Historias de Matemáticas

Un problema sobre probabilidad del siglo XVII. Huygens y Hudde

A seventeenth-century probability problem. Huygens and Hudde

José Antonio Camúñez Ruiz, María Dolores Pérez Hidalgo

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 099–126, ISSN 2174-0410
Recepción: 04 Nov'22; Aceptación: 01 Dic'22

1 de abril de 2023

Resumen

Tras la publicación de su pionero tratado sobre Cálculo de Probabilidades, en 1657, Huygens vuelve esporádicamente a este asunto a instancia de amigos y familiares, a través de correspondencia con ellos. En 1665 se da una de estas circunstancias, a instancias de su amigo Hudde. Entre ambos se cruza una correspondencia sobre resolución de problemas concretos en juegos de azar entre los que aparecen varias variantes, que los autores van introduciendo a lo largo de la correspondencia, sobre el problema que ellos mismos llamaron del cara y cruz. Van poniéndose de acuerdo en las condiciones del problema conforme avanza la correspondencia y, entonces, van coincidiendo en soluciones y resoluciones, usando un lenguaje algebraico del siglo XVII. En este trabajo presentamos traducciones al español de los fragmentos de la correspondencia que tratan con este problema, y llevamos a cabo la resolución de las diferentes variantes con lenguaje algebraico actual, pero imitando la forma de resolver de ellos. Proponemos estos problemas como ayuda en la docencia de esta materia para estudiantes que se inician en este tipo de cálculo.

Palabras Clave: Cálculo de probabilidades, Huygens, Hudde, problema del cara y cruz.

Abstract

Following the publication of his pioneering treatise on the Calculus of Probabilities, in 1657, Huygens sporadically returns to this issue at the urging of friends and family, through correspondence with them. In 1665 one of these circumstances occurs, at the urging of his friend Hudde. Between the two there is a correspondence on solving specific problems in games of chance among which several variants appear, which the authors introduce throughout the correspondence, on the problem that they themselves called the heads and tails. They agree on the conditions of the problem as the correspondence progresses and, then, they agree on solutions and resolutions, using a 17th century algebraic language. In this work we present translations into Spanish of the fragments of the correspondence that deal with this problem, and we carry out the resolution of the different variants with current algebraic language, but imitating the way of solving them. We propose these problems as an aid in the teaching of this subject for students who are starting in this type of calculation.

Keywords: Calculus of probabilities, Huygens, Hudde, heads and tails problem

1. Introducción

En 1657 se publica el primer texto sobre cálculo de probabilidades, *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Sobre el cálculo en juegos de azar), de la que es autor el científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695). El texto es el fruto de sus reflexiones y cálculos tras pasar unos meses en París, en 1655, un año después de producirse la famosa correspondencia entre los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662), que vivía en París, y Pierre de Fermat (1607-1665), residente en Toulouse. Entre los investigadores de la ciencia hay bastante acuerdo sobre el hecho de que dicha correspondencia estableció las bases sólidas para la construcción del nuevo cálculo. Pero dicha correspondencia no fue publicada hasta más tarde, en 1665, después de la muerte de Pascal. Los matemáticos del círculo de amistad de Pascal, en París, tuvieron conocimiento de la misma y fueron los que informaron a Huygens sobre su contenido. Realmente, informaron sobre los problemas abordados por ambos matemáticos, pero apenas sobre los métodos de resolución. En esta visita a París no pudo entrevistarse con el propio Pascal, dado que este se encontraba en una de sus retiradas espirituales en las que rechazaba cualquier visita. A su vuelta a Holanda informa a su maestro en matemáticas en la Universidad de Leiden, Frans von Schooten (1615-1660), sobre los nuevos conocimientos relacionados con el azar. Éste, que estaba preparando la publicación de una obra de carácter enciclopédico sobre matemáticas, *Exercitationum Mathematicarum*, le anima a que redacte sobre estos nuevos conocimientos con objeto de incorporarlos como uno de los anexos de la citada obra. Y así fue. En 1657, cuando Huygens tenía 28 años, se publica en latín la obra de von Schooten, y como un apéndice de la misma, el texto de Huygens. Tres años más tarde, en 1660, se publica la versión en holandés, con título *Van Rekeningh en Spelen van Geluck*.

El tratado consta de un prefacio con dos cartas, una de Schooten y otra de Huygens, 14 proposiciones, donde las 3 primeras establecen los principios básicos, las que van desde la 4ª a la 9ª resuelven el problema de los puntos (reparto de una apuesta en juegos inacabados) en situaciones simples, y las últimas resuelven problemas relacionados con lanzamiento de dados. El tratado se completa con 5 problemas propuestos, y no resueltos, para el lector, en el que el último de ellos, el 5º, es el conocido como "problema de la ruina del jugador". De los 5 problemas propuestos, el 1º, el 3º y el 5º, iban acompañados de su solución, pero no de su resolución. En cambio, en el 2º y 4º, relacionados con la extracción de bolas a ciegas de una urna que contiene bolas blancas y negras, no se expone ni solución ni resolución.

Del tratado destacamos la tercera proposición, la que se emplea para hacer la valoración de un juego, y clave para la resolución posterior de los problemas. La traducción literal de la versión latina es:

Siendo p el número de casos en que me puede corresponder a, y q el número de casos en que puede hacerlo b, asumiendo que todos los casos son igualmente posibles, mi esperanza será igual a $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Se usa la palabra "expectatio" para valorar un juego, término que ha dado lugar a la esperanza matemática, operador tan utilizado, tanto en modelización estadística como en estadística inferencial.

En el prefacio del tratado, antes citado, Huygens reconoce la primacía de los genios franceses sobre este tipo de especulaciones:

> *Es necesario saber por otra parte que hace ya cierto tiempo que algunos de los más Célebres Matemáticos de toda Francia se han ocupado de este género de Cálculo, con el fin de que nadie me atribuya el honor de la primera Invención que no me pertenece.*

Pero en una carta a van Schooten fechada en 20 de abril de 1656, cuando ya se estaba preparando la publicación del texto, Huygens informa sobre su desconocimiento con respecto a los métodos de cálculo empleados por ellos:

> *La dificultad de este asunto está, precisamente, en poder comprender lo que surge del agudo ingenio de Pascal, que no ha contado nada, por lo que el mayor esfuerzo es continuar aseverando lo que, seguramente, fue investigado por él en su mayor parte, así como por Fermat. Los principios en los que se basan no han podido ser descubiertos hasta ahora.*

