Título: **El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes de primer año de ingeniería**

Autores: Prof. Alurralde Florencia; Mg. Ibarra Lidia

Institución: C.I.U.N.Sa (Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta) Republica Argentina
Dirección: Av. Bolivia 5150. Fac. de Cs. Exactas. Universidad Nacional de Salta

Correo electrónico: falurral@unsa.edu.ar o ibarra@unsa.edu.ar

Palabras Claves: incógnita, parámetro, número general, variable

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se inscribe dentro del Proyecto de Investigación Nº 1494 del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa) y como parte inicial del trabajo de tesis de maestría, en el marco de la Dialéctica instrumento - objeto (Douady, 1986) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 1992).
El Algebra es una materia de gran importancia ya que debería servir para modelizar sistemas matemáticos y extramatemáticos. A pesar del tiempo dedicado en el nivel medio a temas de álgebra, como ecuaciones y sistemas de ecuaciones, los alumnos que ingresan a la Universidad tienen dificultades en utilizar el álgebra como herramienta que hace posible resolver nuevos problemas.
En el presente trabajo se pretende hacer un análisis de la producción de los estudiantes en la primera evaluación que se realiza en Algebra Lineal y Geometría Analítica de primer año de la carrera ingeniería en la universidad con el objetivo de identificar las herramientas algebraicas que utilizan en la resolución de los problemas propuestos respecto al uso de las letras en sus diversas formas:

- **como incógnita**: cuyo valor puede determinarse con exactitud, considerando las restricciones propias del problema
- **como número general**: cuando aparece en generalizaciones y en métodos generales.
- **como parámetro**: entendido como objeto matemático conocido que se manipula como desconocido
- **como variable en relación funcional:** entendido como objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En el marco de la Didáctica Fundamental, y como consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica, surgió el enfoque antropológico en Didáctica de las matemáticas (Chevallard 1992). En este enfoque la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana junto a las demás, y no considerarla solo como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.

El enfoque antropológico precisará explicitar un **modelo general de las matemáticas institucionales** que incluya la matemática escolar como un caso particular y de un **modelo de las actividades matemáticas institucionales** que incluya la enseñanza- aprendizaje escolar de las matemáticas como una actividad matemática institucional particular.

En este enfoque se modeliza la matemática institucional mediante la noción de obra (o praxeología matemática) y las actividades matemáticas institucionales mediante la noción de proceso de estudio de una obra matemática en el seno de una institución (o praxeología didáctica) .

Las actividades matemáticas institucionales son el objeto primario de investigación, o sea que deben ser analizadas, interpretadas, cuestionadas, problematizadas y en definitiva, modelizadas por la Didáctica.

Una obra matemática surge siempre como respuesta a una cuestión que da lugar a diferentes tipos de problemas.
Una obra está constituida por 4 componentes:

1) tipos de problemas
2) técnicas
3) tecnologías
4) teorías

Se llama **praxis** a la práctica matemática (tareas y técnicas) y **logos** al discurso razonado sobre dicha práctica (tecnologías y teorías).
Estas dos caras de la actividad matemática constituyen la **"praxeología matemática"** (Chevallard, Bosch, Gascon , 1997).
La actividad de estudio puede ser considerada como emergente de una obra (situación problemática que plantea la obra) pero también debe ser productora de saber matemático, o sea de otras obras matemáticas.
Las obras matemáticas son el objeto y a la vez el producto de la actividad de estudio.
Chevallard considera que el sistema de tareas central de las prácticas docentes del profesor de matemáticas se puede organizar en dos grandes categorías mutuamente dependientes.
La primera categoría tiene en cuenta las tareas relativas a la concepción y organización de los dispositivos de estudio, y a la gestión de sus respectivos entornos.
La segunda contempla las tareas de ayuda al estudio, en particular, de dirección de estudio y de enseñanza.
En una institución docente concreta y un proceso de estudio de una organización matemática (o praxeología) determinada (OM), la realización de cada una de estas tareas supone la activación de distintos tipos de técnicas didácticas así como la elaboración de discursos tecnológicos – teóricos supuestamente adecuados para el desarrollo de la actividad.
Por lo tanto una de las primeras cuestiones que el profesor debe encarar es la de reconstruir las organizaciones matemáticas escolares que aparecen propuestas en los programas oficiales y en los manuales para ser enseñadas.
Chevallard (2.002) postula que las praxeologías didácticas comportan múltiples niveles de especificación, que comienza en el nivel más genérico (nivel pedagógico), común al estudio escolar de cualquier tipo de organización, continúan con un segundo nivel (nivel disciplinar) común a todas las praxeologías didácticas relativas a las matemáticas y siguen después en un orden creciente de especificidad hasta llegar al estudio de las OM puntuales.

