ARTICULACION DE REPRESENTACIONES EN ALGEBRA

Autora: Martha Ferrero

RESUMEN

Este trabajo consta de dos partes: en la primera se presentan algunos aspectos del marco teórico del Álgebra Temprana, en particular sobre artículos de Brizuela, Carraher, Kaput, Schliemann y otros, y en la segunda (de investigación) se presenta la descripción y análisis, en base a este marco teórico, de una implementación en clase en un 5º año de una escuela media de Bariloche (Argentina) y de dos entrevistas clínicas posteriores a la clase. El objetivo del trabajo es dar cuenta de distintas representaciones externas utilizadas por los estudiantes en la resolución de una actividad de álgebra. Estamos interesados en prestar especial atención a la articulación que un mismo estudiante hace entre distintas representaciones de una situación, bajo la hipótesis de que una multiplicidad de representaciones ayuda a construir un mejor entendimiento de los conceptos involucrados (Brizuela, 2005; Goldin, 1998).

INTRODUCCION GENERAL

La enseñanza del álgebra en la escolaridad tanto primaria como secundaria, es un tema controversial desde variadas perspectivas: desde la elección del contenido a enseñar, no es fácil decidir cuándo se está haciendo álgebra; en cuanto al razonamiento observable en los alumnos surge la pregunta de cuándo se lo podría calificar de “razonamiento algebraico”; desde la forma de encarar su enseñanza ¿conviene desarrollar en profundidad primero temas de aritmética para luego abordar los contenidos de álgebra o el álgebra debería permearse a lo largo de todo el currículo?; desde la psicología cognitiva, ¿existen restricciones de desarrollo que impidan un tratamiento temprano del álgebra?

Aunque una respuesta muy simplificada a la pregunta ¿qué es el álgebra? como la mencionada por Brizuela y Schliemann (2005): “álgebra es la capacidad de trabajar con reglas sintácticas adecuadas para la resolución de ecuaciones” refleja de manera poco distorsionada lo que efectivamente se realiza en las aulas, no satisface ni a las citadas investigadoras ni a nadie que se preocupe seriamente por la enseñanza del álgebra.

La propuesta que nos acerca el grupo de investigación en Álgebra Temprana (AT) profundiza en la investigación de los aspectos mencionados, y antes de describir la implementación de una actividad en aula siguiendo los lineamientos de este enfoque, (motivo principal de este trabajo) me referiré brevemente a algunas citas de sus publicaciones que permiten vislumbrar aspectos del marco teórico, los cuales muestran un acercamiento al álgebra que parece estar al alcance de los alumnos, inclusive de primaria.

ASPECTOS DEL MARCO TEÓRICO DEL ALGEBRA TEMPRANA

- ¿Cómo es el álgebra que proponen aprender en las actividades de AT?

Somos de la opinión de que el centro de razonamiento algebraico se compone de procesos de simbolización complejos que sirven al propósito de la generalización y al razonamiento con generalizaciones. (Kaput, 2008, pg 9)

Una premisa de la investigación en Álgebra Temprana es que la aritmética y, más generalmente, las matemáticas de los primeros años, han sido encaradas de maneras que deslucen la generalidad. Los partidarios del Álgebra Temprana cuestionan si esto debe ser así necesariamente. Ellos argumentan que los chicos son capaces de pensar sobre estructuras y relaciones aún antes de que haya habido enseñanza sobre el uso de símbolos literales. (Kaput, Carraher y Blanton, 2008, A Skeptic`s Guide)

…la generalización late en el corazón del razonamiento algebraico, las operaciones aritméticas pueden ser vistas como funciones, y la notación algebraica puede prestar soporte al razonamiento matemático aún en los jóvenes estudiantes. Nos enfocamos en el álgebra como

aritmética generalizada de números y cantidades en la cual el concepto de función asume un rol primario. (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2006, pg 88)

- ¿Qué se tiene en cuenta al diseñar las intervenciones de enseñanza?

