Revista de Educación Matemática
Volumen 35, N° 3 (2020), páginas 41 – 51
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

EXTENSIONES DE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO DEL ANÁLISIS DE UNA VARIABLE

Ginés R. Pérez Teruel

Resumen. En este trabajo los teoremas del valor medio de Lagrange y Cauchy para funciones reales de variable real son extendidos, incluyendo el caso de la función compuesta. Para ello se sigue un razonamiento inductivo, partiendo de la exploración de casos particulares hasta llegar a una expresión general, procediendo por tanto de lo particular a lo general. El contenido del trabajo puede ser de utilidad para docentes de Matemática como material complementario y de ampliación en sus clases.

Abstract. In this work Lagrange's and Cauchy's mean value theorems for real valued functions are extended, including the case of the composed function. For this purpose, we follow an inductive reasoning, starting from the exploration of some particular cases until obtaining a general expression, therefore we move from the particular to the general. The content of the work may be useful for math teachers as complementary and additional material for their lectures

§1. Introducción

Los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy son dos básicos teoremas del cálculo diferencial que todo estudiante del último curso de instituto o de primer año universitario debería conocer bien. Dichos teoremas pueden demostrarse usando el teorema de Rolle, otro teorema clásico que recientemente ha tenido un inusitado protagonismo en los medios de comunicación españoles a tenor de su aparición en un polémico examen de Matemática de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) de 2019 en la Comunidad Valenciana (Borreguero, 2019; la Torre, 2019) .

Palabras clave: teorema de Rolle, teoremas del valor medio, funciones de una variable.
Keywords: Rolle's theorem, mean value theorems, functions of one variable.

A pesar de ser un teorema bastante intuitivo y elemental, el hecho de que llevara varios años sin aparecer en la PAU hizo creer a muchos docentes que su enseñanza podía omitirse en clase, aunque este teorema se incluya en los currículos españoles de segundo de Bachillerato de manera explícita y su omisión, por tanto, resulte difícil de justificar (Molins y Bautista, 2019). Conviene aclarar a todos nuestros lectores que el segundo curso del Bachillerato español equivale al último curso de la Educación Secundaria en el sistema educativo argentino.

En este trabajo, mostraremos la riqueza del teorema de Rolle, y lo usaremos para extender y generalizar los teoremas del valor medio de Lagrange y Cauchy al caso de la función compuesta, que ilustraremos mediante algunos ejemplos sencillos. Además, Rolle también nos servirá para derivar otro teorema análogo a los teoremas del valor medio para una función construida como el producto de otras dos funciones, y en el que, como veremos, aparece explícitamente la media aritmética de los valores que estas funciones toman en los extremos de un intervalo.

Desde un punto de vista didáctico, el contenido de este trabajo puede ser utilizado por docentes de Matemática como material complementario de ampliación en sus clases, dado que las demostraciones y razonamientos presentados aquí pueden ser asimilados sin problemas por estudiantes que hayan superado con éxito un primer curso introductorio de análisis.

§2. Conceptos previos: el teorema de Rolle y los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy

En 1691, el matemático francés Michel Rolle (1652-1719) demostró que si f es una función continua que vale lo mismo en los extremos de un intervalo, entonces existe al menos un punto del interior del intervalo donde la derivada de la función se anula. En términos más precisos, si f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable sobre el abierto (a, b), entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = 0.$$

Las demostraciones modernas de este teorema hacen uso del teorema de Weierstrass, que mencionamos pero no escribiremos aquí.

El hecho de que una curva tome el mismo valor en los extremos de un intervalo implique necesariamente que en el interior del mismo exista algún punto donde la tangente a la curva sea horizontal, ya era conocido mucho antes del cálculo diferencial y de Michel Rolle, pues se atribuye al matemático indio Bashkara Acharia

(1114–1185) una temprana versión de este teorema.

