Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio.

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. Longitud del tren. Tomás iba en el auto con su hijo cuando vieron un tren yendo en la misma dirección y sentido que ellos. Su hijo dijo: "¡Papi, qué tren más largo!". Entonces ambos se preguntaron cuánto mediría el tren. Tomás le pidió a su hijo que cronometrara el tiempo que tardaban en pasarlo, de punta a punta, y mantuvo su velocidad constante. El tren también iba a velocidad constante, menor que la de ellos. Pasado un buen rato, cuando estaban regresando, volvieron a ver el tren, que continuaba su marcha a la misma velocidad, solo que ahora ellos iban en sentido contrario. Tomás volvió a pedirle a su hijo que anotara el tiempo que tardaban en cruzarse con el tren, de comienzo a fin de éste, y mantuvo la misma velocidad constante que a la ida, porque pensó que con esos datos podría calcular la longitud del tren. Sin embargo no le resultó fácil resolver este problema y se lo tuvo que preguntar a un profesor de matemática. ¿Puedes ayudar a Tomás a calcular la longitud del tren? ¿Puedes calcular la velocidad del tren? Los datos son: la velocidad del auto (constante) y los tiempos que tardaron en pasarlo y en cruzarlo, de punta a punta del tren.

¿Era necesario mantener la misma velocidad a la vuelta que a la ida para poder saber la longitud del tren?

Problema 2. ¿Existen cinco números consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los 3 primeros sea igual a la suma de los 2 últimos? En caso que sí, ¿cuántas soluciones habría?

¿Qué sucede si en lugar de considerar los cuadrados de los cinco números consideramos sus cubos? ¿Habrá alguna solución?

Problema 3. Patitas de Pollo. Un restorán de comidas rápidas vende patitas de pollo en porciones de 6, 9 y 20 patitas. ¿Cuál es el mayor número de patitas de pollo que no se puede ordenar en este restorán?

(Por ejemplo, si queremos pedir 19 patitas, no podemos.)

SOLUCIONES

Solución 1. Se sabe que la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo, es decir, $v = \frac{d}{t}$, o equivalentemente, $t = \frac{d}{v}$. Si aplicamos esto a la longitud del tren, L, y llamamos v_1 a la velocidad del tren y v_2 a la del auto, tenemos que cuando van en el mismo sentido la velocidad relativa es $v_2 - v_1$, por lo que el primer tiempo cronometrado, t_1, satisface $t_1 = \frac{v_2 - v_1}{L}$. Análogamente, el segundo tiempo cronometrado es $t_2 = \frac{v_2 + v_1}{L}$, puesto que la velocidad relativa es ahora $v_2 + v_1$. De estas dos ecuaciones se obtiene fácilmente L, sumando miembro a miembro: $t_1 + t_2 = \frac{2v_2}{L}$, luego $L = \frac{2v_2}{t_1 + t_2}$ es la longitud del tren.

La velocidad del tren se puede calcular ahora despejándola de cualquiera de las dos ecuaciones planteadas.

No fue importante haber mantenido la misma velocidad al regreso que a la ida, puesto que si al regreso Tomás hubiera ido a otra velocidad constante v_3, el cálculo se haría casi del mismo modo, dando como resultado $L = \frac{v_2 + v_3}{t_1 + t_2}$.

Solución 2. Sí, existen. El 10, 11, 12, 13 y 14 cumplen con lo pedido, pues $100 + 121 + 144 = 365 = 169 + 196$. Para llegar a esto, podemos llamar n al número del medio y plantear la ecuación $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$, que es equivalente a $n^2 = 12n$, cuyas únicas soluciones son $n = 12$ y $n = 0$. El caso $n = 0$ corresponde a los números -2, -1, 0, 1 y 2, que sería una solución en los enteros, pero no en los naturales. De modo que hay una única solucion en los enteros positivos.

El caso de los números elevados al cubo se puede hacer planteando la ecuación análoga, que al simplificarla queda $n^3 = 2 \times 3^2 \times (n^2 + 1)$. Esta ecuación no tiene solucion en los enteros. Una forma de notarlo es razonando por el absurdo: si hubiera una solución n y p fuera un divisor primo de n, entonces p no sería divisor de $n^2 + 1$, además, p^3 dividiría a n^3, luego, p^3 debería dividir a 2×3^2, lo cual es un absurdo por el Teorema Fundamental de la Aritmética, que nos asegura la unicidad en la factorización en primos.

Solución 3. Rta. 43. Se ve que a los múltiplos de 3 se los va a poder pedir a partir del 6, puesto que si es múltiplo de 6, pedimos porciones de 6, y si es múltiplo de 3 pero no de 6, entonces pedimos una porción de 9 y completamos con las porciones de 6 que hagan falta. Ahora, pasamos a los números de la forma $3k+1$ y $3k+2$, donde k es un entero positivo. Notemos que el 20 es de la forma $3k+2$ con $k=6$. Por consiguiente, a los números de la forma $3k+2$ los podremos pedir a todos partir del 26 (pedimos una porción de 20 patitas y completamos con las de 6 y 9 como hacíamos antes para los múltiplos de 3). En cambio, para hacer pedidos con $3k+1$ patitas, tenemos que irnos hasta el 40, que es el primer número de esta forma que podemos pedir. Razonando como antes, a partir del 46 podemos ordenar todos los $3k+1$, pero el 43 no.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

$$\{a_n\}: \quad 1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, 3411, 528706, \dots$$

$$\{b_n\}: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \dots$$

$$\{c_n\}: \quad 1, 4, 27, 256, 3125, 46656, \dots$$

$$\{d_n\}: \quad 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3,$$
$$2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 4, \dots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 58.