Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática.

Graciela I. Fernández – Liliana M. Gysin
Departamento de Matemática – FCEN - UBA

Resumen

En esta propuesta presentamos algunos resultados de Geometría Proyectiva que consideramos podrían formar parte de la formación de profesores de matemática. La geometría proyectiva resulta una teoría no elemental – como podría serlo la geometría sintética – que, además del valor intrínseco que posee por su desarrollo histórico y la importancia que en ella tienen las demostraciones fuertemente apoyadas en los esquemas, aporta una mirada particular sobre las diferentes geometrías junto con modelos que permiten avanzar, por ejemplo, sobre las geometrías no euclidianas.

Elegimos presentar aquí un recorte de la Geometría Proyectiva en el plano sobre los números reales, sin usar coordenadas, que avanza hasta la obtención de los movimientos rígidos y las homotecias como casos particulares de las colineaciones. Esta propuesta puede incluirse en un curso avanzado de geometría para la formación de profesores de matemática. Fue armada para ser trabajada en grupos de 4 o 5 alumnos, pero consideramos que lo diferente y novedoso del tema, en cuanto a la forma de trabajo y al objeto de estudio en sí, hace necesario un fuerte apoyo de los docentes a lo largo de la resolución de los problemas planteados. La forma de trabajo grupal generará las posibilidades de discusión y re-descubrimiento de las distintas propiedades y aplicaciones que se presentan a lo largo de la propuesta.

Incluimos una breve referencia histórica, porque consideramos que la misma es parte de la formación y además ayuda a los alumnos a ubicarse en el contexto, como se desprende de algunos de los comentarios de los alumnos incluidos en el análisis. El enfoque es geométrico (y no algebraico) ya que se trata de que los alumnos adquieran este tipo de pensamiento como una herramienta para su propio desarrollo.

Fundamentación

A lo largo de los años, la enseñanza de la geometría propiamente dicha ha ido desapareciendo de la escuela. Como dicen Bressan, Bogisic y Crego [2-Introducción]: *"Numerosos trabajos destacan la postergación que sufre esta rama de la matemática en las escuelas, a favor de la enseñanza de otros tópicos de la aritmética en primaria o de la aritmética y del álgebra en secundaria, los cuales ocupan el mayor tiempo de la enseñanza matemática escolar."* Consideran las autoras dos motivos de especial relevancia que dan cuenta de esto, la falta de conciencia de los docentes de los usos y las habilidades que la geometría desarrolla, y la inseguridad que estos poseen "*en el dominio de conceptos y procedimientos de esta rama de la matemática.*"

Estos motivos están íntimamente relacionados con que la geometría fue desapareciendo primero de los cursos de formación docente, en claro paralelismo con la desvalorización disciplinaria que ha sufrido en los niveles más altos de la educación. Dice al respecto Santaló [7-Prólogo]: "*La característica esencial de la matemática del presente siglo ha sido, sin duda, la influencia que ha tenido en todas sus ramas la llamada Algebra Moderna. Toda la matemática se ha algebrizado. La ordenación que el álgebra hizo de las estructuras matemáticas, su nomenclatura y su simbolismo particular han pasado a ser de uso común en toda la matemática. En general, ello ha sido saludable, pues ha contribuido a mantener la unidad conceptual y a sistematizar los conocimientos. La Geometría no ha escapado a esa tendencia uniformadora…. La geometría pura, edificada en base a los métodos clásicos, va perdiendo interés y va desapareciendo de los planes de estudio de cualquier carrera universitaria."*

Actualmente, la geometría proyectiva no forma parte de los programas de la mayoría de las licenciaturas en matemática, y claramente no es parte de ninguna currícula escolar. La pregunta que nos planteamos es entonces, si debe formar parte de la formación de profesores de matemática, y suponiendo que sí, ¿qué temas de geometría proyectiva se deberían enseñar?

Hemos compartido varios cuatrimestres la cátedra de “Geometría” en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Esta materia forma parte del plan de estudios del profesorado, y es una materia optativa en la licenciatura en Ciencias Matemáticas de dicha Facultad. La materia incluye temas como lugares geométricos, construcciones con regla y compás, geometría proyectiva, transformaciones geométricas y algunos resultados sobre topología y geometrías no euclidianas. La inclusión de las unidades de geometría proyectiva y transformaciones geométricas obedece a la intención de acercar a los alumnos a una forma de trabajo diferente, más apoyada en el dibujo, que caracteriza a esta geometría.

Como dicen Rodríguez Sanjurjo y Ruiz Sancho [6] : *“La Geometría Proyectiva ha jugado un papel de primer orden en el proceso general de creación de nuevas ideas y conceptos en matemáticas. Es, por ejemplo, uno de los primeros casos de matemática axiomatizada. También se ha originado aquí la noción de transformación que, a partir de las ideas presentadas por Félix Klein en su Programa de Erlangen, ocupa un lugar central en la construcción de cualquier teoría geométrica. …. Dentro del cuerpo de las matemáticas, la Geometría Proyectiva es a menudo contemplada como un modelo de teoría que, teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones.”*

Desarrollo

Un poco de historia

La geometría proyectiva ha tenido su época de desarrollo en el siglo XIX y a principios del siglo XX, aunque algunos de sus resultados ya eran conocidos desde mucho antes.