*1) **AT se construye sobre un soporte contextual de problemas:** La idea de que los contextos de problemas ricos pueden sostener la introducción del álgebra podría parecer que socava el objetivo de llevar a los estudiantes al uso de notación formal sin tener que "traducir" el significado de los contextos cotidianos... La justificación de construir sobre problemas en contexto se sostiene en cómo aprenden muchos estudiantes jóvenes (y muchos adultos). Ellos no sacan conclusiones aisladamente a través de la lógica y las reglas sintácticas. En lugar de eso, usan una mezcla de intuición, creencias y hechos presuntos aparejados con razonamiento de causas y argumentación... Comenzando con problemas y situaciones en contexto ricos, uno espera que en algún punto los estudiantes sean capaces de derivar conclusiones directamente desde un sistema escrito de ecuaciones o de un gráfico x-y dibujado en un plano. ¿Pero qué nos asegura que siempre se llegue a ese punto? Aquí es dónde el rol del profesor puede ser decisivo.*

*2) **En el álgebra temprana la notación formal es introducida sólo gradualmente:** Los estudiantes jóvenes no reinventarán el álgebra por sí mismos, y sin un cierto grado de guía no serán capaces de expresar la necesidad de una notación escrita para variables. Las expresiones algebraicas necesitan ser introducidas, pero introducidas juiciosamente, de manera de evitar "formalización prematura" (Piaget, 1964). Los maestros necesitan introducir los términos no familiares, las representaciones y técnicas, a pesar de la ironía de que los estudiantes que se inician no entenderán las cosas que pretendemos. La reticencia inicial a la presentación de una nueva representación debería gradualmente desaparecer, especialmente si los maestros están atentos a escuchar las interpretaciones de los estudiantes y les dan oportunidades para expandir y ajustar su entendimientos.*

3) ***AT entrelaza fuertemente los temas existentes de la matemática temprana...*** *El álgebra reside calladamente en el currículo de la matemática temprana- en problemas de palabras, en contenidos (adición, sustracción, multiplicación, división, razones y proporciones, números racionales, medidas) y en sistemas representacionales (rectas numéricas y gráficos, tablas, notación aritmética escrita y estructuras explicatorias). Los maestros ayudan a que emerja,…, el carácter algebraico de las matemáticas elementales.* (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008, pgs 236, 237)

- ¿Qué resultados se muestran promisorios a la fecha?

La investigación está gradualmente proveyendo un sentido de las capacidades de los jóvenes estudiantes y de la viabilidad de diferentes enfoques del Álgebra Temprana y de las necesidades de los maestros para implementar actividades exitosas de Álgebra Temprana. Las novedades son generalmente más alentadoras que los hallazgos de hace dos décadas, cuando los estudios parecían sugerir que el álgebra es inherentemente demasiado difícil para muchos adolescentes. Además, hay un creciente reconocimiento de que el Álgebra Temprana no es simplemente un subconjunto del plan de estudios de la Escuela Superior (High School); sino más bien es un rico subdominio de la educación matemática en el cual temas y cuestiones especiales son el foco de investigación y enseñanza. Más aún, este campo tiene ahora un mejor entendimiento de cómo las representaciones y las situaciones juegan un papel importante en la comprensión matemática de los estudiantes. (Carraher y Schliemann, 2007, pg 673)

IMPLEMENTACION DE UNA ACTIVIDAD DE ALGEBRA TEMPRANA

DESCRIPCION GENERAL

Este estudio exploratorio se llevó a cabo en la escuela media CEM 46 de la localidad de San Carlos de Bariloche, en un curso de quinto año con 30 alumnos participantes, en abril de 2009.

Se planificaron dos encuentros, uno en el marco de una clase, con todos los estudiantes, y una instancia posterior de entrevista con la modalidad de parejas, a cuatro alumnos seleccionados luego de la intervención en el aula.

La tarea propuesta a los estudiantes es un problema que involucra contenidos de álgebra (en particular funciones y variables) y se les ha pedido que vayan contestando las preguntas que se les realizan y consignen sus respuestas y procedimientos en papel.