Respecto a los documentos publicados por él, aquí se acaba la aportación de Huygens al cálculo de probabilidades. Su rica vida científica tomó otros derroteros, relacionados con la astronomía o la física. Ahora bien, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, la Academia Holandesa de las Ciencias procede a la publicación de las obras completas de Huygens, recogiendo en las mismas lo publicado y lo no publicado por este autor, siendo esto último lo constituido por su inmensa correspondencia con científicos de toda Europa, y lo recogido en hojas sueltas y cuadernos manuscritos en los que el autor ensaya resoluciones de diversos tipos de problemas. En total, la Academia publica 22 tomos. Aquí es donde descubrimos que Huygens dedicó algo más de tiempo al cálculo de probabilidades y, casi siempre, a instancia de colegas o de su propio hermano, Lodewijk. Así, en el Tomo I encontramos la correspondencia previa a la publicación de su tratado, donde aparecen las dudas y discusiones con su maestro van Schooten. En el Tomo XIV aparece el propio tratado, y siendo acompañado de 9 apéndices que en su momento no fueron publicados, y que incluyen resoluciones manuscritas de diversos problemas de azar en diversos momentos de su vida. Y en el Tomo V nos encontramos la correspondencia que Huygens se cruzó con su compatriota Johann Hudde (1628-1704), en 1665, sobre resolución de algunos problemas concretos relacionados con juegos de azar, algunos de los cuales son objeto de nuestra investigación en este trabajo, y la correspondencia con su hermano Lodewijk (1631-1699) en 1669, en la que ambos hermanos discuten sobre el parámetro más adecuado para definir una tabla de vida: vida media o vida mediana, todo ello generado por la tabla de esa característica que aparecía en el texto de John Graunt (1620-1674), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, publicado en Londres 1662, y al que ambos tuvieron acceso.

En el trabajo que presentamos analizamos una parte de la correspondencia con Hudde de 1665, la que se dedicó a un problema concreto, que los propios autores denominaron "el problema del cara y cruz". Presentamos la traducción al castellano de los fragmentos de cartas donde aparece el problema, y la resolución dada por los autores al mismo, donde muestran su habilidad algebraica, su elegancia en la escritura de estas cartas, y sus intuitivas reflexiones sobre el asunto. Johann Hudde era amigo personal de Huygens, había coincidido con él, siendo estudiantes en Leiden, ambos discípulos de von Schooten, y en el momento de producirse la correspondencia vivía en Ámsterdam, mientras que Huygens permanecía en La Haya, razón por la cual se genera la misma, de la que nos ha llegado la mayoría de las cartas a través de las citadas Obras Completas (que se sepa, al menos tres de esas cartas han desaparecido).

Como profesores de esta materia, hemos probado incluir en los contenidos de asignaturas de iniciación al cálculo de probabilidades, la resolución de problemas de origen histórico como el que describimos en este texto. Detectamos una motivación especial por parte de nuestros alumnos, al conocer el contexto en el que se originan y la forma de resolver de los autores.

En el siguiente apartado exponemos nuestras traducciones al español, con nuestros comentarios, de los fragmentos de las cartas en los que se trata el problema que nos ocupa, y en el apartado 3º las resoluciones de estos autores con un lenguaje algebraico actual.

2. Fragmentos de la correspondencia Huygens-Hudde de 1665

Desconocemos la razón exacta por la que se originó esta correspondencia, pues la primera carta de esta serie no se conserva. Sospechamos que la misma fue provocada por la presencia al final del tratado de dos problemas en los que, como se ha dicho, no se mostraba ni resolución, ni solución. Recordamos, problemas 2º y 4º, ambos dedicados a calcular la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores participantes en un juego, consistente en la extracción al azar de una urna que contiene bolas blancas y negras. Pensamos que Hudde le envió la solución de ambos problemas en un momento anterior a abril de 1665, con la esperanza de que Huygens le manifestase la corrección o coincidencia de soluciones. Esto dio pie a una correspondencia, de la que se conserva 11 cartas (5 cartas de Huygens a Hudde, y 6 de Hudde a Huygens), en el periodo comprendido entre abril y agosto de ese año. Ya hemos informado que la Academia Holandesa de las Ciencias recoge en el Tomo V de las Obras Completas de Huygens esta correspondencia, y 5 apéndices escritos por Hudde, que son los manuscritos donde este autor ensayaba las resoluciones de los problemas planteados, y en el Tomo XIV, los apéndices II, III, IV y V del Tratado, que son las hojas sueltas donde Huygens realizaba sus propios cálculos, ensayos de resolución y disquisiciones sobre los problemas. Hemos de decir que, en las cartas que se remitían los autores no mostraban su forma de proceder, solo los resultados finales que, cuando no coincidían, generaban discusiones entre los mismos en las siguientes cartas. Añadimos, también, que los autores escribían principalmente en holandés y en latín. También, algunas notas en francés. La Academia Holandesa publica toda la obra de Huygens en la lengua en la que él redactaba y, también, en francés. Nosotros realizamos nuestra investigación usando las traducciones al español de la versión en francés de las cartas y apéndices que aparecen en las citadas Obras Completas.

Inicialmente, los problemas no se planteaban con toda la precisión necesaria, y eso era lo que daba lugar a esas diferentes interpretaciones. El transcurso de la correspondencia servía para ir incorporando hipótesis precisas sobre los problemas planteados y, así, llegar a coincidencias en los resultados. De hecho, en la 2ª carta de la serie, la de Hudde a Huygens de 5 de abril, leemos:

Carta de Hudde de 5 de abril de 1665.

> *Después de haber revisado mis cálculos sobre estas dos cuestiones, aunque únicamente a la carrera, pues era suficiente por el momento, y sin haber encontrado fallo alguno, no osaría, sin embargo, de acusaros de error, tanto menos cuando vos escribís, de forma muy expresa, que estáis en lo cierto y que no habéis calculado con error. Entonces, he pensado si no podría encontrarse algún doble sentido en el enunciado de las cuestiones y, que vos*

habéis interpretado de una forma y yo de otra, y hemos resuelto cada uno cuestiones diferentes, y así, en lugar de dos, dos pares.

En el contexto de esta correspondencia, además de los dos problemas ya citados de final del tratado, los autores plantean e intentan resolver, con mayor o menor éxito, otros problemas que iban surgiendo de la inventiva de ambos. Podemos resumir diciendo que, en total fueron dos tipos de problemas, los de extracción de bolas de una urna, y los de lanzamientos a cara y cruz, y que de este último tipo hemos contado hasta cinco variantes distintas. Son los problemas que analizamos en este trabajo.

Carta de Huygens del 4 de abril de 1665.

De esta carta sólo se conserva el resumen que Huygens tenía la precaución de redactar cuando la enviaba para tener referencias de lo que escribía, ante posibles discusiones posteriores. La fecha que disponemos es la del resumen. Seguramente, la carta fue enviada en fechas anteriores, pues la respuesta de Hudde fue enviada el 5 de abril, un día después de la fecha del resumen. En este resumen, Huygens contrasta los "números" de sus soluciones a los problemas de extracción de bolas de la urna (problemas 2 y 4 del final del tratado), con los de su interlocutor. Cuando estos autores hablan de números lo que están mostrando son los números con los que se pueden construir las probabilidades de ganar en el juego de cada uno de los jugadores (es decir de qué forma se construyen las probabilidades a partir de estos números). Al final del párrafo, encontramos la primera cita del problema de cara y cruz:

Números, de las dos cuestiones de azar, distintos a los de él, es decir, en lugar de sus números 232, 159, 104, yo encuentro 4, 6, 9, y en lugar de sus 14 y 19, yo encuentro 35 y 64. Estoy seguro de que los míos son buenos. ***Le propongo la cuestión de cara o cruz.***

Carta de Hudde de 5 de abril de 1665.

