Geometría Dinámica & Demostraciones Geométricas

Silvia Bernardis y Susana Moriena

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Santa Fe. Argentina
silvia.bernardis@gmail.com, smoriena@yahoo.com.ar

Fundamentación

Desde los antiguos griegos, quienes la consideraron como una pieza clave en su idea de ciencia, se ha considerado la demostración como una característica fundamental de la esencia de las matemáticas. "En matemática, la demostración no sólo es importante sino que constituye uno de los componentes del núcleo central de la misma." (Dreyfus, 2000; p: 132)
Como señala este autor, "es necesario que los estudiantes se enfrenten realmente a preguntas cuya naturaleza les pida que razonen, argumenten y justifiquen las afirmaciones matemáticas. [...] La demostración no es un tema que pueda ser tratado de una vez y para siempre en un curso, sino que está íntimamente relacionada con la naturaleza de toda iniciativa de enseñanza y aprendizaje de la matemática y, por consiguiente, los alumnos deberían vivirla a lo largo de todo el currículum." (Dreyfus, 2000; p. 133)
Un objetivo de la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios y universitarios es que el alumno aprenda a validar sus conjeturas a través de una demostración. Para alcanzarlo es necesario que el alumno aprenda que no todo lo que se ve es verdadero. En este sentido, Balacheff (2000a) menciona dos obstáculos respecto de las demostraciones geométricas:

- ✓ La evidencia de los hechos que se impone a la razón: los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son evidencia de la demostración.
- ✓ La enseñanza en matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Esto es notorio cuando el problema planteado se presenta de la forma "mostrar que...". En una formulación de este tipo, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que está por descubrir es una demostración.

El primer obstáculo puede manifestarse más notoriamente cuando se utiliza un software de geometría dinámica en la enseñanza. "Una propiedad geométrica es un invariante perceptual. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrar una propiedad. Hasta cierto punto, la eficiencia del software ha eliminado la necesidad de la demostración."(Balacheff, 2000b; p. 95)
En relación con el segundo obstáculo, las actividades a desarrollar en estos entornos tienen por objetivo general que el alumno investigue sobre un problema y descubra determinadas propiedades geométricas. "En matemática, transformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de la matemática en sí, como muchas veces se ha afirmado."(Balacheff, 2000b; p. 96)
La geometría dinámica desarrolla habilidades de visualización, permite la exploración experimental y la modificación continua de las construcciones, obteniendo fácil y casi inmediatamente numerosos ejemplos con una sola figura.
Este recurso, además, introduce un cambio fundamental en la enseñanza de la demostración. "Desde el punto de vista del alumnado como desde el del profesorado, el conocimiento es la esencia de la interacción con la máquina. Pero el conocimiento no puede simplemente leerse en la pantalla, es el resultado de una construcción en el proceso de interacción con la máquina. Tanto si la interacción trata este objetivo directamente, como sucedería a lo largo del diálogo presente en una clase magistral, o lo trata indirectamente, como sería el caso de las estrategias de aprendizaje por descubrimiento, la forma en que se resuelve dicha interacción restringe el conocimiento construido por el aprendiz.". (Balacheff, 2000b; p. 94)
Es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de ***explicar la verdad*** comprobada en todos los casos con el software, es decir la demostración como una ***explicación*** a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas entorno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo. "Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas,

esas estrategias de tratar de generar dudas para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software de geometría dinámica.” (De Villiers, 1996; p. 2).
El argumento: “el resultado se debe probar para que todos los casos estén contemplados, ya que tu dibujo es uno particular”, no funciona cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software dinámico de geometría.
Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, argumentar lo que aseguran es verdadero en base a resultados y propiedades que ya conocen. Esta tarea no es sencilla. Como afirman Balacheff y Dreyfus (2000; p. 130), “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.”
El desafío será diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas. “Es especialmente eficaz presentar a los alumnos tempranamente resultados en los que las explicaciones (demostraciones) posibilitan generalizaciones posteriores sorprendentes (usar la demostración como herramienta de descubrimiento). En lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como herramienta de verificación en geometría.” (De Villiers, 1996; p. 3).
Según Battista y Clements (1995), para que se produzca un nuevo descubrimiento matemático, se plantean los problemas, se analizan los ejemplos, se producen conjeturas, se ofrecen contraejemplos, y se revisan conjeturas; un teorema surge del refinamiento y validación de ideas que responden a una cuestión significativa.