Una de las aplicaciones habituales del teorema de Rolle es la demostración de los teoremas del valor medio (Lagrange y Cauchy), por medio de la construcción de funciones auxiliares que sean continuas y tomen el mismo valor en los extremos de un intervalo determinado. Puesto que vamos a necesitarlo en lo sucesivo, enunciemos ahora brevemente el teorema del valor medio de Lagrange.

Teorema 2.1 (valor medio de Lagrange). *Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración. Se define la función auxiliar h de la forma

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle. Es continua (puesto que f lo es) y por sustitución directa puede comprobarse que

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Por tanto debe haber algún punto $c \in (a,b)$ para el cual $h'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. □

Teorema 2.2 (valor medio de Cauchy). *Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

Demostración. Sea la función auxiliar H definida como:

$$H(x) = \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big) - \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big).$$

Esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que

$$H(a) = H(b) = 0.$$

Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a,b)$ para el cual $H'(c) = 0$. Derivando $H(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a,b)$, $H'(c) = 0$, obtenemos el resultado del teorema. □

Resulta claro que el teorema del valor medio de Lagrange es un caso particular del teorema de Cauchy para $g(x) = x$. Una de las aplicaciones más conocidas de este teorema es la demostración de la regla de L´Hôpital-Bernoulli.

Por otra parte, es interesante observar que uno puede construir muchas funciones auxiliares análogas a las que se utilizan en estos teoremas que cumplen las condiciones del teorema de Rolle. Por ejemplo, sea $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces podemos definir una cierta función S como

$$S(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b-a} \cdot (x-a).$$

Esta función verifica $S(b) = S(a) = 0$ y como hemos exigido $f(x) \neq 0$ en $[a,b]$, entonces todas las condiciones del teorema de Rolle se satisfacen.

La próxima sección versa sobre el estudio de algunas de estas funciones auxiliares que cumplen con las condiciones del teorema de Rolle y de sus aplicaciones para extender y generalizar los teoremas del valor medio.

§3. El teorema del valor medio de Lagrange para la función compuesta

Iniciemos esta sección enunciando un par de teoremas que nos permitirán aproximarnos poco a poco hacia otro resultado más general que contiene a los anteriores y al propio teorema del valor medio de Lagrange como casos particulares.

Teorema 3.1. *Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y además $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)f(b)f(a)} \cdot \big(f(c)\big)^2.$$

Demostración. Construyamos una función auxiliar S que se define como:

$$S(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b-a} \cdot (x-a).$$

Esta función satisface las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f lo es y además $f \neq 0$ en $[a,b]$) y por sustitución directa puede comprobarse que $S(a) = S(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a,b)$ para el cual $S'(c) = 0$. Derivando $S(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a,b)$, $S'(c) = 0$, encontramos:

$$0 = -\frac{1}{\big(f(c)\big)^2} \cdot f'(c) - \frac{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}}{b-a}.$$

Despejando $f'(c)$ en esta ecuación obtenemos el resultado del teorema. □

Mostremos ahora algún ejemplo sencillo de aplicación de este teorema para funciones elementales.

Ejemplo 3.2. *Sea la función lineal genérica: $f(x) = mx + n$ con $m, n > 0$.*

(a) *Determina, en función de* m *y* n*, para qué punto del intervalo* $(0,1)$ *se cumple lo establecido por el Teorema 3.1.*

(b) *A continuación, particulariza la solución obtenida para la función* $f(x) = x+1$ *y comprueba que el punto obtenido cae efectivamente dentro del intervalo* $(0,1)$

(a) El teorema anterior aplicado a la función del ejemplo nos asegura que debe existir algún $x \in (a,b)$ para el cual:

$$m = \frac{m}{(m+n)n} \cdot (mx+n)^2.$$

Hemos hecho uso de las identidades: $f(1) = m+n$, $f(0) = n$, $f'(x) = m$. Desarrollando el cuadrado y simplificando, llegamos a la ecuación de segundo grado:

$$m^2x^2 + 2mnx - mn = 0.$$

Esta ecuación de segundo grado tiene las soluciones siguientes:

$$x = \frac{-2mn \pm \sqrt{4m^2n^2 + 4m^3n}}{2m^2} = \frac{1}{m}\Big(-n \pm \sqrt{n(n+m)}\Big).$$