Volvemos de nuevo a esta carta de Hudde, a la parte en que entra en el problema al que nos referimos. Cuando los autores formulan la pregunta ¿cuánto pierde o cuánto gana un determinado jugador por participar en un determinado juego?, lo que están valorando es la esperanza de las ganancias (diferencia entre lo que recauda y lo que apuesta) de ese jugador por participar. O sea, usan la esperanza matemática como instrumento de valoración del juego para cada jugador. Si esa esperanza es positiva, los autores entienden que el jugador "gana" y, si es negativa, que "pierde". El valor de esa esperanza es la cantidad que responde a la pregunta sobre cuánto gana o cuánto pierde. Una vez que un jugador ha adquirido el compromiso de participar en el juego y si, calculada su esperanza, ésta sale negativa con una cantidad a, entonces si dicho jugador quiere renunciar a su participación en el mismo, ha de pagar al jugador contrario esa cantidad a. En ese sentido ha de entenderse la frase del fragmento que va a continuación, y que hemos señalado en negrilla:

A continuación, en lo que respecta a la cuestión que me habéis propuesto como si fuese fácil y simple, aunque a mí me ha exigido bastante meditación, a saber:

"A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que consiga cara[1] tomará todo lo que está puesto; y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. Se pregunta, ¿cuánto pierde A si acepta este juego? ***¿O cuánto se podría dar a B para***

[1] Hudde ha omitido, por descuido, este fragmento de frase que debería ser intercalado ahí: "debe poner cada vez un ducado, pero el que consiga cruz". Consultar la carta de Huygens del 10 de mayo.

> ***poder concluirlo?***", *he querido pensar al mismo tiempo, y he encontrado que B, en estas condiciones, conseguirá de provecho 1/6 de un ducado. Por lo menos, esto es cierto en el sentido en que yo interpreto las palabras: pero que hace, si nosotros no tuviésemos del mismo modo dos o más cuestiones, de manera que éste podría ser muy bien vuestro turno, en caso de diferencia, de descubrir el doble sentido. Estoy curioso por saber si coincidiremos, aunque no tengo duda, por lo menos si entendemos las palabras en el mismo sentido.*

Carta de Huygens del 10 de abril de 1665.

De nuevo, de la respuesta de Huygens, de 10 de abril, sólo disponemos el resumen que el propio autor redactó:

> *Es cierto que ambos hemos calculado bien, y esto es debido al doble sentido que se le puede dar a ambas cuestiones. En la cuestión de cara o cruz, su solución, la de que A perdería 1/6 de un ducado, no coincide con la mía que es 4/27 de un ducado.*

Carta de Hudde de 5 de mayo de 1665.

A lo largo de esta correspondencia observamos como, por descuido, los autores intercambian entre sí los efectos que ejercen en el juego el hecho de lanzar cara o cruz.

> *La cuestión que vos me habéis propuesto por primera vez en una carta del 4 de abril*[2] *se enuncia así:*
>
> *"A y B lanzan por turnos a cara o cruz bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá cada vez un ducado, pero el que lance cruz, cogerá todo lo que está puesto, y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. La cuestión es, ¿cuánto pierde A por entrar en el juego? o ¿cuánto debería entregar a B para poder concluirlo?"*
>
> *En mi respuesta*[3] *del 5 de abril yo recojo todas estas mismas palabras, de manera que las subrayadas, que vos me escribís*[4] *que no están en mi carta, deberían haber sido errores dada la rapidez con que las copié, lo que ha podido ocurrir aquí, tanto más como que la misma palabra "werpt"*[5] *precede y sigue inmediatamente. Encuentro también haber respondido a esta cuestión, que en esta condición B sacará de provecho 1/6 de un ducado, al menos que fuese cierto en el sentido que yo atribuía a las palabras, pero que, quizás, de esta cuestión podríamos extraer aún dos o más. Pues, como no se había precisado aquí el número de lanzamientos o de veces que se debía poner un ducado, ni indicado expresamente su indeterminación, me parecía que aún quedarían razones para dudar si en la cuestión, quizás, podría haber sido omitido algo sobre la determinación de las veces, o, si no, si se podría explicarlo por una vez de una parte y de otra, o bien, tenerlo por indeterminado. Esta última suposición me habría parecido la más probable, y también, supe después por vuestra misiva del 10 de abril que vos lo entendíais así, como se concluye de las palabras: ahora bien, para evitar en lo que sigue cualquier doble sentido, añadiría aún que entiendo que cada vez que A o B lancen cara, deben poner un ducado, de manera que alguna vez hay varios ducados puestos, antes de que por primera vez se lance cruz, es decir, que se coja todo lo que ha sido puesto. Pero como en vuestra carta precedente*[6] *aún aparecen a propósito*

[2] En la primera carta que se conserva de la correspondencia.
[3] En la segunda carta que se conserva de la correspondencia.
[4] Carta que está desaparecida.
[5] El equivalente a "cruz" en holandés.
[6] En la primera carta que se conserva de la correspondencia.

de esta cuestión las palabras: ***Vos os ocupareis tan fácilmente de examinar esto, que parece no exigir mucho cálculo, de forma que sólo es necesario encontrar el camino para conseguir lo que se desea****; y como había más cálculo en el sentido indeterminado que en el susodicho sentido determinado, elegí provisionalmente éste con preferencia al otro, de manera que mi solución contempla la cuestión así propuesta: A y B lanzan por turnos a cara o cruz, bajo la condición de que aquel que lance cara, pero sólo por 1ª vez, pondrá un ducado, etc. Y vos tomáis la cuestión en este sentido: A y B lanzan por turnos a cara o cruz, bajo la condición de que aquel que lance cara, siempre, pondrá un ducado, etc. Pero, sin embargo, aunque no más que vos mismo, yo no puedo ver que aún queda algo de incertidumbre en los términos de la cuestión, a pesar de ello, los resultados que hemos encontrado no coinciden, pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío, 2/9.*

Carta de Huygens de 10 de mayo de 1665.

En esta carta, Huygens le comenta a su interlocutor que existe la posibilidad de proponer una amplia variedad de problemas relacionados con juegos de azar, aunque, añade también, tiene dudas sobre si vale la pena dedicar tiempo a este tipo de especulaciones.