Podemos citar, de aproximadamente entre los años 200-400, a **Menelao**, que hace un profundo estudio sobre triángulos esféricos, completado por **Ptolomeo**, quien también desarrolla el estudio de proyecciones para la construcción de cartas geográficas. La época siguiente corresponde a los trabajos de **Diofanto** y **Pappus** El principal problema de Pappus, también conocido como *lugar determinado por 3 o 4 rectas* pide: *dadas 3 rectas de un plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el cuadrado del segmento PA, trazado con un ángulo fijo a una de las rectas, es proporcional al producto de los segmentos PB y PC, trazados a las otras dos con el mismo ángulo*. **Apolonio**, el gran geómetra, ya había estudiado el problema. Pappus prueba que, en todos los casos, el lugar geométrico es una cónica; y extiende el problema a 6 rectas. No puede analizar el problema para 8 rectas, ya que aparecería entonces un producto de 4 segmentos, que no tiene significado geométrico; el de 3 es un volumen. Pappus también trabaja las relaciones entre foco y directriz.

La Geometría Proyectiva reaparece con la mirada propia de los artistas y arquitectos del Renacimiento, quienes en su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de perspectiva (representación bidimensional de objetos tridimensionales), trabajaron sobre conceptos geométricos como secciones y proyecciones: Piero Della Francesca (1410-1492); Leone Battista Alberti (1404-1472); Leonardo Da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471-1528). Alberto **Durero**, pintor, publica un libro llamado "Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas". El libro tiene algunas justificaciones, aunque está pensado esencialmente para artistas. El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva, ya estudiados por ejemplo, por **Leonardo** Da Vinci.

La mirada científica viene de la mano de **Galileo** (1564-1642) que analiza curvas como la cicloide y la catenaria, conjetura acertadamente que el área de la cicloide es el triple de la del círculo que la genera, pero se equivoca al identificar ambas curvas (la cicloide y la catenaria); y de **Kepler** (1571-1630), quien dio su nombre al foco, introduce la idea del principio de continuidad unificado, que permite definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos.

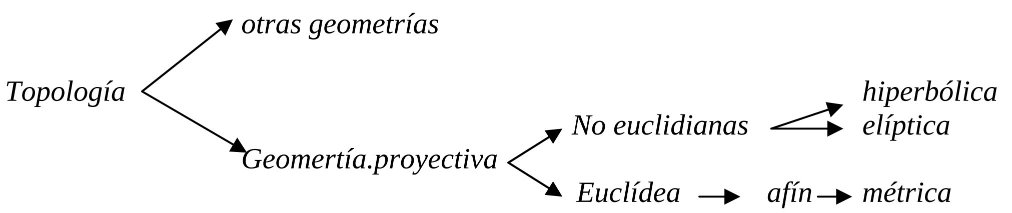
El matemático francés Gérard **Desargues** (1591-1661)), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, introdujo este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración (ahora válidos para todas las cónicas, a diferencia de los griegos que tenían métodos distintos para diferentes casos) generan un avance significativo desde la época de Apolonio. Influidos por él, los desarrollos son continuados por Blaise **Pascal** (1623-1662) y Philippe **de Hire** (1649-1718). Blaise Pascal (1623-1662), publicó a los 16 años su *Ensayo para las cónicas* donde desarrolla el hexagrama místico, hoy conocido como Teorema de Pascal.

Aparece entonces la geometría descriptiva con Gaspard **Mongue** (1746-1818), que trabaja esencialmente en la proyección bidimensional de objetos tridimensionales, y que logra despertar un nuevo interés por la geometría en Francia. Se desarrolla la Geometría Proyectiva con **Carnot** (1785-1823), **Víctor Poncelet** (1778-1867), **Chasles** (1793-1880); que se extiende rápidamente a otros países europeos con **Moebius** (1790-1868), **Steiner** (1790-1863), **Staudt** (1798-1867) y **Cayley** (1821-1895).

Cabe señalar que un estudio sistemático en este sentido recién fue realizado a fines del siglo XVIII, cuando un oficial francés, J.V.Poncelet (1788-1867) escribió su *famoso Traité des propriétés projectives des figures* en 1813, siendo prisionero de guerra en Rusia.

Finalmente, en el siglo XIX, aparecen la geometrías no euclidianas, de la mano de Karl F. **Gauss** (1777-1855), Janos **Bolyai** (1802-1860) y **Lobachevski** (1793-1856) que desarrollaron una geometría en que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a la misma; y **Riemann** (1826-1866) que desarrolla la geometría riemanniana. La prueba de indemostrabilidad del 5to postulado e Euclides recién la lograrán **Beltrami** (1835-1900) y **Klein** (1849-1925).