Y puesto que las condiciones del problema nos dicen que $m, n > 0$, la única solución que pertenece al intervalo $(0,1)$ será por tanto:

$$x = \frac{1}{m}\Big(-n + \sqrt{n(n+m)}\Big).$$

(b) Sustituimos en esta última ecuación los valores $m = 1$, $n = 1$ que se corresponden con los valores de la pendiente y ordenada para la función $f(x) = x+1$, y obtenemos:

$$x = -1 + \sqrt{2}.$$

Valor que efectivamente pertenece al intervalo $(0,1)$.

Teorema 3.3. *Sea* f *una función continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b)*, y además* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$ *entonces existe un* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{b-a} \cdot f(c).$$

Demostración. Sea la función auxiliar R definida de la siguiente forma:

$$R(x) = \ln\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right) - \frac{\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{b-a} \cdot (x-a).$$

La función R así definida verifica las condiciones del teorema de Rolle[1]. Es continua (puesto que f lo es y además $f(x) \neq 0$ en $[a,b]$), y por sustitución directa puede comprobarse que $R(a) = R(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto

[1]Notemos que no hace falta ninguna hipótesis extra para evaluar la función $\ln$ en $f(b)/f(a)$ y luego en $f(x)/f(a)$, pues al ser f no nula en $[a,b]$, los cocientes tienen signo positivo.

$c \in (a,b)$ para el cual $R'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero encontramos:

$$0 = \frac{f'(c)}{f(c)} - \frac{\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{b-a}. \qquad \square$$

Es interesante advertir que este teorema es a las funciones exponenciales lo que el teorema del valor medio de Lagrange es a las funciones lineales y cuadráticas. En efecto, es sencillo demostrar que para una función cuadrática

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

con α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, continua en cualquier intervalo $[a,b]$ y derivable en el abierto, el teorema del valor medio de Lagrange se verifica justo para el punto medio del intervalo: $x = \frac{1}{2}(a+b)$.

Veamos un ejemplo para ilustrar que el Teorema 3.3 juega el mismo papel para las funciones exponenciales.

Ejemplo 3.4. *Sea la función exponencial $f(x) = e^{x^2}$ que es continua en todo intervalo $[a,b]$ y derivable en el abierto. Demuestra que un punto del intervalo donde se verifica el Teorema 3.3 es precisamente el punto medio de dicho intervalo.*

El Teorema 3.3 nos dice que debe existir algún $x \in (a,b)$ para el cual

$$\begin{aligned} 2x \cdot e^{x^2} &= \frac{\ln\left(\frac{e^{b^2}}{e^{a^2}}\right)}{b-a} \cdot e^{x^2} = \frac{\ln(e^{b^2}) - \ln(e^{a^2})}{b-a} \cdot e^{x^2} \\ &= \frac{b^2-a^2}{b-a} \cdot e^{x^2} = (b+a) \cdot e^{x^2}. \end{aligned}$$

y de aquí se infiere que $x = \frac{1}{2}(a+b)$. Idéntico resultado se obtiene para la función más general

$$f(x) = \exp(\alpha x^2 + \beta x + \gamma),$$

donde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Es probable que el atento lector ya haya notado que los dos teoremas anteriores se construyen siguiendo la misma filosofía, pues ambos los hemos deducido utilizando funciones auxiliares que verifican las condiciones del teorema Rolle y que hacen uso de funciones de $f(x)$ como $1/f(x)$ y $\ln f(x)$. En efecto, los dos son casos particulares de un teorema más general que enunciaremos ahora.