La razón por la cual os proponía la cuestión de cruz o cara era únicamente porque, al mostrarme lo que vos habíais escrito con respecto al cálculo en los juegos de azar, añadíais que no pensabais que se pudiese proponer aún alguna cosa particular en esta materia. Porque la susodicha cuestión me vino a la mente poco después, me parece bien de vos la propuesta como asunto de nueva especulación, la que me habéis enviado. Creo que ahora habréis percibido, al igual que yo, que esta cuestión es distinta a todas las que se encuentran en mi Tratado impreso, y que se podría imaginar aún otras más, distintas entre ellas, y exigiendo más meditación. Pero la utilidad no es suficientemente grande como para emplear mucho tiempo. En cuanto a la cuestión que habéis querido proponerme como conclusión de vuestra última, al principio me pareció bastante difícil, pero la he terminado con más facilidad de lo que yo creí.

La cuestión que Hudde le plantea, de la que escribe Huygens, era una más relacionada con la extracción al azar de bolas de una urna. Continúa la carta y aparece de nuevo el problema de cara y cruz, con una nueva versión del mismo.

Puesto que, en mi cuestión de cruz o cara, la condición de A es peor, puesto que él lanza primero, entonces cuando nada ha sido puesto aún, se podría plantear cuánto deberían poner al principio A y B (es decir, cada uno una misma suma) para que, desde el inicio, ceteris positis ut prius, sus condiciones sean equivalentes. No sé hasta qué punto será difícil esta cuestión, puesto que aún no la he pensado. Tampoco la he planteado para demandaros la solución, sino únicamente porque me ha venido a la mente, como emanando de la cuestión que vos habéis propuesto últimamente. Sólo os pido que me hagáis saber, a la vista de lo cual, si hemos obtenido igual resultado.

Carta de Hudde de 29 de junio de 1665.

En esta carta, Hudde le envía la solución a la última versión del problema. También, coincide con Huygens sobre la utilidad o no de dedicarle tiempo a este tipo de problemas.

… en lo que respecta a la siguiente cuestión, sobre la que no habéis reflexionado aún, a saber:

A y B lanzan por turnos a cruz o cara, en la condición de que aquél que lance cruz pondrá un ducado, pero aquél que lance cara cogerá todo lo que está puesto; y A lanzará el primero. Se pide, cuánto deberán poner A y B desde el principio, es decir, cada uno una misma suma, para hacer que las condiciones de A y B sean las mismas; encuentro como solución de esta cuestión 1+1/3 ducados que deben poner entre ambos, o 2/3 cada uno. Y no puedo creer que me haya equivocado en estos cálculos, dado que los he hecho por dos caminos distintos y que los dos, uno con y el otro sin Álgebra, son los mismos que he empleado para solucionar las tres cuestiones más difíciles que se encuentran en vuestro Tratado. Sin embargo, como estas cuestiones no os parecen (ni a mí tampoco) de tal utilidad como para emplear mucho tiempo, no quiero aseguraros con total rotundidad que he calculado bien en todo esto, sería posible también que me hubiese equivocado de vez en cuando en alguna pequeña letra, como ocurrió en la segunda de las 5 cuestiones que vos habéis propuesto al final de vuestro Tratado.

Carta de Huygens de 7 de julio de 1665.

Después de un texto extenso en el que el autor reflexiona sobre su resolución y la resolución de su interlocutor en el caso de los problemas sobre extracción al azar de bolas de una urna, Huygens muestra su coincidencia con Hudde en la solución de la última versión del problema:

En cuanto a mi última cuestión de cruz o cara, para hacer iguales las chances de A y B, aquí encuentro el mismo resultado que vos, a saber, que cada uno debe poner al principio 2/3 de un ducado.

Carta de Hudde de 20 de julio de 1665.

Esta carta es la más extensa de la serie. Hudde empieza a mostrar sus procedimientos. La discusión está centrada en los problemas de urnas, donde hay más descuerdo entre ambos, pues parece manifestarse que usan métodos distintos:

En mi última[7] *creía estar tan seguro de haber calculado todo bien (apoyándome, como vos escribíais, en los diferentes cálculos llevados a cabo, siguiendo dos vías diferentes, y que no eran nuevos sino los mismos con los que yo había resuelto las principales cuestiones contenidas en vuestro pequeño Tratado de "Rekening in spelen van geluk"*[8]*, y obtenido los mismos resultados que vos), que no he previsto la corrección de mis resultados obtenidos, sino que, todo lo contrario, estaba esperando que vos también estabais descubriendo el error de vuestros diferentes resultados, como yo había encontrado el mío con respecto a la 1ª cuestión y vos habíais tomado parte, y que, una vez puesto de acuerdo, con vuestra respuesta habríamos dado un final a estos cálculos en juegos de azar. Pero reconozco que nunca me ha llamado tanto la atención, ni se me ha mostrado más inesperado, que vuestra última del 7 del corriente que es la respuesta a mi precedente, en la cual veo que os habéis tomado la molestia de retomar con ardor vuestras meditaciones, más o menos procedentes de vuestra memoria, después de algún tiempo de descanso y que, sin embargo, al final habéis encontrado el mismo resultado que antes de 207/343, en lugar del mío, 9/245, añadís que no dudáis, de ningún modo, que yo, al revisar mis cálculos, encontraría que vuestro resultado es correcto.*

[7] Carta de Hudde del 29 de junio.

[8] Es el título en holandés del tratado de Huygens

Después, dado su desacuerdo con Huygens en los problemas de urnas, duda sobre la coincidencia de metodologías, aun habiendo coincidido en la solución de la última versión del cara y cruz.