Las OM puntuales son aquellas que se construyen alrededor de un único tipo de tareas, las OM locales están formadas por una articulación de OM puntuales alrededor de un discurso tecnológico común, que a su vez se puede articular entre si formando una OM regional con una teoría compartida.

Siguiendo a Chevallard (1989,1990) interpretamos la actividad algebraica esencialmente como instrumento de modelización de sistemas matemáticos, designado como el *proceso de algebrización de organizaciones matemáticas* (Bolea, Bosch, Gascon 1998). Por lo tanto el álgebra debería incorporar tareas que tengan las características siguientes:

- *El álgebra debería servir para modelizar sistemas matemáticos en particular plantear y resolver problemas de distintos ámbitos, es decir aritméticos, geométricos, combinatorios entre otros que son difíciles de plantear y resolver sin el álgebra.*

- *La modelización algebráica debería dar respuesta a cuestiones sobre el alcance, la fiabilidad y la justificación de la actividad matemática que que se realiza en el sistema inicial. En particular, el modo algebráico que se construye debería permitir describir, generalizar y justificar procesos de resolución de problemas, así como unificar técnicas y tipos de problemas que aparecen inicialmente desconectados.*
- *La modelización algebráica debería conducir a una ampliación y transformación progresiva del sistema inicial que se estudia, con la incorporación de nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas de resolución, nuevas interpretaciones, nuevos vínculos con otros sistemas, etc.*
- *En el proceso de modelización algebráica, las expresiones deberían contener letras que designan cantidades de magnitud (no solo números) y la manipulación de estas expresiones no debería requerir una distinción previa entre datos conocidos e incógnitas.*
- *El proceso de modelización permite estudiar relaciones entre magnitudes de todo tipo (geométricas, físicas, comerciales, etc.) y evoluciona hacia la modelización funcional (Bolea, Bosch, Gascon 1998)*

DESARROLLO Y ANÁLISIS

En este trabajo se analizará una evaluación realizada a los alumnos que cursan Algebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), que se dicta en el primer cuatrimestre de primer año para las tres carreras de Ingeniería (Ing.Química, Ing. Industrial e Ing,Civil) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta.Los temas involucrados corresponden a los temas de los dos primeros trabajos prácticos de la asignatura Ellos son:
1ª) Matrices-Sistemas de ecuaciones- Determinantes
2º) Álgebra Vectorial.
Se tendrá en cuenta para el análisis solo los ejercicios relacionados al uso de letras en cualquiera de sus formas, que por practicidad se numeraron del 1 al 5, y que se detallan a continuación.
El número de evaluaciones que se estudiará es 29, correspondiente a los alumnos de la Comisión Nº1, sobre un total de 220 alumnos que cursan la materia, por lo que se puede considerar como una muestra representativa.

Ejercicio Nº1: Mediante matriz inversa (por el método de Gauss y operaciones elementales entre filas), resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$$

Ejercicio Nº2: Explicar en detalle, como se verifica en general, la validez de la regla de Sarrus.

Ejercicio Nº3: ¿Será cierto que todo sistema lineal homogéneo de igual nº de incógnitas que de ecuaciones admite solución única?

Ejercicio Nº4: Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$

Agregar una ecuación de modo que el sistema resultante sea
Tema A) indeterminado
Tema B) determinado

Ejercicio Nº5: Expresar el vector U = (-1,3,2) como suma de un vector colineal a V = (1, -2, 3) más un vector perpendicular a V.