Desarrollo

Teniendo en cuenta el encuadre teórico, hemos preparado una serie de actividades en torno a un problema, como un ejemplo para el trabajo con los estudiantes en estos entornos de geometría dinámica, existen varios software de que se pueden usar, como por ejemplo: Geogebra, Cabri-géomètre, Geometer’s Sketchpad, Cinderella, Geonext, etc.
La elección del problema tiene su fundamento en las consideraciones de De Villiers (1996), quién afirma que incluso los alumnos en el nivel Van Hiele 1 podrían utilizar fácilmente la simetría para explicar por qué ciertos resultados son verdaderos.

Problema: Jugando al Billar

Carlos y Juan, su profesor de matemáticas, están jugando al billar. Al poco tiempo Carlos le pregunta a Juan:
¿Qué recorrido tendrá que hacer la bola P para dar a la bola Q después de tocar en dos bandas? (Disponible en Internet en: http://www.Descartes.cnice.mecd.es)

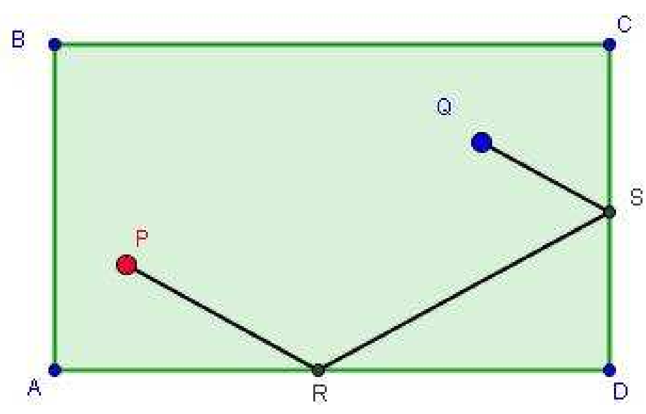

Figura 1

Una de las reglas básicas en la resolución de problemas consiste en empezar por lo más fácil: estudiaremos primero como conseguirlo a “una” banda (la inferior).
Representamos la mesa de billar y las bolas.
Las dimensiones del rectángulo son 28 x 14 “unidades”, como en la Figura 2.

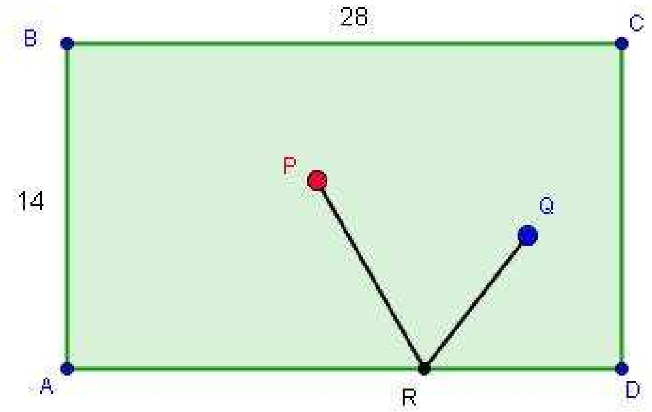

Figura 2

GUÍA DE TRABAJO
Parte 1: Exploración y formulación de conjetura 1) Construir una figura dinámica utilizando las propiedades de la figura, que nos permita observar todas las posibles ubicaciones de las bolas *P* y *Q*. 2) ¿Seguro que la figura es dinámica, es decir que siempre la mesa es la misma y las bolas pueden estar en cualquier posición dentro de la mesa? 3) Compara tu construcción con la de tus compañeros. (protocolo de construcción) 4) Ubica un punto *R* que se mueva sobre la banda inferior. Mide los ángulos, mide segmentos. "Las bolas de billar siguen la trayectoria mínima entre *P*, la banda y *Q*." ¿Cuál es? Escribe tu conjetura. 5) Calcula la suma de las longitudes de $\overline{PR}$ y de $\overline{RQ}$. Desplaza el punto *R* sobre la banda inferior. ¿Esto confirma tu conjetura? Si no, ¿puedes modificarla?

Los estudiantes en esta etapa explorarán la figura, descubrirán y formularán su conjetura. Se asociarán para el descubrimiento de hechos geométricos y la reinvención de las relaciones geométricas. Podrán trabajar con figuras similares a la Figura 3.