> *Pero que, sin embargo, en vuestra última cuestión de cruz o cara, para convertir en iguales las chances de A y de B, habéis encontrado el mismo resultado que yo, a saber, que desde el inicio cada uno debería poner2/3 de un ducado.*
>
> *¿Cómo pueden estar bien, decidme vos, mis pensamientos tras leer todo esto por primera vez? Pues comprendí enseguida que no podíamos seguir considerando más nuestro acuerdo en alguna de nuestras 4 cuestiones, aunque en la primera y en la última los resultados fuesen los mismos de una parte y de otra, a la vista de que la regla general que vos teníais para cuestiones parecidas no estaría conforme con la mía, puesto que, de otra forma, vuestros dos resultados 207/343 y 105/131, habrían debido concordar con los míos de 9/245 y 0; pero que, probablemente, el acuerdo en las cuestiones primera y última habría nacido de la igualdad de las susodichas letras a, b, c, d, que en las otras han sido supuestas desiguales.*
>
> *Mis primeros pensamientos cayeron sobre mí mismo. ¿Estaría, quizás, de nuevo equivocado en mi cálculo? Sin embargo, hay poca posibilidad de que sea así, a la vista de que he calculado todo con dos métodos diferentes y que me habían dado resultados correctos en otras cuestiones, y que los he encontrado conformes. Pero, lo que vos conseguís en la 1ª cuestión, ¿no puede lograrse en las otras? Ciertamente; pero creo también que el fundamento de este error ha sido planteado de noche, mientras estabais medio dormido, y que yo he estado presente en mis otros cálculos con los sentidos muchos más despiertos. ¿Es que el Señor de Zuilichem*[9] *(estando ahora en posesión de mi regla general que, como otras, es de tal naturaleza que un único ejemplo entre un número infinito y, habitualmente, un ejemplo fácil de determinar, puede indicar la falsedad cuando no es buena) estaría, pues, aún equivocado? Y esto cuando, habiendo casi olvidado por completo sus razonamientos anteriores, ¿ha retomado de nuevo el asunto con ardor? He aquí lo que aún me parecía menos posible, en particular, al tener en cuenta la habilidad y finura de ideas que vos habéis alcanzado, en más alto grado que otros, en el asunto de los juegos de azar; y sobre todo cuando, al mismo tiempo, yo acababa de considerar el rango que ahora vos ocupáis entre los sabios y los más excelentes matemáticos de este siglo. Desde luego, si entonces hubiese estado obligado a arriesgar una chance con vos bajo las citadas condiciones, habría querido perder algo para ser excusado. Digo "algo", pero sin tener presente en tal caso mis razonamientos y, sin embargo, acordándome muy bien de la atención que le había prestado, me fiaba un poco de mis propias fuerzas. No obstante, dejé en ese instante el asunto a la mitad y suspendí mi opinión hasta un nuevo examen. Estaba dispuesto a volverme al campo para buscar algún descanso y, fuera del hormigueo y de la agitación de los ciudadanos, concentrar mis ideas que, desde hacía algún tiempo habían estado distraídas y dispersas por las desgracias de la República; e incluso, experimentando sobre mí mismo, saber hasta qué punto, en estos tiempos turbados, podría mantenerme tranquilo y libre de cualquier temor. Pero veo que las más altas montañas aparecen entre el dicho y el hecho, que nada es más fácil que descubrir el camino que lleva a la tranquilidad y nada es más difícil que seguirlo:*

[9] Es el título nobiliario de Huygens.

Rex est qui metuit nihil,

Rex est quique cupit nihil.[10]

Ahora bien, como vuestra regla general, que se adapta a esta última cuestión, debe ser aplicable también, necesariamente, a las precedentes, tal como vuestra primera cuestión de cruz o cara, se sigue claramente que, según ella podemos únicamente por azar encontrar resultados concordantes con la fracción de la primera cuestión y, por consiguiente, también de la última, que se deriva con muy poco cambio.

Y ahora creo que vos estáis también, por lo menos, tan sorprendido como lo estaba yo; pues, según me parece, no esperabais corrección a vuestras correcciones, aun diciendo lo contrario al final de vuestra carta, aunque sólo bromeando. Y quizás, sonreiréis ahora conmigo, de nuevo, viendo que hemos intercambiado tantas cartas de una y otra parte sobre estas cuestiones de juegos de azar, y que no hemos avanzado, sino que, más bien, hemos retrocedido, a la vista de que ahora no queda una sola cuestión sobre la que podamos asegurar estar completamente de acuerdo. Pero me parece, sin embargo, que comienza a llegar el momento de conseguir el final de este asunto, que ha durado bastante. El camino más corto para llegar será que os muestre uno de mis métodos, por el cual he resuelto todas las cuestiones de juegos de azar que hemos propuesto que, en su orden, son las cuatro que siguen; y así podría demostrar al mismo tiempo lo que he dicho arriba con respecto a vuestros resultados 207/343 y 105/131.

1ª Cuestión propuesta por vos.

A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que lance cara, pondrá un ducado, pero aquél que lance cruz se quedará con todo lo que hay puesto. Y A lanza el primero cuando aún no hay nada puesto. Se pide, ¿cuál es la ventaja de A cuando se compromete en esta partida, o cuánto debería dar a B para poder concluir?

Hemos dado los dos como respuesta que A perdería así 4/27 de un ducado.

4ª Cuestión propuesta por vos.

A y B lanzan por turnos a cruz y cara, bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá un ducado, pero aquél que lance cruz arramblará con todo lo que ha sido puesto; y A lanzará el primero. Se pregunta, ¿cuánto deberán poner A y B al principio, es decir, cada uno una misma cantidad, para conseguir que las condiciones de A y B lleguen a ser iguales?

Aquí damos los dos la misma solución, a saber, 2/3 de un ducado como lo puesto por cada parte.

Y entonces Hudde describe su método de cálculo para el caso de la extracción al azar desde una urna, e indica que es el mismo método que el que ha usado para resolver los problemas de cara y cruz.

Carta de Huygens de 28 de julio de 1665.

Creo ahora que pronto llegará un final para nuestras cuestiones sobre juegos de azar, pero hasta aquí no lo tenemos, y veo con asombro los singulares incidentes, que nos retienen tanto tiempo. No debéis pensar que yo bromeaba cuando decía al final de mi última[11] *que*

[10] Rey es el que no teme nada, Rey es el que no desea nada.
[11] En la carta de Huygens del 7 de julio.

esperaba de nuevo alguna corrección, pues nunca he tenido tal confianza en mí mismo como para creer que en el cálculo e incluso en el razonamiento no estaría sujeto a error, y ahora me siento aún más tímido que antes, viendo que el Señor Hudde, después de haber revisado su cálculo hasta 2 o 3 veces, y después de haber corregido con una mente despierta lo que había errado dormitando, y habiendo encontrado todo por dos vías diferentes, que le dan el mismo resultado— viendo todo esto, digo yo, sin embargo, él ha podido equivocarse. Estará, sin duda, extrañamente sorprendido de pensar esto, y todavía más cuando yo osaría a afirmar que no ha habido fallos en mis cálculos y que, cuando él y yo hemos obtenido un mismo resultado para una misma cuestión, yo he calculado correctamente y él mal. Todo esto lo haré ver aquí, no obstante, salvo corrección.

Se van aclarando las condiciones o hipótesis del problema:

Pues bien, debéis saber que al plantear mis cuestiones he omitido por descuido añadir al final que yo entendía que el juego no debía concluir antes de que algo hubiese sido puesto de una parte o de otra. Se deduce que vos habéis supuesto que si A, al inicio, lanza cruz, o bien, extrae una ficha blanca, el juego estaría concluido; y reconozco que mi descuido ha sido la primera causa. Pero vuestro fallo en el cálculo me ha impedido observar que provenía de algún malentendido, pues me di cuenta poco después de haber enviado mi última[12] *que esta omisión podría dar lugar a otra interpretación de mis problemas y no podía, sin embargo, presumir que esto estaba ocurriendo en efecto, al ver que vos habíais encontrado el mismo resultado que yo, de* $\frac{4}{27}$, *en la cuestión de cruz o cara*[13]*: dicha concordancia es ciertamente muy singular.*

Carta de Hudde de 21 de agosto de 1665.