La idea de clasificar las propiedades geométricas según clases de transformaciones fue propuesta por Felix Klein. Ya Galois (1811-52) había entrevisto la idea de grupo como algo importante en los desarrollos algebraicos, pero la idea de englobar las distintas geometrías usando esta noción fue desarrollada poe Christian Felix Klein (1849-192) en su programa de Erlangen. Para captar la esencia del Programa de Erlangen, pensemos en un proyector de imágenes que puesto en una determinada posición, permite captar una imagen ampliada de la figura original. Si movemos la pantalla, obtendremos deformaciones, pero como siempre transforma rectas en rectas, tendrá invariantes proyectivos (es decir, las transformaciones son colineaciones, que conservan las razones dobles). Se genera así una clasificación de las geometrías que podemos resumir como



En esta línea, utilizando las transformaciones definidas en el plano proyectivo, vemos por ejemplo, que el paralelismo es el invariante que caracteriza a las afinidades, la perpendicularidad a las semejanzas, etc.

<u>I.Geometría Proyectiva en el plano</u>

1. Consideren una recta *r* y un punto O no perteneciente a *r* , en el plano de la geometría elemental. Se define la aplicación que a cada punto P de la recta *r* , le hace corresponder la recta *p* del haz de rectas que pasa por O, que contiene al punto P . Esta aplicación, ¿es una función?¿es inyectiva?¿es suryectiva?

2. Para obtener una correspondencia biunívoca, ampliamos la recta *r* , agregándole un punto Q_∞ que llamamos el punto impropio o punto del infinito de la recta *r* . A esta recta ampliada la llamamos **recta proyectiva** . La aplicación definida como antes, pero ahora desde la recta proyectiva, ¿es biyectiva?

3. Análogamente consideren, en el espacio ordinario, un plano α y un punto O que no pertenezca a α, y hagan corresponder a cada punto M del plano α la recta *m* del haz de rectas que pasa por O que contiene al punto M. ¿Cuáles son las rectas del haz que no se corresponden con ningún punto del plano α?

4. Convengamos en ampliar el plano α con puntos P_∞, Q_∞, ... , uno por cada una de las rectas *p,q,...* del plano β que pasan por O . Estos puntos se llaman **puntos impropios o puntos del infinito del plano α.** Completen los siguientes enunciados para que sean verdaderos:

   a. una recta *r* contenida en α se corresponde con el ……… determinado por ella y el punto O,
   b. un plano determinado que pasa por el punto O y no es β, se corresponde con …..
   c. un punto propio de α, pensado como intersección de dos rectas r y r' , se corresponde con ………..

5. Consideren dos rectas paralelas s y s' de α. Usando los enunciados anteriores, determinen cuál sería la intersección de s con s'.

Observación: en este contexto se dice que "las paralelas se cortan en el infinito". Resulta entonces que el plano β se corresponde con el conjunto de todos los puntos impropios de α, de aquí que a este conjunto se lo denomine la **recta impropia** . El plano euclidiano ampliado con la recta impropia se llama el **plano proyectivo**, y es equivalente al haz de rectas que pasan por un punto del espacio, considerando las rectas del haz como puntos del plano proyectivo, y los planos que pasan por el punto como rectas del plano proyectivo.

6. Tenemos entonces dos maneras de mirar el plano proyectivo:

El plano R^2 agregándole los puntos impropios (uno por cada dirección del plano)

Las rectas de R^3 por el origen como puntos de P_2.

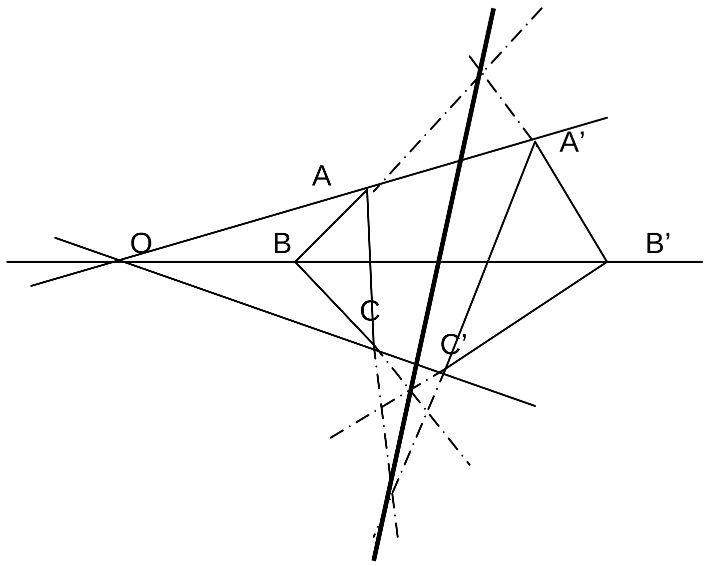
Analicen y demuestren los siguientes resultados usando ambos modelos

a. Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.
b. No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta.
c. Toda recta tiene infinitos puntos.
d. Dos rectas distintas del plano proyectivo siempre tienen un punto común.
e. No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto.
f. Por todo punto del plano proyectivo pasan infinitas rectas.