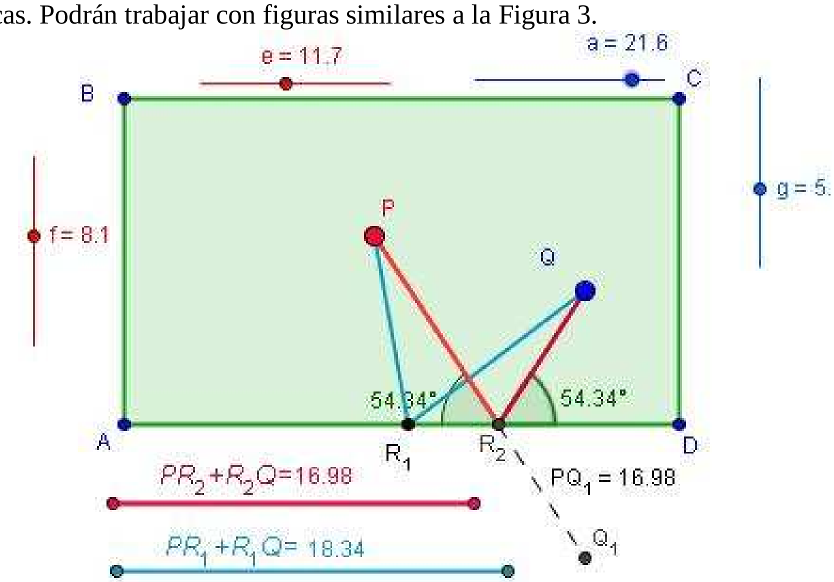

Figura 3

Podrán investigar, entre otras cosas que:

El punto *R* será aquel que verifica que la suma de distancias a *P* y *Q* es mínima.

Si no hubiera banda inferior, la bola seguiría hasta el punto Q_1 (simétrico del Q respecto de esa banda):

$$d(P,R)+d(R,Q)= d(P,R)+d(R,Q_1)= d(P_1,R)+d(R,Q)$$

esta suma será mínima cuando *P*, *R* y Q_1 estén alineados (en cuyo caso también lo estarán P_1, simétrico de *P* respecto de la banda inferior, *R* y *Q*).

Por lo tanto, R es la intersección del segmento $\overline{PQ_1}$ con la banda inferior, siendo Q_1 el simétrico de Q respecto de la recta que contiene a la banda inferior. La bola recorrerá primero $\overline{PR}$ y luego $\overline{RQ}$.

Parte 2: Validación de la conjetura 6) Halla Q_1, el simétrico de Q respecto de la recta que contiene a la banda inferior, Suma la longitud de $\overline{PR}$ con la de $\overline{RQ_1}$. Desplaza el punto R. ¿Cuándo será mínima esta suma? ¿Esto confirma tu conjetura? 7) Utiliza la verificación de propiedades para comprobar si tu conjetura es verdadera. 8) Escribe tu conclusión final. 9) ¿Puedes explicar por qué es verdadera? Trata de explicar en términos de otros resultados conocidos. 10) Compara tus explicaciones con las de tus compañeros. ¿Está de acuerdo? ¿Cuál es más satisfactoria? ¿Por qué?

En esta etapa los estudiantes podrán validar sus conjeturas, y se enfrentarán a la necesidad de explicar sus construcciones a otros, lo que ellos vieron, descubrieron, pensaron y concluyeron. El razonamiento se transforma en un vehículo para entender y explicar el porqué pudiera funcionar la conjetura descubierta. Más aún se transforma en el medio para convencer a otros de la validez de la conjetura descubierta.
Podrán arribar a la solución, para el caso de una banda, como se muestra en la Figura 4.