Categorías de análisis:

Para cada uno de los ejercicios propuestos se observó en la producción de los estudiantes:

a) Interpretación de las letras involucradas (implica la capacidad de interpretar la letra según el caso, ya sea como un número cuyo valor se puede encontrar a partir de las restricciones del problema que se presenta, o como representación de un número cualquiera en expresiones algebráicas (generalizaciones) o como variable en relación funcional).

b) Simbolización en una situación en la que aparece cierta caracterización de la letra (implica la capacidad de identificar y simbolizar la incógnita en ecuaciones de problemas específicos o identificar y simbolizar el objeto general en problemas particulares que se pueden generalizar o simbolizar situaciones en las que se presenta una relación funcional)

c) Manipulación de las letras que aparecen en una expresión (implica manipular los elementos de una ecuación, sea parámetro o incógnita y cualquiera sea la operación involucrada o manipular las letras en expresiones generales o manipular las variables para establecer los valores que puede tomar en función de la otra)

d) Expresión del conjunto solución (implica la capacidad de expresar el conjunto solución de un problema de manera clara y precisa)

Organización Matemática de Referencia (OMR)

Para realizar el análisis de la evaluación, como primer paso se tuvo en cuenta la siguiente Organización Matemática de Referencia (OMR)

Ejercicio Nº1: Los alumnos deben interpretar el enunciado, aplicar el método de resolución pedido y calcular la inversa de una matriz mediante Gauss y operaciones elementales entre filas, para poder expresar el conjunto solución del sistema.
Es necesario que sean capaces de interpretar el sistema como una sola ecuación matricial y simbolizarlo de la forma A.X = B donde X actúa como una incógnita que puede ser encontrada con los datos del problema. Para poder hacerlo, deben usar la matriz inversa de A, de modo que se obtenga la expresión $X = A^{-1}.B$
Además deben calcular la inversa de la matriz A por el método solicitado (Gauss y operaciones entre filas)

Ejercicio Nº2: Este ejercicio requiere el uso de las letras como número generalizado, se espera que los alumnos verifiquen en forma genérica la regla de Sarrus para el cálculo de un determinante de 3x3. (Pueden hacerlo utilizando algún otro método de cálculo de determinante, por ejemplo por el desarrollo de una fila o columna de Laplace)

Ejercicio Nº3: En este ejercicio se puede justificar con un contraejemplo elegido correctamente, de manera que alguna de las ecuaciones sea combinación lineal de las otras, aquí entra el concepto de variable en relación funcional, además del uso de las letras como parámetros en los coeficientes que se deben elegir para las ecuaciones

Ejercicio Nº4: Este ejercicio requiere el uso de las letras como variable en relación funcional y además como parámetro ya que se debe agregar una ecuación de manera que los coeficientes tomen el valor necesario para que el sistema tenga un tipo de solución deseado.

Ejercicio Nº5: Este ejercicio requiere que el estudiante utilice las letras como números generales para obtener todos los vectores A colineales con el vector V, (k toma el rol de parámetro) que tienen la forma genérica A = k.V y por otro lado todos los vectores B = (x,y,z), perpendiculares a V, cuya forma genérica se obtiene de la condición B.V = 0, donde se observa una relación funcional entre las variables.

Resultados

Se presenta a continuación, para cada ejercicio, una tabla donde se consigna el número de alumnos que responden bien, mal o no responden en cada caso, con sus respectivos porcentajes.

Ejercicio Nº1

Respuestas	**Interpretación** A.X = B	**Simbolización**	**Aplicación método de resolución**	**Expresión de la solución**
Bien	22 (75,86%)	17 (58,62%)	17 (58,62%)	10 (34,48%)
Regular			5 (17,24%)	8 (27,58%)
Mal	5 (17,24%)	4 (13,80%)	5 (17,24%)	6 (20,68%)
Vacío	2 (6,90%)	8 (27,58%)	2 (6,90%)	5 (17,24%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº2

Respuestas	**Sarrus en forma génerica**			**Laplace u otro método en forma genérica**			**Verifica ción**
	Interpre tacion	**Simboli zación**	**Manipu lación**	**Interpre tacion**	**Simboli zación**	**Manipu lación**	
Bien	14 (48,23%)	14 (48,23%)	13 (44,82%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)
Mal	4 (13,80%)	3 (10,34%)	1 (3,45%)	2 (10,34%)	2 (6,90%)		2 (6,90%)
Vacío	11 (37,93%)	12 (41,37%)	15 (51,72%)	21 (72,38%)	21 (72,38%)	23 (79,31%)	21 (72,38%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº3