7. Analicen cuáles de los enunciados valen en el plano de la geometría euclídea y cuáles no.

Observación: El matemático francés Gérard Desargues (1591-1661)), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, introdujo este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración (ahora válidos para todas las cónicas, a diferencia de los griegos que tenían métodos distintos para diferentes casos) generan un avance significativo desde la época de Apolonio. El teorema que lleva su nombre afirma que:

Si dos triángulos están relacionados de modo que las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto, los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta.



8. Enuncien el teorema recíproco, y traten de demostrarlo suponiendo demostrado el teorema.

9. Dadas dos rectas *r* y *r'*, cuya intersección es un punto X que está fuera de la hoja; y un punto P que no pertenece a *r* ni a *r'* , construyan una recta que pase por P y por X.

10. Obtener la recta del ejercicio anterior aplicando el recíproco del resultado usado en 9.

11. Dadas dos rectas r y r' y los puntos: A, B y C de r y A', B' y C' de r' tales que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto O. Prueben que los puntos :

$$P = AB' \cap A'B \qquad Q = BC' \cap B'C$$
$$R = AC' \cap A'C \qquad S = r \cap r'$$
están alineados

Como cierre de este apartado se demostrará en conjunto el teorema de Desargues, sin usar coordenadas, por ejemplo a partir del teorema de Menelao.

II.La razón doble como invariante proyectivo

El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva. La imagen plasmada por un pintor es una proyección del original sobre la tela, con centro en el ojo del artista. En este proceso las longitudes y los ángulos resultan distorsionados de alguna manera que tiene que ver con las posiciones relativas de los objetos. Aun así, la estructura geométrica del original resulta reconocible en la tela. Esto se debe a la existencia de ciertos **invariantes proyectivos**, es decir, propiedades que aparecen sin cambio en la tela y hacen posible la identificación. Es claro que estos invariantes no tienen que ver con longitudes, ángulos o congruencias. Encontrar y analizar estos invariantes es el objeto de este apartado.

1. Consideren dos rectas $r \neq r'$ y un punto O que no pertenezca a ninguna de ellas. La correspondencia (de r en r') que a cada punto A de r le asigna el punto A' de r' tal que O, A, A' estén sobre una misma recta. se llama una **perspectividad de centro O** (también se suele decir que A' es la proyección de A sobre r' desde O).¿es una aplicación biyectiva de r en r'? Analicen cuántos pares de homólogos se necesitan para que quede determinada una perspectividad entre dos rectas.

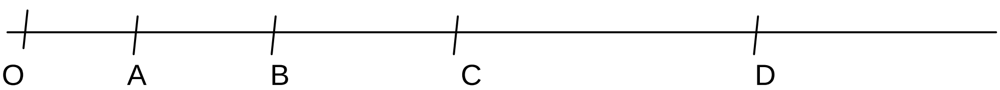
2. Sean A, B, C tres puntos de r y A', B', C' tres puntos de r' . Queremos ver que podemos mandar unos en otros con el producto (o composición) de dos perspectividades. Para ello sean O_1 el punto de intersección de A,A' y B,B' ; O_2 el punto de intersección de A,A' y C,C' ; s la recta determinada por B' y C. Consideremos la perspectividad $\sigma_1 : r \to s$, de centro O_1 ; y la perspectividad $\sigma_2 : s \to r'$, de centro O_2 . Busquen cuál es la composición que manda A, B, C en A', B', C' respectivamente.

Observación: lo que hicimos muestra que no tiene sentido intentar definir un invariante proyectivo con menos de 4 puntos alineados.

3. Discutan la afirmación anterior.

Definición: Dados en cierto orden cuatro puntos A,B,C,D alineados, se llama **razón doble** de los mismos a la expresión

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$



Llamando OA=a, OB=b, OC=c, OD=d, podemos escribir $(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$

4. ¿Cuántas razones dobles se pueden formar con 4 puntos?

5. Se puede verificar que estas toman a lo sumo 6 valores distintos, a saber: ρ, 1/ρ , 1-ρ , (ρ-1)/ ρ , 1/(1-ρ) , ρ/(ρ-1). Para ello verifiquen primero que $(ADBC) = \frac{\rho - 1}{\rho}$, y luego calculen a qué valores corresponden las 24 razones dobles posibles.

Como cierre de este apartado se trabajará en conjunto la ampliación del campo numérico:

Supongamos ahora que tenemos tres puntos A,B,C fijos alineados y X un punto variable sobre la recta que contiene a A,B,C, y observemos cómo varía la razón doble ρ=(ABCX) , según varía X.

Llamando a,b,c,x a las abcisas respectivas, resulta $(ABCX) = \rho = \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{x-a}{x-b}$

Con esto, si $X \neq A$, ρ toma un valor bien determinado, y recíprocamente, para cada valor de ρ, se puede despejar el valor de x . Así resulta X=B sii $\rho=0$, X=C sii $\rho=1$.