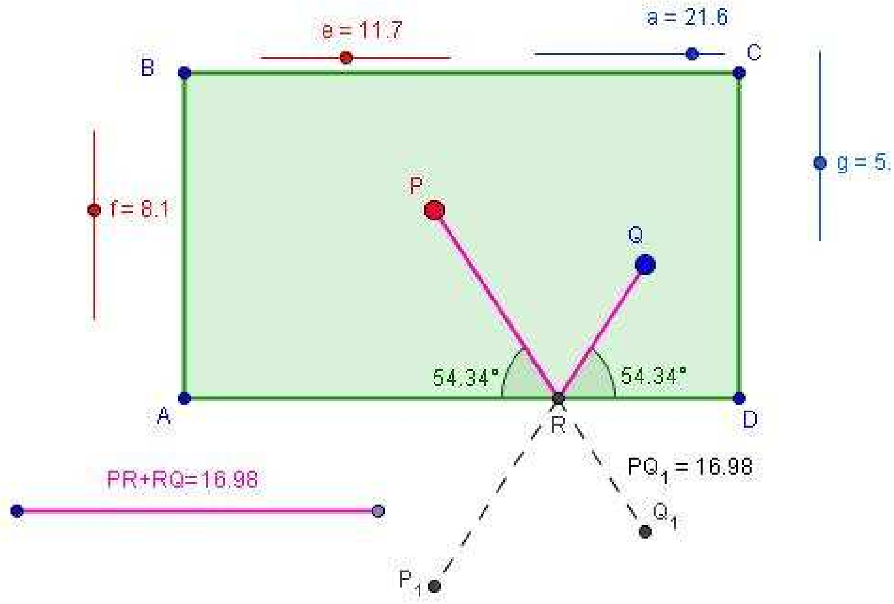

Figura 4

Parte 3: Abordando el problema inicial, con dos bandas. 11) Explora el camino que seguirá la bola P después de rebotar en dos bandas para chocar a la bola Q. ¿Cuántas soluciones diferentes puedes encontrar? ¿Hay en ellas algún caso especial? 12) Compara las longitudes del segmento $\overline{PQ_2}$ y la longitud total del camino. Explica esta relación en términos de congruencia de segmentos, ángulos y propiedades de la reflexión. 13) Compara tus explicaciones con las de tus compañeros.

En esta etapa los aspectos sugeridos por Duval sobre considerar al razonamiento como una extensión del conocimiento y como una herramienta explicativa, cobran vida en la realidad de la clase. Mediante la experimentación y la generalización inductiva los alumnos extienden su conocimiento sobre las formas y las relaciones geométricas y su vocabulario de formas legítimas de razonamiento.
Los alumnos podrán trabajar con figuras similares a la Figura 5.

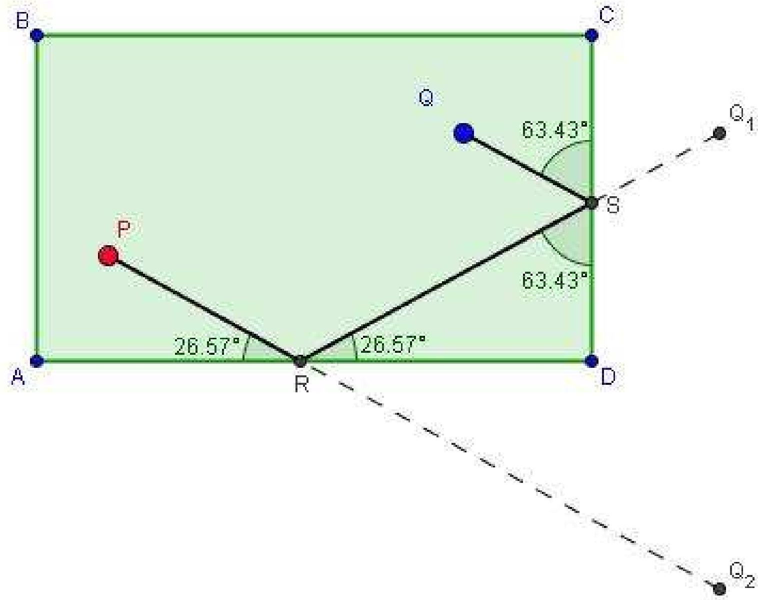

Figura 5

Podrán explorar por ejemplo hallando:

Q_1, la reflexión de Q respecto de la recta que contiene a la segunda banda y Q_2, la reflexión del punto Q_1 respecto de la recta que contiene a la primer banda y trazando $\overline{PQ_2}$ y luego marcando el punto de intersección R con la primera banda, para trazar el segmento $\overline{RQ_1}$ que corta a la segunda banda en S. El camino es PRSQ.