Los datos a procesar provienen de material escrito por los alumnos, de grabaciones de audio en ambos encuentros, fotografía digital en el aula y grabación audiovisual en las entrevistas. Para posteriores referencias utilizaremos las siguientes siglas AC=Audio de la clase, ME=material escrito, VD=entrevista realizada a Valeria y Damián (consta de tres transcripciones VD1, VD2 y VD3), BS=entrevista realizada a Belén y Sonia (BS1 y BS2).

La docente a cargo del curso (Marcela Cifuentes) forma parte del grupo de investigación y asume el rol conductor en la clase, mientras que el resto de las investigadoras (María Teresa Juan, Liliana Siñeriz, Martha Ferrero) se posicionan como observadoras en el primer encuentro. Las entrevistas se realizan dos días después de la clase y son conducidas por María Teresa Juan y Martha Ferrero.

Durante la implementación en clase se entregaron dos partes de una actividad a los alumnos, que trabajaron en pequeños grupos. Se realizó la puesta en común de la primera parte y no se llegó a concluir la correspondiente a la segunda. El clima en que se desarrolló la implementación fue de trabajo y compromiso con la tarea (29 de los 30 alumnos presentes entregaron material escrito y las puestas en común tuvieron un alto grado de participación).

OBJETIVOS

- Describir algunas estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver la tarea planteada en las que se revelen características de "razonamiento algebraico" según el marco teórico del Algebra Temprana.

- Analizar la articulación (o falta de ella) entre distintas representaciones utilizadas por los estudiantes en la resolución de la tarea.

- Indagar en las concepciones de los estudiantes acerca de la continuidad de las variables involucradas en el problema dado.

ACERCA DE LAS REPRESENTACIONES

Cualquier expresión de ideas matemáticas, pero especialmente aquellas que son observables por otros y no meramente privadas y mentales, es lo que se denomina representación externa (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008, p. 237). Las representaciones externas pueden ser convencionales o no. Las representaciones matemáticas convencionales no se restringen únicamente a la notación algebraica, dado que la matemática se sirve también de otros sistemas de representación como tablas, gráficos y estructuras lingüísticas especializadas (Carraher y Schliemann, 2008, p. 674), a los cuales los alumnos deberían tener acceso.
En el enfoque de Algebra Temprana se diferencia entre un uso "estrecho" y un uso "amplio" de las representaciones simbólicas en la enseñanza (Carraher y Schliemann, 2008, pp. 672-673). Podríamos simplificar la explicación diciendo que el uso "estrecho" se refiere al uso de literales (letras como incógnitas o variables) mientras que el uso "amplio" incluye las expresiones verbales, tablas y gráficos. Ambos usos son necesarios para lograr un aprendizaje efectivo del Álgebra, y el maestro juega un rol esencial en la introducción de notación y simbolización.
Además, es importante remarcar que dentro del marco teórico que estamos considerando, "Los investigadores de AT tienden a tener una visión amplia del razonamiento simbólico. Para ellos el razonamiento simbólico incluye pero no se restringe solo al razonamiento con simbología algebraica. […] …de hecho el lenguaje natural sirve típicamente como un importante punto de partida para que los chicos aprendan álgebra porque les permite dar sentido y descubrir conceptos algebraicos usando el lenguaje conocido. […]…los investigadores en AT a veces introducen la simbología algebraica solamente después de que los estudiantes están cómodos en el uso de otro sistema de representación. Donde algunos expertos podrían ver una falla o pensar

que hay una equivocación, el objetivo subyacente del AT es que los chicos aprendan a ver y expresar generalizaciones en matemáticas.” (Kaput, Carraher y Blanton, 2008, pg XX)

INSTRUMENTO

Se propuso una actividad en contexto para la comparación de funciones, seleccionada y modificada de la página web http://earlyalgebra.terc.edu **(Lesson 5-16, “Varying Rates of Change”)**.