Para que la correspondencia entre los valores de ρ y los puntos de la recta sea biunívoca, es necesario asignar un valor a la razón doble cuando X=A . Convenimos en representar este valor por (ABCD) = ∞ . Esto amplía el cuerpo R con un símbolo que no es un elemento del cuerpo, por lo cual no verifica las reglas de las operaciones del mismo, pero que viene a representar el inverso del 0. Para que la relación así definida resulte biunívoca, se conviene en que:

$\infty=0^{-1}$, $0=\infty^{-1}$, $-\infty = \infty$, $\infty + a = \infty$, $\infty - a = \infty$, $b \times \infty = \infty$, $\infty \times \infty = \infty$,

para a,b reales, b no nulo. quedan indeterminadas las operaciones $\infty + \infty$; $\infty - \infty$; $0 \times \infty$.

Con esta convención, decimos que ρ es la **abcisa proyectiva** del punto X en el sistema de coordenadas definido por los puntos A,B,C . Estos son (en función al valor de sus abcisas) respectivamente **el punto impropio, el punto origen y el punto unidad.** En este sistema, asignamos al punto impropio la abcisa ∞.

III.Proyectividades entre rectas y cuaternas armónicas

Definición: Se llama **proyectividad o aplicación proyectiva** de la recta r en la recta r' a toda aplicación biyectiva que conserva las razones dobles.

1. Prueben que una proyectividad entre dos rectas está determinada por tres pares de puntos homólogos.
2. Analicen si las perspectividades son un caso particular de las proyectividades.
3. ¿Es verdad que el punto de intersección de las dos rectas entre las que hay definida una perspectividad es unido para la perspectividad? ¿Por qué? Analicen la validez del recíproco.

Definición: Se dice que cuatro puntos A,B,C,D de una recta forman una **cuaterna armónica** si su razón doble es igual a -1.

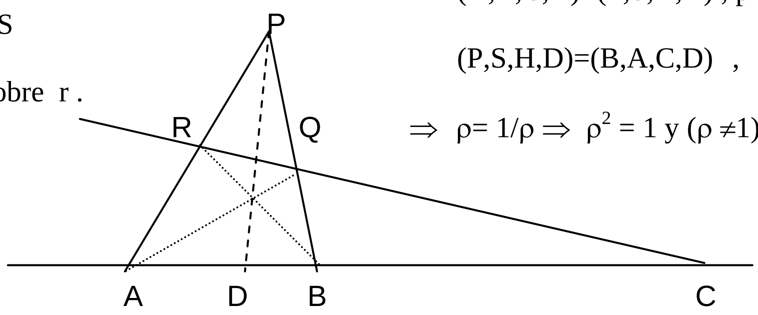
4. Si A,B,C,D es armónica, analicen qué valores pueden tomar las cuaternas que resultan de permutar entre sí los elementos del primer par, los del segundo par, o los dos pares entre sí**.**

Observación: decimos que los puntos **A,B son conjugados armónicos de C,D** (y C,D de A,B).

Luego se trabajará en conjunto la construcción del cuarto armónico: Sean A,B,C tres puntos de una recta r , P un punto que no esté en la recta. Sean Q otro punto de PB, R=CQ $\cap$PA , S=RB $\cap$AQ , D=PS $\cap$r .

(A,B,C,D)=(P,S,H,D) , proyectando desde R sobre PS

(P,S,H,D)=(B,A,C,D) , proyectando desde Q sobre r .



$\Rightarrow$ $\rho= 1/\rho \Rightarrow \rho^2 = 1$ y $(\rho \neq 1) \Rightarrow$ (A,B,C,D)= -1 .

5. Busquen gráficamente el cuarto armónico entre A, B y el impropio de la recta.

Como cierre del apartado se les pedirá a los alumnos que analicen y busquen posibles demostraciones de los siguientes resultados, que luego se discutirán en conjunto:

A) Toda proyectividad es producto de perspectividades

B) **Teorema de Staudt**: En el cuerpo de los números reales, toda aplicación biyectiva de una recta sobre otra que conserve las cuaternas armónicas, es una proyectividad, o sea, conserva la razón doble de cualquier cuaterna.

IV.Transformaciones geométrica:

Definición: Se llama **colineación** de un espacio proyectivo en otro a toda aplicación biyectiva que manda puntos alineados en puntos alineados.

Observación: una colineación manda rectas en rectas e intersecciones de rectas en intersecciones de rectas.

1. Prueben que una colineación conserva cuaternas armónicas cuando va de una recta en otra.
2. Analicen qué aplicación se obtiene cuando restringimos una colineación a un recta (usen el teorema de Staudt)
3. ¿Cuántos puntos (y sus homólogos) determinan una colineación? (observen que los puntos deben estar de a 3 no alineados, lo mismo que sus homólogos)

Definición: Las colineaciones que tienen una recta de puntos unidos (un punto se dice unido si su homólogo es él mismo) se llaman **homologías** . La recta se llama **eje** de la homología.