Parte 4: Extensiones del Problema

14) Y algo más difícil, dice Juan a Carlos: "¿En qué dirección tendrás que lanzar la bola para que, después de tocar las cuatro bandas del billar, vuelva al mismo punto?
15) ¿Cuántas soluciones diferentes puedes encontrar? ¿Cuál será la longitud del camino recorrido por la bola?

En esta última extensión nos detendremos a analizar algunas propiedades importantes que surgen. Los estudiantes realizando la construcción billar[1], explorarán imágenes como la Figura 6.

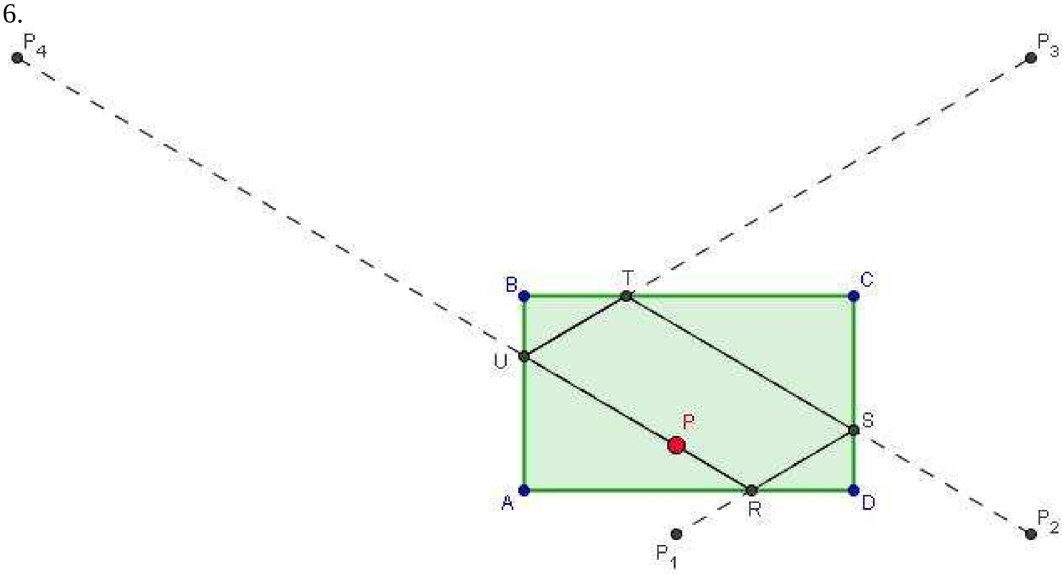

Figura 6

[1] Como jugamos sin efectos y choques elásticos, se cumplen las leyes de reflexión (Ley de Snell de igualdad de ángulos o Principio de Fermat, esto es camino mínimo). A este recorrido llamaremos construcción billar.

Parte 5: Explorando propiedades

16) Trata de relacionar la distancia total recorrida por la bola que después de tocar las cuatro bandas del billar, vuelva al mismo punto con las dimensiones de la mesa de billar. ¿Existe alguna relación? Explica tu conjetura.
17) El camino obtenido forma un paralelogramo. ¿Podrías explicar por qué?
18) Halla el perímetro de este paralelogramo. Modifica las dimensiones de la mesa. ¿Observas alguna relación? Escribe tu conjetura.
19) Traza las diagonales del rectángulo ABCD, suma sus longitudes. ¿Esto confirma tu conjetura? Si no, ¿puedes modificarla?
20) Explica porqué sucede esto. Compara con las explicaciones de tus compañeros.

En esta etapa los estudiantes descubrirán, formularán, validarán y buscarán contraejemplos de conjeturas relacionadas con las propiedades de la figura.
Investigarán que:

- ✓ Los puntos U, P y R están alineados.
- ✓ El camino obtenido forma un paralelogramo RSTU.
- ✓ La longitud total del camino es igual a la longitud del segmento $\overline{PP_4}$.
- ✓ La longitud total del camino, es decir el perímetro del paralelogramo RSTU es igual a la suma de las longitudes de las diagonales AC y BD del rectángulo ABCD.