En cuanto a la elección de una actividad cuyo contenido es de funciones, podría objetarse a priori cuánta álgebra es necesaria para resolverla. Al respecto volvemos a mencionar que en el enfoque de AT “La investigación en Educación Matemática ha mostrado la importancia de una perspectiva funcional en la enseñanza del álgebra. Un acercamiento funcional se establece en contraste a la perspectiva en que se enfoca la manipulación simbólica de ecuaciones, conocida como enfoque ecuacional. El concepto de función puede facilitar la introducción del álgebra a través del uso de formas diferentes de representar funciones: notación algebraica, tablas funcionales, y gráficos en coordenadas cartesianas. Además, una introducción temprana de una perspectiva funcional puede sustentar una apropiación profunda del concepto de función, central en el campo de las matemáticas. Desde una perspectiva funcional, las funciones incluyen a las ecuaciones como un elemento más de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.” (Martínez y Brizuela, 2006, pg 285)

Actividad propuesta

- Enunciado Entrega 1

La abuela de Matías le ofrece que elija entre dos opciones:

a. *Darle $ 5 por semana.*
b. *Darle la primera semana $1; la segunda semana $ 2; la tercera semana $ 3 y así sucesivamente.*

1. ¿Cuánto dinero acumulará con cada uno de las opciones en 5 semanas? ¿Y en 10 semanas?
2. ¿Qué opción le conviene a Matías? Mostrar que esa elección es la mejor.
3. ¿Hay algún momento en el cual es lo mismo elegir cualquiera de las opciones?

- Enunciado Entrega 2

4. ¿Cuánto tiempo le llevará con cada trato juntar $ 100? Explica tu respuesta.
5. ¿Cuál es la ganancia de Matías entre la tercera y séptima semana? ¿Y entre la semana 12 y la 16?
6. Representa gráficamente la relación entre el tiempo y el monto acumulado en cada uno de los tratos.

DESCRIPCION Y ANALISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

Luego de la implementación en aula y a partir de los datos recogidos, tomamos algunos aspectos que llamaron nuestra atención para ser analizados dentro del marco teórico del Álgebra Temprana, haciendo la salvedad de que para nuestros alumnos esta actividad representa un episodio aislado de instrucción y que son mayores en edad que los sujetos del estudio longitudinal de referencia llevado a cabo en Boston por investigadores de AT.

Dificultades matemáticas asociadas a la situación y su evidencia en las representaciones

Durante la clase una alumna menciona que “en el trato que le van dando cada vez un peso más entonces a la décima semana le da 46 pesos…” (AC) agregando 1 al monto acumulado en lugar de incrementar el importe a cobrar semana a semana. Una propia compañera de grupo le hace ver que en la semana 10 le dan $10 y va a tener $55 acumulados[1].

---

[1] $55=$45+$10, lo acumulado en la semana 9 más el importe correspondiente a la semana 10.

Esta confusión se explica en que la situación presentada tiene 4 funciones base[2] en juego: los incrementos (más implícitamente) y los montos acumulados (sobre las que se pide la explicitación, y que denominamos “opción a” y “opción b”). Las segundas coinciden en la semana 9 y las primeras en la semana 5 (como los alumnos nos lo hicieron notar en el material escrito, donde 6 de las 29 respuestas consignan coincidencia entre opciones tanto en la quinta semana, lo cobrado ese día, como en la novena semana, donde los montos acumulados son lo mismo).

Los incrementos son: constante (“tarifa plana” VD1) y lineal (“importe proporcional al tiempo transcurrido” BS1). Los montos acumulados son (en correspondencia respectiva con los anteriores): lineal (monto proporcional al tiempo transcurrido, “y = x.5” Valeria ME) y cuadrático (“la segunda no tenemos la pendiente, es parábola” BS1).

Otra dificultad digna de mención sobre el contenido matemático del problema tiene que ver con la continuidad de las variables involucradas. El tiempo transcurrido (variable independiente, perteneciente al dominio de cada función) podría ser tratado, a elección de quien interpreta la situación, como continuo o como discreto (semana a semana), el monto acumulado (variable dependiente, perteneciente al rango o imagen de cada función) es discreto (Matías recibe dinero una sola vez a la semana).