4. Verifiquen que en una homología las rectas que unen pares de puntos homólogos son rectas unidas y pasan por un mismo punto, llamado centro de la homología
5. El centro de la homología puede o no pertenecer al eje. Si $O \in e$, la homología se llama **elación.** Si no es elación, sean A y A' un par de homólogos, llamando $M = AA' \cap e$, la razón doble (AA'OM) es constante y se llama razón de homología (demostrarlo)
6. Demuestren que en una homología, los puntos en que se cortan rectas homólogas están sobre el eje.
7. Realicen la **construcción** de otros puntos de la homología dada por el centro, el eje y un par de homólogos (usando que P', el homólogo de P , verifica que $P' \varepsilon OP$, y además PA y P'A' se cortan sobre e (siendo A y A' el par de homólogos dados) .
8. Analicen qué se obtiene si restringimos el dominio de una homología a una recta (como hicimos en el 2 con las colineaciones).
9. Dado un cuadrilátero cualquiera, hallar una homología que lo transforme en un paralelogramo.

Observación: En el plano proyectivo todas las rectas son equivalentes (la recta impropia también), ya que cualquier recta puede transformarse en cualquier otra por una colineación. Aquellas propiedades que son invariantes por colineaciones se llaman **propiedades proyectivas** . En ellas la recta impropia no tiene ningún papel especial. Cuando distinguimos la recta impropia de las demás, tenemos las **propiedades afines**.

Definición: Se llama **afinidad** entre dos planos proyectivos a toda colineación que mande la recta impropia en la recta impropia.

Observación: Como las rectas paralelas son las que se cortan sobre la recta impropia, esta definición es equivalente a decir que una afinidad entre dos planos es toda colineación que manda rectas paralelas en rectas paralelas.

10. Prueben que una afinidad entre dos planos queda determinada por tres pares de puntos propios no alineados.

Definición: Se llama **semejanza** entre dos planos proyectivos a toda afinidad que conserve los ángulos.

11. Analicen cómo son, en el sentido de la geometría elemental, un triángulo y su imagen por una semejanza.
12. ¿Se puede mandar uno en otro con una homotecia?¿Cuál es su centro?
13. Verifiquen que si una colineación conserva ángulos rectos es una afinidad.

Se realizará en conjunto la demostración del siguiente enunciado:

Si una colineación transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares, o conserva los ángulos de un cierto valor fijo α, es una semejanza.

14. Verifiquen que si una colineación manda circunferencias en circunferencias, es una semejanza.

Para los siguientes ejercicios consideramos afinidades que son a la vez homologías

15. Prueben que si el eje de la homología no es la recta impropia, y no es una elación, MA'/MA es constante (A y A' un par de homólogos, M = AA' ∩ e).

16. ¿Qué aplicación se obtiene como caso particular si MA'/MA=-1 y el centro (O) es el punto impropio perpendicular al eje e?