Respuestas	**Interpretación**	**Simbolización**	**Manipulación**	**Justificación**
Bien	13 (44,82%)	7 (24,13%)	7 (24,13%)	6 (20,68%)
Mal	10 (34,48%)	3 (10,34%)	2 (10,34%)	9 (31,02%)
Vacío	6 (20,68%)	19 (65,51%)	20 (68,96%)	14 (48,23%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº4

Respuestas	**Interpretación del tipo de solución**		**Interpretación de los coeficientes como parámetros**		**Simbolización**		**Verificación**	
	Tema A	**Tema B**	**Tema A**	**Tema B**	**Tema A**	**Tema B**	**Tema A**	**Tema B**
Bien	8 (27,58%)	13 (44,82%)	8 (27,58%)	13 (44,82%)	8 (27,58%)	13 (44,82%)	7 (24,13%)	10 (34,48%)
Mal	5 (17,24%)	1 (3,45%)	5 (17,24%)	1 (3,45%)	4 (13,80%)	1 (3,45%)	4 (13,80%)	1 (3,45%)
Vacío		2 (10,34%)		2 (10,34%)	1 (3,45%)	2 (10,34%)	2 (10,34%)	5 (17,24%)
Total	**13**	**16**	**13**	**16**	**13**	**16**	**13**	**16**

Ejercicio Nº5

Respuestas	Interpretación	Simbolización	Manipulación	Expresión de solución
Bien	15 (51,72%)	19 (65,51%)	16 (55,17%)	12 (41,37%)
Mal	10 (34,48%)	6 (20,68%)	8 (27,58%)	9 (31,02%)
Vacío	4 (13,80%)	4 (13,80%)	5 (17,24%)	8 (27,58%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

CONCLUSIONES

En cuanto a la interpretación:

- El ejercicio Nº 1 es el que mejor interpretación presenta, un 75,86 % de alumnos fueron capaces de interpretar el problema como una sola ecuación matricial del tipo A.X = B, donde X es una incógnita a despejar.
- El porcentaje más bajo (20,68%) de ejercicios bien hechos corresponde al Nº 2, en el que deben interpretar la letra como número generalizado para expresar el desarrollo de Laplace o algún otro método de cálculo de determinante en forma genérica.
- El más alto porcentaje de no contestados (72,38%) también corresponde al Nº 2
- En los ejercicios 3 y 5 se observa que un importante porcentaje de alumnos (34,48%) interpretan mal cuando se trabaja con parámetros y variables en relación funcional.

En cuanto a la simbolización

- El ejercicio Nº 4 presenta el mayor porcentaje (72,38 %) de bien, de los cuales un 44,82 % corresponde al tema B en el que se solicita un sistema de ecuaciones con una solución única, y el porcentaje es bastante menor (27,58%) para el tema A en el que se solicita un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones.
- El porcentaje más bajo (20,68%) para simbolizar bien se presenta en el ejercicio Nº 2, en el que deben utilizar letras como números generales en el método de Laplace. Solo 6 alumnos lo realizaron correctamente y son parte de los 14 alumnos que simbolizaron bien la generalización de Sarrus.
- El más alto porcentaje de no contestados (72,38%) también corresponde al ejercicio Nº2 (Laplace)
- El ejercicio Nº 3 también presenta un porcentaje alto (65,51%) de no contestados

En cuanto a la manipulación

- En el ejercicio Nº1 se presenta un 58,62% de alumnos que hacen una buena aplicación del método de resolución (Gauss y operaciones entre filas), sin embargo puede considerarse alto el porcentaje de alumnos que cometen errores o lo hacen mal (34,48%), teniendo en cuenta que se trabajó bastante en este sentido en los trabajos prácticos.
- En el ejercicio Nº 5, un 55,17 % de alumnos manipula bien las variables, sin embargo un 27,58% lo hace mal.