Como nos indican Selden y Selden (1992, p. 11), citando resultados de las investigaciones de Schwingendorf et al., “Dominio y rango se presentan como conceptos difíciles para casi todos los estudiantes”. Se nos ocurre que una posible explicación se basa en la manera usual de enseñanza de las funciones en que se suele dar mayor prioridad a la relación entre las variables (regla de asignación) relegando el estudio de la naturaleza de los elementos de los conjuntos que se relacionan (dominio-rango).

Los episodios referidos a la continuidad de las variables son dos:

- con la pregunta 4, se produce conflicto cuando lo requerido era que el monto acumulado sea $100. Muchos resistieron la idea de que en la opción b había que esperar a la semana 14 donde se acumulaban $105 en lugar de “100 clavado” (BS1), o expresando por ejemplo

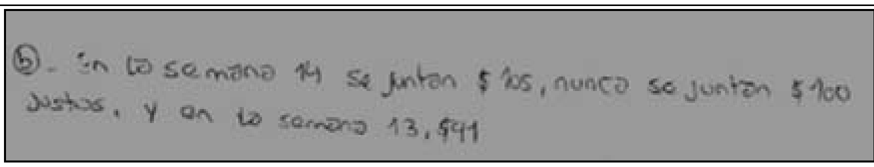

FIG 1
Expresión del conflicto en las variables del rango (ME)

- en los gráficos realizados, que nos muestran curvas continuas, lo cual como era esperable, no produce conflicto a los estudiantes pero es un punto considerado clave por las investigadoras.

En el primer caso, los cuestionamientos parecieron pasar más por una ruptura del contrato didáctico (les propusimos algo que no se podía hacer) o por un error en las cuentas (como manifiesta Sonia en la posterior entrevista) que por lograr un entendimiento de las variables teniendo en cuenta el contexto propuesto. Veamos al respecto una transcripción de la entrevista a Belén y Sonia (BS1):

[2] En esta discusión utilizamos la denominación convencional para funciones con dominio y rango en los reales, y por eso nos referimos a funciones base, que pueden entenderse como modelizaciones continuas de las funciones escalonadas que representan más fielmente la situación. Las fórmulas correspondientes a los montos acumulados “opción a” y “opción b” son respectivamente $a(x)=5x$ y $b(x)=½(x^2+x)$.

Sonia: Ya sabíamos, habíamos calculado que a los 10 te daba 55 y ahí la seguimos sumando hasta llegar a 100.
Mayte: Eso con la opción b.
Belén y Sonia: Si.
Mayte: Y ¿en 13 semanas llegaban a 100?
Belén: No, un poquito más era, me parece.
Sonia: No sé, pensamos que nos salió mal la cuenta, ¿viste? Cualquier cosa… Los demás decían 14 o 15.
Belén: Nunca ibas a llegar así clavado.
Sonia: Aproximadamente.
Martha: ¿Y eso les trajo algún conflicto? ¿Que no lleguen a 100 clavados en la segunda opción?
Belén: Calculamos y no
Martha: Si uds. estuvieran en la situación de Matías y en vez de 100 consiguen 105, ¿les molesta mucho?
Sonia: No, para nada.
Belén: Bueno, normal.

Como reflexión, notemos que el contexto funciona como apoyo al entendimiento de esta situación puntual y que de alguna manera "salva" el contrato didáctico, al menos en apariencia, dado que no se hicieron referencias explícitas a la continuidad. Dicha cuestión sí fue abordada desde los gráficos.

Pasemos entonces a analizar el segundo punto mencionado, el tratamiento de las variables en los gráficos realizados. Este punto fue trabajado con profundidad en las entrevistas y por tanto los gráficos que compararemos son de sólo dos de los entrevistados (en clase y durante la entrevista).[3]