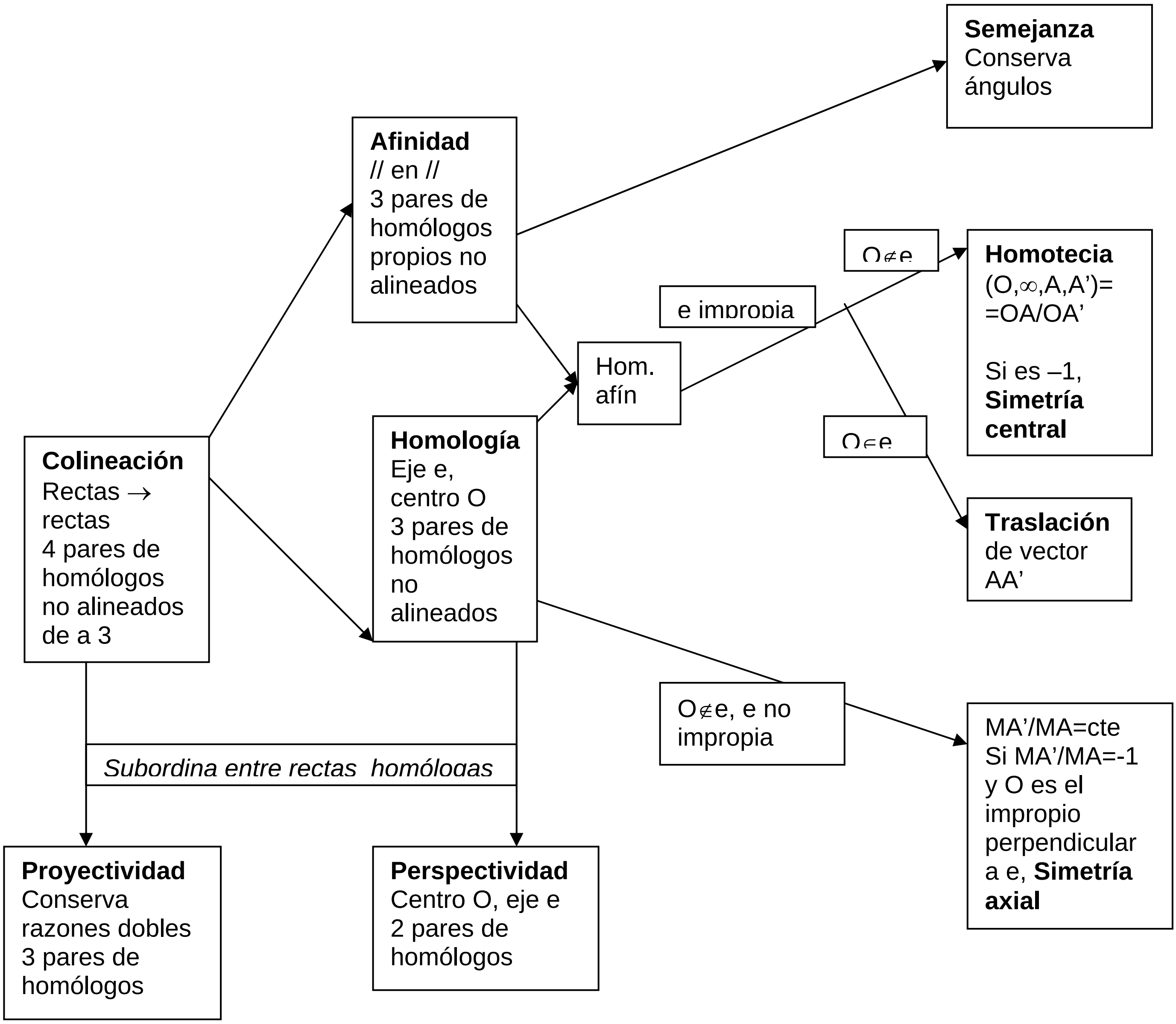
17. ¿Qué aplicación se obtiene como caso particular si el eje de la homología es la recta impropia, y el centro es un punto del eje?

18. ¿Qué aplicación se obtiene como caso particular si el eje de la homología es la recta impropia, y el centro no es un punto del eje, es decir, el centro (O) es un punto propio?

19. ¿Cuál es la razón de la homotecia del ejercicio anterior?

20. ¿ Qué aplicación se obtiene como caso particular del ejercicio anterior si OA/OA' = -1?

Como cierre del apartado se construirá en conjunto con los alumnos el siguiente cuadro:



Análisis

Realizamos en esta propuesta una actividad guiada para que los alumnos trabajen de manera autónoma, con la guía de los docentes. Si bien hemos dictado la materia hasta ahora de una manera más tradicional, y a pesar de las dificultades que el tema presenta para ellos, consideramos que en una aproximación de itipo geométrico, que no incluya el uso de coordenadas, es posible que los alumnos logren elaborar los resultados esperados.

Incluimos aquí algunos comentarios de alumnos que han cursado la materia, respecto de esta unidad, y su utilidad respecto de su futuro trabajo como docentes:

<u>Respecto de la unidad:</u>
- el tema geometría proyectiva fue el que más me gustó, el que me pareció más interesante y el más novedoso de todo el programa. Rompió con las nociones que nos inculcan desde el secundario hasta los primeros años de la carrera. En mi caso, entender la geometría proyectiva (sé que me falta comprender mucho más), me hizo ver un “mundo” nuevo. Me hizo entender que cada modelo tiene sus axiomas y que ellos dependen de los objetivos que se pretenden alcanzar. En este caso particular con el objetivo de obtener aplicaciones biyectivas se define que dos rectas paralelas se cortan en un punto impropio. Lo cual rompió totalmente mis esquemas previos. … Me pareció bien que primero se haya visto el enfoque geométrico y luego el algebraico, el primero es más intuitivo y permite una mejor comprensión por parte del alumno. La presentación me pareció un poco “chocante” para alguien que nunca vio el tema, pero a la vez provocativo, al alumno le dan ganas de introducirse en el tema, de aprender más sobre el.

- la Geometría Proyectiva fue lo que más me costó internalizar y sobre todo aprender. Me llamó la atención la historia que acompaña al nacimiento de la Geometría Proyectiva, la necesidad de artistas y arquitectos del Renacimiento en buscar fundamentos matemáticos para respaldar la teoría de perspectiva. Es acá donde uno ve claramente la utilidad de la matemática no solo en la ciencia sino también en el arte. La búsqueda de “por qué” nos lleva directamente al razonamiento lógico y deductivo de la Matemática.

- el tema de geometría proyectiva, al ser un tema no tan visible como lo es la geometría euclidiana, es más difícil de asimilar. Confunde mucho el hecho de estar hablando de rectas que son puntos, de rectas que se cortan, aunque sea en el infinito, ya que estamos acostumbrados a otra geometría. … En general, me pareció muy adecuado e interesante que se haga una pequeña reseña histórica sobre un tema, antes de empezar con el mismo. Ya que, ayuda mucho saber en qué orden se fueron descubriendo las cosas y como fueron surgiendo las ideas.

