perdería un poco de área al pasar de la esfera al plano. ¿Te animás a estimar cuánto podría ser la pérdida en este caso?]

✓ *Solución 3.* ¡Sí, puede salvarse! Con lo justo. La forma para salvarse es así: recorre un primer trayecto de 24 km cargando 30 lts de agua, deja ahí 18 lts y vuelve al punto de partida. Hace lo mismo una segunda vez. Luego recorre por 3ra vez esos primeros 24 km, donde al finalizarlos tendrá allí 60 lts de agua. A continuación, recorre 40 km, partiendo con la carga de 30 lts de agua, deja 10 lts al final de estos 40 km y se vuelve. Sale nuevamente con otros 30 lts, recorre esos 40 km, y ahora se encuentra con 30 lts de agua, habiendo recorrido 64 de los 184 km. De modo que le quedan $184 - 64 = 120$ km por recorrer y 30 lts de agua. Justo para poder hacerlo directamente, sin tener que regresar más.

La idea para resolverlo es pensar que los regresos le harán consumir mucha agua, por lo que conviene minimizarlos. Para eso, conviene dividir el camino en 3 partes. En la primera parte, sabemos que hará 3 veces el mismo recorrido de ida, más los dos regresos, son 5 veces. Esto es así porque solo puede llevar consigo hasta 30 lts de agua, de los 90 que tiene. Entonces planteamos esa primera etapa como para terminarla con justo 60 lts de agua. La ecuacion sería $90 - 5x = 60$, donde x representa la cantidad de kms a recorrer, multiplicada por 4, ya que se recorren 4 km por litro de agua consumida. La solucion es $x = 6$, por lo que conviene recorrer 24 km en la primera etapa. Quedaron 60 lts para iniciar la 2da etapa, y queremos dejar justo 30 lts para la 3ra etapa, por lo que ahora la ecuación es $60 - 3y = 30$, puesto que en esta etapa los $4y$ kilómetros se recorren 3 veces. Así, la solución es $y = 10$, por lo que la 2da etapa tiene $4y = 40$ kms.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{12} = 10$. Es una serie aritmética, que comienza en 3 y suma 5 en cada paso, pero módulo 12, o sea, cuando superamos el 12, nos quedamos con el resto del número al dividirlo por 12. Luego sigue $a_{13} = 3$ $(= 10 + 5 - 12)$, $a_{14} = 8$, etc.
- $b_{12} = 274$. Son los *números tribonacci*. Para obtener el siguiente término se suman los últimos tres números de la sucesión (no los últimos dos como en los números de Fibonacci).
- $c_8 = 6569$. La sucesión es $c_n = 3^n + n$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $d_8 = 9699690$. La sucesión es el producto de los primeros primos, es decir $d_n = p_1 p_2 \cdots p_n$, donde p_n es el n-ésimo primo.

Viene de la página 58.