Belén y Sonia

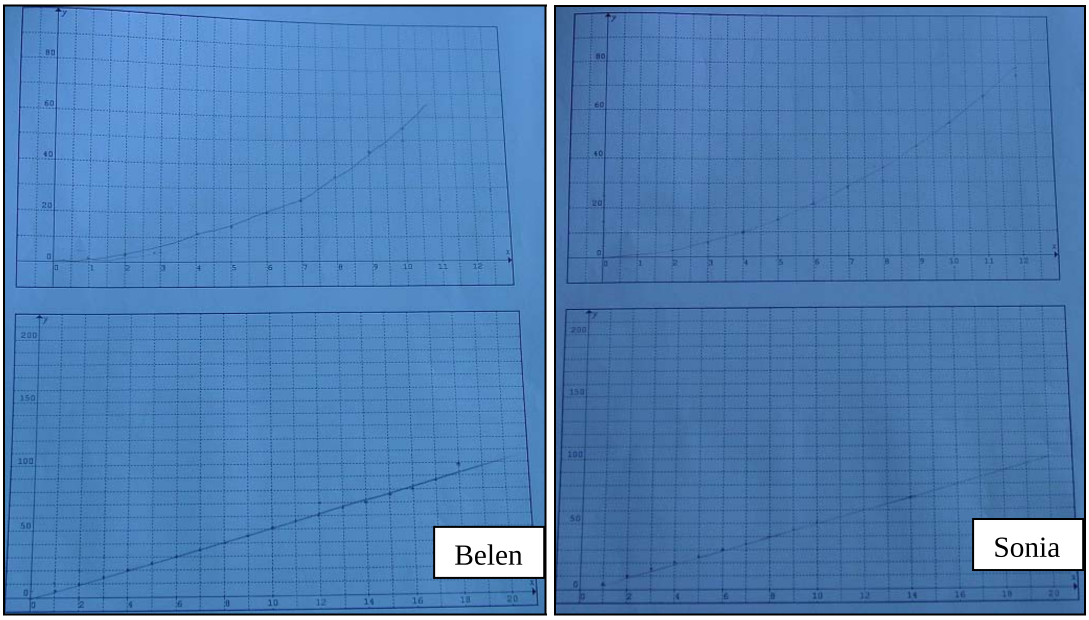

FIG 2
Gráficos realizados en clase (ME)

[3] Por cuestiones de longitud, no hemos incorporado observaciones valiosas sobre lo realizado por Valeria y Damián.

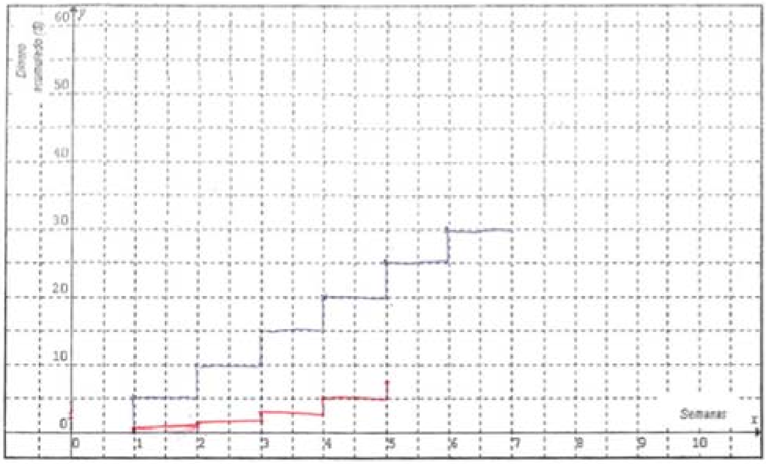

FIG 3
Gráfico realizado en la entrevista (ME-BS2)

En el primer intento, durante la clase, el trazado de las curvas fue continuo, aunque con los puntos destacados.

El gráfico posterior a la intervención (ver FIG 3), donde la comprensión del hecho de que el cobro se realiza una vez a la semana, es una modificación profunda del anterior y en el caso de Sonia trae a la luz una interesante concepción que sostiene sobre el concepto de función.

La interpretación que se solicita refleja la articulación entre la situación (enunciado escrito) y su representación gráfica, además de profundizar en el reconocimiento visual de un gráfico correspondiente a una función (test de la línea vertical) realizado sobre el gráfico de la FIG 3 producido por los propios estudiantes.

Las transcripciones de la entrevista nos permiten completar el panorama, mostrando la intervención que da lugar al conflicto y las respuestas que sostuvieron las entrevistadas.