- Geometría Proyectiva es complicada. Los conceptos fundamentales no son los usuales para estudiantes muy acostumbrados al enfoque algebraico de la Geometría. Según tengo entendido, existen dos formas distintas de encararla: la sintética y la algebraica. Y considero que ponderar la idea geométrica más intuitiva, por sobre la algebraica es lo más aconsejable en esta materia. Entre otras cosas, porque esta es tal vez la única oportunidad que tienen los estudiantes del profesorado de acceder a este enfoque.

<u>Respecto de su utilidad para su futuro trabajo como docentes:</u>

- Es claro que cuanto más aprendamos sobre Geometría más ricas en contenido serán nuestras futuras clases. Me resultó excelente la introducción histórica que se hizo, no solo en Geometría Proyectiva sino en toda la materia. La necesidad de la Historia de la Matemática es imprescindible para poner en contexto los objetos con los cuales trabajamos y sobre todo para entender mejor y no tomar a la Matemática como una serie de objetos aislados. Es de suma importancia brindar información complementaria de cómo la Geometría nació y se desarrolló y justamente es lo que me hace pensar que en la escuela se podría tener en cuenta la historia ya que seleccionando curiosidades, adivinanzas y problemas podrían despertar el interés de los alumnos y así dejar de lado la idea de los alumnos de que la Matemática es abstracta y sin sentido.

- A pesar de que estos temas no se dictan en la escuela media de manera directa, son necesarios e indispensables para mi formación como docente porque no solo me aportan nuevos conocimientos brindándome un buen nivel académico, sino que también me permiten tener otra visión de la geometría que, más tarde, servirá para darle a mis futuros alumnos un enfoque, sencillo, pero más amplio de temas que estén relacionados con este bloque. Por otro lado, estaré en condiciones de proponer nuevos problemas con el fin de incentivar el pensamiento matemático y la resolución de los mismos aunque éste no sea el objeto de estudio.

- Creo que la Geometría Proyectiva puede ser presentada como un potente instrumento que va más allá de las primeras y fundamentales concepciones geométricas. Por ejemplo: aparece la idea de infinito, y su relación con nuestra cultura eminentemente visual parece evidente (basta pensar que pasamos gran parte del día mirando pantallas, monitores y televisores que nos muestran 'el mundo' en dos dimensiones). Además, esta Geometría nos brinda la excelente posibilidad de relacionarse con disciplinas artísticas en forma inteligente y profunda. Basta citar el caso de la relación con diferentes etapas de la pintura para ver la diferencia que implicaba el conocimiento de la perspectiva. O, para no tomar solamente un ejemplo tan clásico, podríamos referirnos a las técnicas informáticas de movimiento y sombreado que se utilizan en los videojuegos. En conclusión, los conceptos de la Geometría Proyectiva nos permiten ir "más allá", combinando contenidos de disciplinas que a priori parecen alejadas. Y combinándolos en forma tal que el descubrimiento de las relaciones entre ellas tiene niveles de complejidad progresiva; a medida que se avanza, se perciben nuevas relaciones y conexiones intra e interdisciplinarias.

Conclusiones

Si bien la geometría proyectiva no forma parte de la currícula escolar, creemos que provee a los futuros docentes de una herramienta importante para comprender y trabajar con geometría, tal como se desprende de los comentarios de los alumnos incluidos en el análisis. Por otro lado, consideramos que lo diferente y novedoso del tema, en cuanto a la forma de trabajo y al objeto de estudio en sí, hace necesario un fuerte apoyo de los docentes a lo largo de la resolución de los problemas planteados, los que deberán ser resueltos en grupos de 4 o 5 alumnos, generando así las posibilidades de discusión y re-descubrimiento de las distintas propiedades y aplicaciones. El ir construyendo cada uno de los resultados permitirá a los alumnos acceder a una mejor comprensión de los temas propuestos.

Bibliografía

[1] C.Boyer – *Historia de la matemática* – Alianza – Madrid – 1985.

[2]A.M.Bressan, B.Bogisic, K.Crego – Razones para enseñar geometría en la Educación Básica – Novedades Educativas, - Buenos Aires - 2000

[3] R.Courant, H.Robbins - *¿Qué es la matemática?* – Aguilar – Madrid -1955.

[4] H.S.M.Coxeter – *Introduction to Geometry* – J.Wiley – 1961.

[5] H.S.M.Coxeter – Retorno a la geometría - S.L. Greitzer La Tortuga de Aquiles- 1993

[6]J.M.Rodríguez Sanjurjo, J.M.Ruiz Sancho -*Geometría Proyectiva* - Addison Wesley- España - 1998

[7]L.A.Santaló – *Geometría Proyectiva* – Eudeba – Buenos Aires -1955.