En cuanto a la expresión del conjunto solución

- En el ejercicio Nº 1 expresan bien la solución un 34,48% y regular o mal un 48,28 %
- En el ejercicio Nº 5, lo hacen bien un 41,37 % y mal un 31,02 %
- Es notable el bajo porcentaje (20,68%) de alumnos que justifican correctamente lo que hacen, como se ve en el ejercicio Nº 3. También es notable el bajo porcentaje (20,68%) de alumnos que realizan correctamente la verificación solicitada en el ejercicio Nº 2.

Del análisis anterior, pareciera que la mayor dificultad en los alumnos que cursan primer año de ingeniería en la Universidad Nacional de Salta, en cuanto al uso de las letras en álgebra, se presenta en primer lugar alrededor de las generalizaciones, cuando deben utilizar las letras como números generales (como se observa en el ejercicio Nº 2), y en segundo lugar cuando deben utilizar las letras como variables en relación funcional (ejercicios Nº 3 y 5)
Si bien este análisis es solo una primera aproximación, sirve como inicio para realizar en un segundo trabajo, una investigación más profunda del tema a partir de encuestas y análisis de otras producciones de los alumnos.
Además esto nos lleva al planteo de nuevas hipótesis provisorias para un nuevo trabajo, en cuanto a que existen algunas restricciones impuestas por el sistema de enseñanza, por un lado, el poco tiempo que se dispone en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los temas mencionados, lo que origina una acumulación de varios temas en un mismo práctico y por lo tanto un obligado aprendizaje rápido, y por otra parte la necesidad de evaluar, lo que lleva a tareas que pueden dividirse y estructurarse de manera flexible, lo que permite su atomización y las transforma en objetivos mas fáciles de evaluar, que son características de la interpretación del álgebra como una aritmética generalizada y no como instrumento de modelización.

BIBLIOGRAFÍA

- Bolea, P., Bosch M., Gascon, P. (2001b). Como se construyen los problemas en Didáctica de las matemáticas. Educación Matemática 13 (3) 22-63
- Bolea, P., Bosch M., Gascon, P. (2004) ¿Por qué la modelización está ausente en la enseñanza del álgebra escolar?.QUaderni di Recerca in Didattica, 14, 125-1233
- Brousseau, G. (1995) "Fundamentos de la Didáctica de la Matemática". Traducción de Julia Centeno Perez. Universidad de Zaragoza. ICE.
- Chevallard, Y. (1997). "La transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado". Ed. AIQUE. Bs. As.
- Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón , J. (1997) "Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje". ICE-HORSORI. Barcelona.
- Doady, R. (1996) Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemátricas de collage-seconde
- Gascon, J. (1997) "La naturalez prealgebráica de la matemática escolar". Seminarios del Depto. de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona.
- Gascon, J, Bolea,P. y Bosch M, (1998) "Restricciones al proceso de algebrización de la organización matemática escolar". Seminario de Didáctica de la Matemática. .
- Gascon, J, Bosch, M. (1999) "L´Activitat matemática algebrizada. Problems oberts". Uso interno de Seminarios de Didáctica. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Janvier, C, Charbonneau, L et René de Cotret, S.(1989). "Obstacles epistemologiques à la notion de variable: perspectives historiques".Construction des savoirs, obstacles et conflicts. (pp 64-75) CIRADE. Université du Québec à Montreal. Canadá
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into Algebra. Approaches to Algebra. Bednarz et al.(eds). (pp.225-236). Holanda: Kluwer Publischers.
- Panizza, M. (2005). "Razonar y Conocer". Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos. Libros del Zorzal. Bs.As.
- Panizza,M. Sadovsky, P. y Sessa, C (1995) "Los primeros aprendizajes algebráicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática".trabajo presentado en la UMA-REM, Río Cuarto.
- Panizza, M. Sadovsky, P y Sessa, C. (1999) "La ecuación lineal en dos variables: entre la unicidad y el infinito". Revista de Enseñanza de las Ciencias (17-3, 453-461).
- Sessa, C. (1998) "Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto". Universidad de Bs. As. y CONICET.
- Sessa, C. (2005)."Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y Perspectivas". Libros del Zorzal. Bs.As.
- Trigueros M., Reyes A., Ursini S., y Quintero R.(1996) "Diseño de un cuestionario de Diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra". Revista de Enseñanza de las Ciencias (1996, 14(3), 351-363).