Teorema 3.5 (valor medio de Lagrange de la función compuesta)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y sea h una función continua en $f([a,b])$ y derivable en $f([a,b])$, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que*

$$h'(f(c)) \cdot f'(c) = \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{b-a}.$$

Demostración. Construyamos una función auxiliar T definida como:

$$T(x) = h(f(x)) - h(f(a)) - \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{b-a} \cdot (x-a).$$

La función T así definida satisface las condiciones del teorema de Rolle. Es continua (puesto que f y h lo son por hipótesis) y por sustitución directa puede comprobarse que $T(a) = T(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a,b)$ para el cual $T'(c) = 0$. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. $\square$

Notemos que cuando

$$h(f(x)) = f(x)$$

recuperamos el teorema del valor medio de Lagrange. De la misma forma, cuando

$$h(f(x)) = \frac{1}{f(x)}, \qquad f(x) \neq 0,$$

recuperamos el Teorema 3.1, mientras que si

$$h(f(x)) = \ln f(x), \qquad f(x) > 0,$$

lo que obtenemos es el Teorema 3.3. Es por tanto posible obtener muchos otros teoremas del valor medio análogos a los anteriores utilizando funciones compuestas diferentes a estas. El lector puede comprobar por sí mismo que con

$$h(f(x)) = \sqrt{f(x)}, \quad f(x) > 0, \qquad \text{ó} \qquad h(f(x)) = e^{f(x)},$$

por ejemplo, se pueden obtener otros resultados interesantes. Veamos uno de estos casos como ejercicio de aplicación de este resultado.

Ejemplo 3.6. *Basándote en el Teorema 3.5:*
(a) *Deduce un "teorema del valor medio" para la función compuesta* $h(f(x)) = \arctan(f(x))$.
(b) *Encuentra el punto para el cual se verifica este teorema si* $f(x) = \cos x$ *en el intervalo* $[0, \pi]$.

(a) El teorema del valor medio de la función compuesta aplicado a la función $h(f(x)) = \arctan(f(x))$ nos dice que para algún $c \in [a,b]$ se tiene

$$f'(c) = \frac{\arctan(f(b)) - \arctan(f(a))}{b-a} \cdot \big(1 + (f(c))^2\big).$$

(b) Aplicando este teorema a nuestro caso: $f(x) = \cos x$ en $[0,\pi]$, tenemos:

$$-\sin x = \frac{\arctan(\cos(\pi)) - \arctan(\cos(0))}{\pi} \cdot \big(1 + \cos^2(x)\big) = -\tfrac{1}{2}\big(2 - \sin^2(x)\big).$$

Reagrupando, llegamos a la ecuación de segundo grado

$$\sin^2(x) + 2\sin(x) - 2 = 0,$$

cuya única solución admisible viene dada por

$$\sin x = -1 + \sqrt{3},$$

es decir $x \simeq 0,82$, valor que efectivamente pertenece al intervalo $[0,\pi]$.

En la próxima sección mostraremos cómo puede seguirse la misma filosofía para generalizar el teorema del valor medio de Cauchy, y además enunciaremos otro teorema de valor medio que se construye siguiendo un enfoque un poco diferente.

§4. Otros teoremas del valor medio

En esta última parte del trabajo veremos que la misma estrategia funciona también para extender el teorema del valor medio de Cauchy para la función compuesta. De nuevo empezaremos por un teorema que, como el propio teorema de Cauchy, representa sólo un caso particular. Concluiremos la sección presentando otro teorema de valor medio un poco distinto a los anteriores, en el que demostraremos que para dos funciones continuas en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, existe algún punto del interior del intervalo donde la derivada del producto de estas dos funciones coincide idénticamente con la suma de la derivada de cada función multiplicada por la media aritmética de la otra, evaluada en los extremos del intervalo.