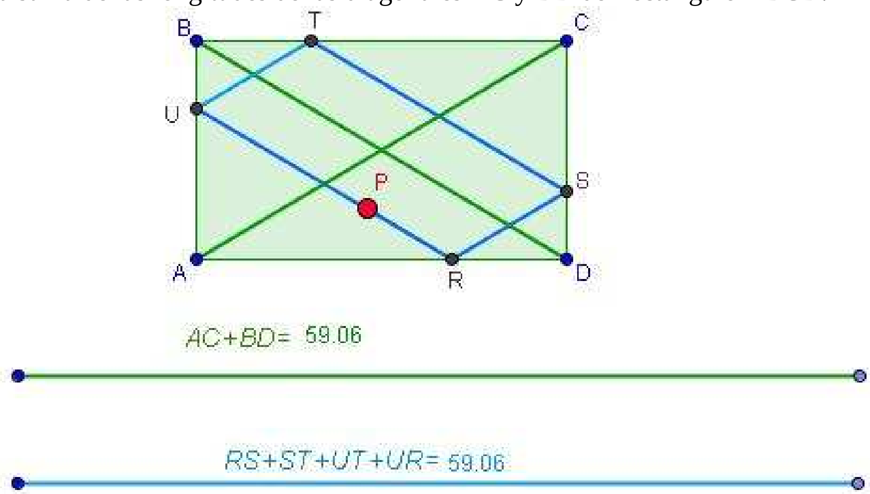

Figura 7

Conclusiones

Con el objetivo de salvar los obstáculos que menciona Balacheff, en esta propuesta presentamos situaciones que permitan modelar eficazmente problemas reales por medio de dibujos dinámicos mediante los cuales los estudiantes podrán explorar, descubrir y formular conjeturas, validarlas, buscar contraejemplos. De este modo se enfrentarán a situaciones paradójicas en las cuáles se ven obligados a tomar conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales. ¨El razonamiento como demostración empieza desde muchas clases de justificaciones, estas justificaciones empujan al alumno hacia demostraciones formales. El razonamiento que provoca las conjeturas ofrece el argumento para la construcción subsiguiente de una demostración.¨ (Hershkowitz, 2001, p: 4)
Priorizamos la “explicación”, entendiendo a ésta como una forma de mostrar cómo (por qué) es verdadera una conjetura en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, es decir, cómo “esto” es una consecuencia lógica de “estos otros” resultados.
En este marco de construcción del conocimiento, la enseñanza de la geometría utilizando un sistema de geometría dinámica está basada en la resolución de problemas, con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar, en definitiva, ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir. El docente cambia su papel de director y experto por el de co-partícipe, apoyo y co-aprendiz.(Fisher,1993)

La comprobación experimental constituye una evidencia de falsedad si encontramos un contraejemplo; pero si la conjetura es cierta observaremos que se cumple para todas las posiciones que dibujemos de la figura, lo cual no constituye una prueba formal.
Pensamos que este trabajo previo, teniendo en cuenta otras funciones de la demostración como una herramienta de descubrimiento o la de explicación, deberían utilizarse para introducir la demostración como una actividad significativa para nuestros alumnos.

Bibliografía

- Balacheff, N. (2000a). ¨*Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas¨.* Una empresa docente. Edit. Univ. de Los Andes. Bogotá.
- Balacheff, N. (2000b). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En Colén, M Fraile, Y, Vidal,C (editores): ¨*Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional¨.* Barcelona. Edit. GRAÓ DE Irif, S.L.
- Battista , Michael y Clements, D. (1995). ¨*Geometry and Prof*¨. The Mathematics Teacher. Vol 88 Nº 1. Enero 1995.
- Bressan, A., Bogisic, B., Crego,K. (2000). ¨*Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar…*¨. Ediciones Novedades Educativas. Buenos Aires.
- De Villiers, Michael. (1996). ¨*Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría¨.* The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve, Noviembre-Diciembre. 1999.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En Colén, M Fraile, Y, Vidal,C (editores): ¨*Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internaciona¨l.* Barcelona. Edit. GRAÓ DE Irif, S.L.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía.
- Fisher,E. (1993). ¨*The teacher's role*¨. En P. Scrimshaw(Ed.), Language, classrooms and computer. (p. 57-74). London: Routledge.
- Hershkowitz, R. (2001). ¨*Acerca del Razonamiento en Geometría*¨.www.euclides.org.
- Laborde, Jean-Marie y Otros. (1997). ¨*Geometric explorations for the Classroom*. NCTM National Conference. Minneapolis, Minnesota, EEUU.