Es una larga carta. En la misma, Hudde expone sus métodos. Es la última que se conserva de esta serie. Seguramente, hubo alguna carta respuesta por parte de Huygens, dado que Hudde le reclamaba en esta. De la carta hemos seleccionado algunos fragmentos:

No haber vuelto hasta anteanoche de un pequeño viaje al interior es la causa de que no os haya respondido antes a vuestra última, en la cual veo que tengo razón para creer que por fin habremos encontrado el desenlace completo de nuestras cuestiones sobre juegos de azar. A esto hemos llegado, como habitualmente se llega cuando se disputa, y después de media docena de horas de discusiones, habiendo encontrado por fin, con todo discutido, el verdadero status Quaestionis, llegándose en un momento a entenderse.

Pero me extraño con vos de tantas circunstancias singulares con las que nos hemos encontrado aquí. Y como no las conocíais aún todas, y para que al mismo tiempo pudieseis ver que yo nunca había calculado con error, ni incluso en lo que cambié en otro momento y llamé fallo, con el fin de que pudieseis conocer al mismo tiempo mi otro y primer método; -me tomaría aún el trabajo de deciros, cómo he considerado y calculado la cosa desde la primera vez. Y para hacerlo ordenadamente, debería retomarlo desde el comienzo.

Pues sois vos quién ha sido el primero en escribirme una carta[14] *sobre estas cuestiones de juegos de azar, en la cual habéis corregido dos resultados que os había dado para las*

[12] En la carta de Huygens del 7 de julio.
[13] En la carta de Hudde del 29 de junio.
[14] En la primera carta que se conserva de esta correspondencia. Carta de Huygens del 4 de abril.

cuestiones 2ª y 4ª incluidas al final de vuestro pequeño Tratado de los juegos de azar, que se encuentran sin su fracción[15]*, con lo que pudisteis ver si concordaban con las vuestras; a continuación me proponéis resolver vuestra primera cuestión de cruz o cara, en estos términos: A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquel que lance cara pondrá un ducado cada vez, pero que aquél que lance cruz tomará todo lo que hay puesto. Y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. La cuestión es ¿cuánto pierde A cuando entra en este juego, o cuánto debería dar a B para poder acabar?*

Después de haber mostrado en mi respuesta[16] *que había un doble sentido para estas 2ª y 4ª cuestión que habéis planteado, y que vuestros números tenían relación con uno de los dos sentidos y los míos con el otro, daba también 1/6 de un ducado como la solución de esto, pero añadía con premeditación estas palabras: pero quién sabe si estaremos incluso en dos o varias cuestiones; y, por consiguiente, muy bien podría ser vuestro turno, en caso de diferencia, de buscar el doble sentido. Tengo curiosidad por saber si estaremos de acuerdo, aunque no lo dudo, al menos si entendemos las palabras en el mismo sentido.*

En vuestra respuesta a esto[17] *me dejáis completamente fuera de fallo en lo que concernía al error sospechado, y atribuís la causa únicamente a vos mismo, por no haber planteado de forma conveniente y sin equívocos estas dos cuestiones; …*

A continuación, en cuanto a la otra cuestión de cruz o cara vos disipáis tan netamente, como si hubieseis conocido mis pensamientos cuando yo calculaba, el doble sentido que había encontrado, diciendo: Ahora bien, para evitar en lo que sigue cualquier doble sentido, añadiría aún esto, que entiendo que cada vez que A o B lanzan cara, deben poner un ducado, de manera que, a veces, pueden encontrarse puestos muchos ducados, antes de que por primera vez se lance cruz, es decir, antes de que se coja todo lo que ha sido puesto. No puedo ver que ahora quede aquí alguna incertidumbre, pero dudo si la cuestión es tomada por vos en esta acepción, puesto que vuestro cálculo, según el cual A perdería 1/6 de un ducado, no coincide con el mío, pues encuentro que A pierde 4/27 de un ducado.

A esto os he respondido[18] *de nuevo, que no había tomado la cuestión en este sentido indeterminado, aunque lo hubiese pensado, añadiendo mi razón; pero por provisión en este sentido: A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá un ducado pero únicamente por primera vez, etc; pero (continuaba yo) aunque no más que vos mismo, no podía ver que quedase aún alguna incertidumbre en los términos de la cuestión, aunque los resultados que encontramos no concuerdan: pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío 2/9. Y en esta carta os he propuesto por primera vez mi cuestión del juego equivalente, formada de las palabras de vuestra cuestión, tantas como el enunciado podía sufrir.*

Ahora, en vuestra respuesta[19] *a ésta encuentro la razón por la que vos me habéis propuesto esta cuestión de cruz o cara; a saber, porque juzgáis que era de otra categoría de cuestiones de todas las que se encontraban en vuestro Tratado impreso, y porque, al mostraros lo que yo había calculado con respecto a algunos juegos de azar, habría añadido que no pensaba que algo singular pudiese aún ser propuesto en esta materia. ¿No habría*

[15] Que aparecen en el Tratado sin su solución.
[16] En la segunda carta que se conserva de esta correspondencia. Carta de Hudde del 5 de abril.
[17] En la carta de Huygens del 10 de abril.
[18] En la carta del 5 de mayo.
[19] En la carta del 10 de mayo.

dicho que no pensaba que en esta materia algo singular podría ser aún propuesto, cuyos fundamentos no estuviesen comprendidos en lo que yo había escrito en estas hojas de papel? Puesto que yo había resuelto más cuestiones, incluso siguiendo otras formas, que no se encontraban en vuestro Tratado. Seguramente creo haber querido decir únicamente esto, y permanezco aún en la misma opinión.

A continuación, Hudde explica su forma de resolver, que nosotros mostraremos en el siguiente apartado, pero con un lenguaje actualizado.

Siguen otros fragmentos (aquí el autor usa la palabra chance como sinónimo de probabilidad o, incluso, esperanzas):

Cuando tenía calculado esto, calculé también, por añadidura y de la misma manera, la chance de B, y encontré que B ganaba en un sentido 1/6 y en el otro 2/9 de un ducado, lo que concuerda con lo que precede. La razón por la que yo interpretaba primero la cuestión en este primer sentido antes que en el 2º, aparecería aquí claramente, puesto que, proponiendo esta cuestión, vos habéis añadido que yo me prestaría más fácilmente a buscar la solución que se admitía que no necesitaba mucho cálculo, pero que únicamente el camino era encontrar para alcanzar el objetivo, -no podía aplicar estas palabras a este 2º cálculo, pero sí al 1º. Y como estaba somnoliento y era el momento de dormir, no me parecía adecuado hacer este cálculo en la incertidumbre sino, más bien, haceros conocer con mi solución que esta cuestión, igual que los dos precedentes, no estaba exenta de equívoco, y a continuación esperar sobre esto vuestra propia determinación posterior. Pero, ¿cuál puede ser, pensáis ya vos, la razón de este cambio? Al regresar a casa, del viaje, juzgaba que lo mejor sería, antes de enviaros esta carta, examinar aún una vez más si sabría encontrar de dónde obtenéis vuestra fracción de 4/27 que, de nuevo, afirmabais[20] ser la cierta. Y reconozco que esta investigación me ha costado 3 veces tanto tiempo como todo el resto. No pensaba más que en un doble sentido de las palabras, tales como ellas eran, como ahora habéis buscado ya, con reflexión, quitando todo equívoco, y además yo no había percibido otro. No pensaba en un fallo de mi cálculo, puesto que no podía creer haberlo cometido, después de haber encontrado el mismo resultado, y esto para dos números bastante diferentes, puesto que las progresiones infinitas eran totalmente distintas de una parte y de otra. No podía más dudar de mi razonamiento, dado que se apoyaba en un Teorema bastante simple, el cuál era, según creo, el 1º de vuestro Tratado[21].