Teorema 4.1. *Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) y además $f(x), g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(c))^2\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)g(b)g(a) = (g(c))^2\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)f(b)f(a).$$

En el caso en el que $g(b) \neq g(a)$ y además $g'(c) \neq 0$, podremos escribir

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{(f(c))^2}{(g(c))^2}\cdot\frac{g(b)g(a)}{f(b)f(a)}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{4.1}$$

Demostración. Se construye una función auxiliar G de la forma:

$$G(x) = \left(\tfrac{1}{f(x)} - \tfrac{1}{f(a)}\right)\left(\tfrac{1}{g(b)} - \tfrac{1}{g(a)}\right) - \left(\tfrac{1}{f(b)} - \tfrac{1}{f(a)}\right)\left(\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(a)}\right). \tag{4.2}$$

La función G verifica las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que $G(a) = G(b) = 0$. Por tanto, debe haber algún punto $c \in (a,b)$ para el cual $G'(c) = 0$. Derivando $G(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a,b)$, $G'(c) = 0$, obtenemos el resultado del teorema. □

Vamos a conectar ahora este resultado con lo visto anteriormente. En particular, puede demostrarse que el Teorema 3.1 que vimos en la sección previa es a este Teorema 4.1, lo mismo que el teorema de Lagrange es al teorema de Cauchy, es decir, un caso particular. De hecho, tomando $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, en la ecuación (4.1), para algún $c \in (a,b)$ tenemos que

$$\begin{aligned}-c^2 \cdot f'(c) =& (f(c))^2 c^2 \frac{1}{baf(b)f(a)} \cdot \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} \\ =& (f(c))^2 c^2 \frac{1}{baf(b)f(a)} \cdot \frac{\big(f(b)-f(a)\big)ba}{a-b};\end{aligned}$$

es decir,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)f(b)f(a)} \cdot (f(c))^2,$$

que es el Teorema 3.1, tal y como queríamos demostrar. Es interesante observar también que la función auxiliar $G(x)$ dada por la ecuación (4.2) puede expresarse como el determinante

$$G(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} & \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \\ \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} & \frac{1}{g(b)} - \frac{1}{g(a)} \end{vmatrix}.$$

Esta notación parece particularmente apropiada si uno quisiera extender estos resultados al caso de tres o más funciones.

Por otra parte, al igual que hicimos en la sección previa, prodríamos continuar explorando casos particulares y presentar otro teorema reemplazando en la función auxiliar del Teorema 4.1 la función $\frac{1}{g(x)}$, $g \neq 0$, por cualquier otra función de $g(x)$, como por ejemplo $\ln(g(x))$, $g > 0$, el lector puede comprobar si lo desea cómo quedaría el resultado. Nosotros no nos detendremos a investigar más casos particulares, y enunciaremos a continuación el caso general de la función compuesta.

Teorema 4.2 (valor medio de Cauchy de la función compuesta)**.** *Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), h una función continua en $f([a,b])$ y derivable en $f([a,b])$ y J una función continua en $g([a,b])$ y derivable en $g([a,b])$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\Big(h(f(b)) - h(f(a))\Big) J'(g(c))g'(c) = \Big(J(g(b)) - J(g(a))\Big) h'(f(c))f'(c).$$

En el caso en el que $J(g(b)) \neq J(g(a))$ y además $J'(g(c))g'(c) \neq 0$, podremos escribir:

$$\frac{h'(f(c))f'(c)}{J'(g(c))g'(c)} = \frac{h(f(b)) - h(f(a))}{J(g(b)) - J(g(a))}.$$

Demostración. Se construye una función auxiliar K definida como el determinante

$$K(x) = \begin{vmatrix} h(f(x)) - h(f(a)) & h(f(b)) - h(f(a)) \\ J(g(x)) - J(g(a)) & J(g(b)) - J(g(a)) \end{vmatrix}. \tag{4.3}$$

Este determinante cumple con las condiciones del Teorema de Rolle. Derivando e igualando a cero, obtenemos el resultado del teorema. □

Notemos que el Teorema del valor medio de Cauchy es un caso particular de este Teorema 4.2 cuando $h(f(x)) = f(x)$ y $J(g(x)) = g(x)$. El teorema puede generalizarse al caso de tres o más funciones compuestas extendiendo de manera natural la dimensión del determinante que define la función auxiliar $K(x)$ de la ecuación (4.3), y que cumple con el Teorema de Rolle.

Vamos a concluir esta postrera sección del trabajo presentando un último teorema de valor medio en el que aparece de forma explícita la media aritmética de los valores de una función evaluada en los extremos de un intervalo.