> (BS1) Mayte: Este puntito que marcaron acá por ejemplo, qué significa, si yo tengo ese puntito.
> Sonia: Que a las cuantas semanas iba a tener 10$.
> Mayte: ¿Qué significa este puntito que está acá?, porque Uds. graficaron todos los puntitos.
> Belén: Entre la 3 y la 4.
> Mayte: Entre la semana 3 y la 4, ¿qué?
> Sonia: No iba a recibir.
> Mayte: Entonces qué significa este puntito que está ahí.
> Sonia: No sé. No es... Entonces no es una lineal.
> Mayte: Habías dicho que era una parábola.
> Belén: Pero no puede ser. Entre semanas no recibía nada. O sea, esta es la cantidad de plata que tiene el chico entre semanas.
> Martha: Ese punto que estoy marcando… Mayte ahí, es parte…
> Sonia: El punto es como que recibió.
> Martha: ¿Es la opción o no es parte de la opción?
> Belén: O sea, la línea está entre punto y punto para mí es la plata que va teniendo durante la semana.
> Mayte: Y durante la tercera y la cuarta, ¿cambia la cantidad de plata que tiene?
> Sonia: No. Es como…, va a seguir teniendo 3.
> Mayte: Claro, o sea…
> Martha: Esto teníamos para que hagan (ejes cartesianos en blanco)
> Mayte: Si lo tuvieras que rehacer, ¿cómo lo harían?
> Belén: Pero podemos…
> Sonia: Tipo, llega el día y aumenta, llega el día y aumenta.
> […]

Sonia: Pero, no sería fórmula entonces tampoco, no sería la parábola. Porque si en la parábola fuese así,
Belén: No, yo creo que no es.
Sonia: ese sí pero ese como…
Martha: Bien.
Belén: Porque entre coso y coso no puede ser porque no gana plata
Sonia: es tipo una escalera, cuando llega el día y ahí aumenta, llega el día y ahí aumenta
Martha: ¿Cómo lo harías acá?
Belén: Justo era, claro.
Sonia: El primer día
Martha: La primer semana, estás haciendo con la segunda opción, no?
Sonia: Si
Belén: Queda así: TAC-TAC.

La gráfica producida por Belén con anuencia de Sonia, efectivamente parece una escalera (ver FIG 4) y en palabras de Sonia ya "no es una parábola". Esto nos muestra una articulación de representaciones entre "fórmula-gráfico" que la entrevistada realiza.

La comparación de las pendientes no había dado resultados fructíferos (en 00:10:30 BS1 Sonia expresa: *No puede tener como una pendiente exacta, ¿entendés? Después nos dimos cuenta de que no le podíamos encontrar la pendiente*.); y la nueva representación les permite considerar la altura de los escalones, realizando la conexión que les permite fundamentar cuál es la mejor opción, como vemos en el siguiente diálogo:

(BS2) Belén: Y por eso, ésta es la explicación de por qué conviene, que llega un punto que conviene, que él reciba 1$, 2$, 3$ después de llegar a 10. Los escalones van a ser así y en la otra son así.
Mayte: Van a seguir siendo iguales.
Belén: Claro.
Sonia: Y el otro va a quedar más alto y el otro va a seguir…

Sin embargo, en este punto, una de las investigadoras les hace notar que habían dibujado "las subidas" en la escalera y que eso no se correspondía con la idea matemática de función. Como respuesta, Sonia nos sorprende con su percepción de que las subidas expresan la dependencia de una instancia respecto de la anterior. Nos preguntamos si esto tiene que ver con que la opción b se puede expresar recursivamente:

La definición (recursiva) de la función contiene: (a) un predicado que fija el valor de f(x) en x = 0; y (b) un predicado que describe como se obtiene el valor de cualquier f(x+1) a partir de su predecesor f(x). [Carraher y Scliemann, 2008, pg 697].