. . .

Después de haber ensayado, tanto esto como aquello, pensé por fin que A, al lanzar cruz y así concluir el juego, acabaría ganando tanto de esta manera como lo que pierde por la condición del juego. Ahora bien, en este pensamiento donde se puede caer fácilmente[22] hay, evidentemente, un doble sentido en la palabra ganar; pues se puede tomar de manera que, al lanzar A cruz, B no tendría que dar nada a A, y en tal sentido ya había encontrado la fracción de 1/6 y de 2/9, y vos lo habíais copiado; o bien, en el sentido que A, al lanzar cruz, ganaría, es decir, recibiría tanto de B como lo que perdería por la condición del juego.

. . .

[20] En la carta de 10 de mayo.

[21] Se refiere a la tercera proposición del Tratado de Huygens, que hemos citado en la introducción.

[22] Sobre la propia carta de Hudde y en este lugar concreto Huygens escribe “esto no me parece, en absoluto”.

Veis, pues, que esta cuestión de cruz o cara que habéis propuesto es mucho más fecunda que las 2ª y 4ª situadas al final de vuestro Tratado, las cuales no son más que duplicadas, mientras que ésta ha engendrado al menos otras dos, como había presumido en mi última respuesta.

. . .

En fin, Señor, veis que el esfuerzo que me he tomado para conciliar nuestros pensamientos, y que he tendido en todas nuestras cuestiones sobre juegos de azar, sin embargo, para las tres últimas no ha conseguido aún lograrlo antes de que mis cálculos generales os hayan llegado, si os place explicar con más precisión vuestra opinión. A esto, pues, en lo que sigue (si de nuevo algo similar ocurriese) sería mejor prestar atención: pues podéis estar seguro que de lo contrario me empeñaría muy fácilmente en el mismo laberinto, por ser desafortunado al adivinar vuestra opinión y, sin embargo, estar dispuesto al más alto grado de armonía en nuestros pensamientos.

3. Soluciones a los problemas de cara y cruz dadas por los dos autores

Los jugadores, A y B, lanzan una moneda equilibrada en un juego a cara o cruz, siendo A el primero en lanzar. Por lo tanto, la secuencia continua de jugadas es ABABAB ... Si se lanza cruz, el jugador que lo lance debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara, el jugador que lo lance se lleva todo lo que hay en la mesa. A lo largo de la correspondencia los autores intercambian, descuidadamente, el papel del lanzamiento cruz y lanzamiento cara. En las soluciones que vamos a aportar siempre usaremos el lanzamiento de cruz como el caso en que hay que poner un ducado por parte del que lo lanza, y el de cara como el caso contrario que, para cada versión del problema tendrá un significado distinto. Al comienzo del juego, no hay nada en la mesa. Para entender mejor la exposición que sigue presentamos 2 ejemplos de posibles resultados de este juego (representamos por + el suceso salir cruz en un lanzamiento, y por c, el suceso salir cara):

- Si, por ejemplo, se observó la secuencia de jugadas + + + + + + c, o sea, el juego se ha resuelto en 7 lanzamientos, en los que los 6 primeros han sido + y el séptimo ha sido c, tenemos que el jugador A ha tenido que poner 3 ducados, por las tres + lanzadas en 1º, 3º y 5º lugar, y el jugador B también ha puesto 3 ducados por las cruces lanzadas en 2º, 4º y 6º lugar. Como la cara lanzada en séptimo lugar ha sido lanzada por A, entonces este jugador se lleva todo lo que está en la mesa, 6 ducados, de los que 3 son puestos por él, y 3 puestos por B. Por tanto, la ganancia del jugador A, con este resultado, sería de 3 ducados.
- Si, por ejemplo, se observó la secuencia + + + c, o sea, el juego fue resuelto en 4 lanzamientos, y la cara fue lanzada por B, el jugador A ha puesto 2 ducados (por las + lanzadas por él en 1º y 3º lugar), y el jugador B ha puesto 1 ducado (por la cruz lanzada por él en 2º lugar). Entonces, cuando se va a realizar el 4º lanzamiento hay en la mesa 3 ducados. El 4º lanzamiento lo realiza B y obtiene c. Se lleva todo lo que está en la mesa, 3 ducados, de los que 1 lo ha puesto él y 2 los ha puesto el jugador A. La ganancia del jugador B con este resultado es de 2 ducados. La pérdida del jugador A, por lo tanto, es de 2 ducados.

1.1 Soluciones de Hudde a las dos primeras variantes

En el supuesto de Hudde, si el juego comienza con el lanzamiento de una cara, el juego concluye. En ese caso la ganancia de A sería 0, igual que la de B. Por tanto, para que haya dinero en la mesa todos los juegos deben proceder necesariamente con una secuencia de cruces seguida de una única cara.

3.1.1 Primera variante de Hudde del problema

En sus pensamientos iniciales, Hudde supone que cada jugador pone únicamente 1 ducado en la primera ocasión que le sale +. En el resto de + que le van saliendo a cada jugador antes de que salga c ya no ponen nada sobre la mesa. La siguiente tabla muestra la secuencia de posibles resultados:

Tabla 1. Posibles resultados de la primera variante de Hudde del problema de cara y cruz.

Posibles resultados del juego	Ganador del juego	Probabilidad de que se dé ese resultado	Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento	Ganancia del jugador A
c	A	$(1/2)^1 = 1/2$	0	0
+ c	B	$(1/2)^2 = 1/4$	1	-1
+ + c	A	$(1/2)^3 = 1/8$	2	1
+ + + c	B	$(1/2)^4 = 1/16$	2	-1
+ + + + c	A	$(1/2)^5 = 1/32$	2	1
+ + + + + c	B	$(1/2)^6 = 1/64$	2	-1
+ + + + + + c	A	$(1/2)^7 = 1/128$	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hudde.