Teorema 4.3. *Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)'\Big|_{x=c} = \tfrac{1}{2}\big\{f'(c) \cdot \big(g(a) + g(b)\big) + g'(c) \cdot \big(f(a) + f(b)\big)\big\}.$$

Demostración. Definimos una función auxiliar D de la forma:

$$D(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(x) - g(b)\big) + \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(x) - f(b)\big).$$

La función D verifica las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, es continua (puesto que f y g lo son) y por sustitución directa puede comprobarse que $D(a) = D(b) = 0$. Por tanto, existe algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $D'(c) = 0$. Derivando $D(x)$ e imponiendo que para algún $c \in (a, b)$, $D'(c) = 0$, obtenemos:

$$0 = 2\big(f'(c)g(c) + g'(c)f(c)\big) - f'(c)\big(g(a) + g(b)\big) - g'(c)\big(f(a) + f(b)\big)$$

como se quería ver. □

§5. Comentarios finales

En este trabajo hemos hecho un uso extensivo del teorema de Rolle para generalizar los clásicos teoremas del valor medio de las funciones reales de una variable real. En efecto, parece muy natural investigar y preguntarse qué pasaría si se modifican las funciones auxiliares que usualmente se construyen para que cumplan consistentemente con las condiciones del teorema de Rolle (continuidad y que tengan el mismo valor en los extremos de un intervalo) por otras expresiones un poco más generales. Esto nos ha llevado a explorar en primer lugar algunos casos especiales, en los que hemos alterado ligeramente la estructura de estas funciones auxiliares reemplazando en ellas la función f por otras funciones de f como $1/f$ o el logaritmo de f. Hemos visto que se deducían así dos teoremas parecidos al teorema del valor medio de Lagrange. A continuación, presentamos el teorema del valor medio de Lagrange para la función compuesta, que contiene a todos los teoremas anteriores y al propio teorema del valor medio de Lagrange como casos particulares. La misma estrategia hemos visto que puede emplearse con éxito para generalizar el teorema del valor medio de Cauchy.

En definitiva, el contenido de este trabajo puede ser útil para docentes y estudiantes que quieran tener una visión más amplia del tema e ir un poco más allá de los clásicos teoremas del valor medio que se imparten en los cursos introductorios del cálculo diferencial y análisis de una variable. El lector curioso o interesado por profundizar en estas cuestiones tiene a su disposición trabajos académicos como éste (Matkowsky, s.f.), en el que se investigan generalizaciones de los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy con un enfoque distinto al aquí expuesto, en conexión con los distintos promedios existentes, tales como la media geométrica, armónica, logarítmica y exponencial, entre otras.

Bibliografía

Borreguero, M. (2019). *La pregunta que desata el caos en la polémica selectividad valenciana*. Descargado de https://www.lainformacion.com/espana/polemica-examen-matematicas-selectividad-valencia-pregunta-clave/6503199/

la Torre, N. D. (2019). *El acta de la reunión previa a la pau sí recogía el polémico teorema*. Descargado de https://www.elmundo.es/comunidad-valenciana/2019/06/21/5d0bb0ea21efa031608b463f.html

Matkowsky, J. (s.f.). Generalizations of lagrange and cauchy mean-value theorems, volume=XLIII year = 2010. *Demonstratio Mathematica*.

Molins, J. ., y Bautista, J. . (2019). *El coordinador de las pau: el examen de matemáticas no se sale del currículum*. Descargado de https://www.lasprovincias.es/comunitat/coordinador-pau-2019-comunidad-valenciana-examen-matematicas-20190605115559-nt.html

Ginés R. Pérez Teruel
Departamento de Matemáticas, IES Victoria Kent, Elche-03203, Alicante, España
(✉) *gines.landau@gmail.com*

Recibido: *5 de febrero de 2019*.
Aceptado: *13 de noviembre de 2020*.
Publicado en línea: *7 de diciembre de 2020*.