En nuestro caso, la opción b discretizada, se determina mediante las reglas: $n \in N_0$, $f(0) = 0$ y $f(n+1) = f(n)+(n+1)$. Esta relación entre valores consecutivos de la variable tiempo discretizada, no ha sido expresado por Sonia en ningún momento de la entrevista ni en el trabajo escrito, pero podemos conjeturar que ha permanecido latente hasta ese momento. En sus propias palabras, Sonia nos refiere:

Sonia: Si, lo único que como que en este si ves (señalando la gráfica escalonada) va incluyendo lo anterior porque sino no estaría aumentando, no sería sólo lo del día.

Según nuestra interpretación, Sonia ha conectado los puntos final de un intervalo con inicial del intervalo superior siguiente porque de alguna manera quiere representar el nexo entre la forma de calcular y el gráfico. Ante la intervención de las investigadoras, acepta que no es una representación convencional de una función.

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Mostramos una función del contexto del problema que no figura en la bibliografía consultada, puesto que la consideración del contexto permitió dar sentido a la pregunta 4 de la actividad.

El trazado continuo de los gráficos sí había sido una posibilidad tenida en cuenta, en particular porque el método gráfico era útil para hallar la intersección de las funciones que hemos llamado "base", aunque no se correspondieran fielmente con el contexto utilizado (entrega de dinero, una vez a la semana) y aunque en la puesta en práctica tampoco fue una estrategia utilizada espontáneamente por los alumnos. Esto nos lleva a reflexionar sobre la relación entre el uso de contextos en la enseñanza y el uso de modelos en matemática (donde muchas veces una variable discreta se toma como continua), sobre todo teniendo en cuenta lo que queremos que nuestros alumnos aprendan (en este caso la controversia estaría entre si nos interesa la intersección de funciones o si nos interesa indagar sobre la continuidad) y para posteriores estudios tomaremos en consideración las concesiones de lo real que hacemos en favor de la solución y/o representación del problema y el grado de explicitación más adecuado al grupo de estudiantes destinatario.

En el trabajo presente, hemos relegado las descripciones sobre el uso que hicieron de las expresiones literales, puesto que era bastante confuso, pobre y falto de conexiones completas con otros conceptos de la matemática, y nos hemos centrado en el uso amplio de las representaciones de los estudiantes, mostrando la amplitud y variedad de verbalizaciones y gráficos, dando cuenta de interpretaciones y conexiones locales que se dieron en el marco del problema dado. En particular, dimos cuenta específicamente de dos momentos en que se produjo articulación de representaciones "situación-gráfico" y "fórmula-gráfico" y ambas producen un cambio importante en la interpretación matemática de la actividad propuesta.

La implementación de esta actividad en aula revela un acercamiento de estos estudiantes al Álgebra a partir de la búsqueda de generalidades, pero notamos la falta de notaciones adecuadas que ayuden a la evolución del pensamiento. Coincidimos con los investigadores del marco teórico AT en sostener que tanto el uso estrecho como el uso amplio de las representaciones deben desarrollarse mediante instrucción para lograr mejores resultados.

BIBLIOGRAFIA

Brizuela, B.M. (2005) Relaciones entre representaciones: el caso de Jennifer, Nathan y Jeffrey. In B. Brizuela y M. Alvarado (Eds.) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia.* Paidos Educador.

Brizuela, B.M. y Scliemann, A.D. (2008) *Alumnos de diez años de edad resolviendo ecuaciones lineales.* Enseñar Matemática, No 5

Carraher, D.W. ySchliemann, A.D. (2007) Early Algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. y Schwartz, J.L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Karraher y M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. y Brizuela, M.B. (2006). *Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37, No. 2, 87-115

Goldin, G.A (1998) *Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics.* Journal of Mathematical Behavior, No. 17 (2), 137-165

Kaput, J., Carraher, D.W. y Blanton, M.L. (2008). A Skeptic`s Guide. In J. Kaput, D. Karraher y M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J., (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Karraher y M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Martinez, M. y Brizuela, B. (2006) *A third grader's way of thinking about linear function tables.* Journal of Mathematical Behavior, No. 25, 285-298

Selden, A. y Selden, J (1992) Research Perspectives on Conceptions of Function. Summary and Overview. In G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function*. Vol. 25. MAA Notes.