Fijándonos en la tabla anterior, la pérdida esperada de A sería:

$$(-1)\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{16}+(-1)\cdot\frac{1}{64}+\cdots=-\underbrace{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right]}_{\substack{\Uparrow\\ \text{Progresión geométrica de razón}\\ \frac{1}{4}\text{ y primer término }\frac{1}{4}}}=-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{3}$$

Y la ganancia esperada de A sería:

$$1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{1}{128}+\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{4}\right)^7+\cdots=\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}}_{\substack{\Uparrow\\ \text{Progresión geométrica de razón}\\ \frac{1}{4}\text{ y primer término }\left(\frac{1}{2}\right)^3}}=\frac{1}{6}$$

Por tanto, el saldo esperado para el jugador A (diferencia entre ganancia y pérdida esperada): $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$, que coincide con la solución dada por Hudde en su carta de 4 de abril, cuando escribe *he encontrado que B en estas condiciones, conseguirá de provecho 1/6 de un ducado.*

3.1.2 Segunda variante de Hudde del problema

Posteriormente, los dos autores coinciden en el supuesto de que los jugadores pondrán sobre la mesa 1 ducado cada vez que lancen +. Veamos ahora la solución de Hudde para este caso. Recurrimos de nuevo a la construcción de una tabla de posibles resultados:

Tabla 2. Posibles resultados de la primera variante de Hudde del problema de cara y cruz.

Posibles resultados del juego	Ganador del juego	Probabilidad de que se dé ese resultado	Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento	Ganancia del jugador A
c	A	$(1/2)^1 = 1/2$	0	0
+ c	B	$(1/2)^2 = 1/4$	1	-1
+ + c	A	$(1/2)^3 = 1/8$	2	1
+ + + c	B	$(1/2)^4 = 1/16$	3	-2
+ + + + c	A	$(1/2)^5 = 1/32$	4	2
+ + + + + c	B	$(1/2)^6 = 1/64$	5	-3
+ + + + + + c	A	$(1/2)^7 = 1/128$	6	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hudde.

Igual que antes, calculamos la pérdida esperada del jugador A:

$$(-1)\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\frac{1}{16}+(-3)\cdot\frac{1}{64}+\cdots=-\underbrace{\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=-\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}}_{\substack{\text{Progresión aritmético-geométrica de razón } \frac{1}{4} \\ \text{y n}^{\text{o}} \text{ naturales en la parte aritmética}}}=-\frac{4}{9}$$

Y el ingreso esperado de A:

$$1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{32}+3\cdot\frac{1}{128}+\cdots=\underbrace{\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\cdots=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}}_{\substack{\text{La misma progresión aritmético-geométrica de la obtenida para} \\ \text{el valor esperado de lo que pierde el jugador A}}}$$

Por tanto, la diferencia de ambas cantidades nos dará el **beneficio esperado del jugador A** en este juego:

$$\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$$

Es el resultado que ofrece Hudde en su carta de 5 de mayo: *"los resultados que hemos encontrado no coinciden, pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío, 2/9"*

3.2 Solución de Huygens a su propia variante

Huygens supone que el juego no concluye hasta que por lo menos un ducado ha sido puesto sobre la mesa. Por tanto, se admite la posibilidad de una secuencia de caras al principio en las que ni uno ni otro deposita dinero. En el caso de Hudde, recordamos que, si en el primer lanzamiento, efectuado por A, salía cara, el juego concluía sin ganancia ni pérdida para ninguno de los jugadores. Bajo la propuesta de Huygens podría darse, por ejemplo, esta secuencia de lanzamientos: c c c c + + + c, o sea, tras 8 lanzamientos ha ganado el jugador B por ser el primero que consigue cara tras haberse puesto dinero sobre la mesa. Según esa secuencia, en los cuatro primeros lanzamientos, ninguno de los dos lo ha puesto. En el 5º lanzamiento el jugador ha puesto un ducado, en el 6º ha sido el jugador B el que lo pone, en el 7º de nuevo pone un ducado el jugador A, y en el 8º el jugador B consigue c por lo que se lleva los 3 ducados que hay sobre la mesa, de los que 1 ha sido puesto por él y 2 por A, por lo que la ganancia de B ha sido de 2 ducados, y la pérdida de A es 2 ducados. Desde luego, si la secuencia completa está formada por un número par de lanzamientos, entonces ganará B y, si es impar, ganará A.

Vamos a distinguir dos posibles situaciones:

- **Número par de caras al principio de la secuencia**, o sea, antes de la primera cruz, incluyendo aquí la posibilidad de 0 caras. Después se puede suceder un número par o impar de cruces y, por último, una cara. Esta última sucesión tiene una valoración para A, o sea, un

$-\frac{2}{9}$, según hemos visto en el apartado anterior, dado que la primera cruz es lanzada por A.

La tabla que sigue nos muestra la ley de probabilidad que rige los lanzamientos pares y previos de caras y sus correspondientes valoraciones para el jugador A:

Tabla 3. Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, para el caso de una secuencia inicial par de caras.

Nº de caras en la secuencia inicial	Probabilidad de que se dé ese número de caras	Valoración de este resultado para el jugador A
2	$(1/4)^1 = 1/4$	$(1/4)^1 \cdot (-2/9)$
4	$(1/4)^2 = 1/16$	$(1/4)^2 \cdot (-2/9)$
6	$(1/4)^3 = 1/64$	$(1/4)^3 \cdot (-2/9)$
8	$(1/4)^4 = 1/256$	$(1/4)^4 \cdot (-2/9)$
10 ⋮	$(1/4)^5 = 1/1024$ ⋮	$(1/4)^5 \cdot (-2/9)$ ⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.

La suma de la última columna nos proporciona la valoración del juego para el jugador A en el caso en el que secuencia inicial de caras sea par. Aquí hemos de añadir un sumando más, el que corresponde a no salir cara al principio (también con valoración $-\frac{2}{9}$). Entonces, poniendo este sumando al principio:

$$\left(-\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\cdots=\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=$$
$$=\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{8}{27}$$

- **Número impar de caras al principio de la secuencia**, o sea, antes de la primera cruz. En este caso es el jugador B el que lanza la primera cruz. La secuencia inicial de caras, entonces, se describe en la siguiente tabla:

Tabla 4. Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, para el caso de una secuencia inicial impar de caras.

Secuencia inicial de caras	Nº de caras en la secuencia inicial	Probabilidad de que se dé ese número de caras
c	1	$(1/2)^1 = 1/2$
c c c	3	$(1/2)^3 = 1/2 \cdot (1/4)$

c c c c c	5	$(1/2)^5 = 1/2\cdot(1/4)^2$
c c c c c c c	7	$(1/2)^7 = 1/2\cdot(1/4)^3$
c c c c c c c c c ⋮	9 ⋮	$(1/2)^9 = 1/2\cdot(1/4)^4$ ⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.

La suma de la última columna es la de una progresión geométrica de razón 1/4, y primer término 1/2. Dicha suma es 2/3.

El análisis de la secuencia de resultados de los lanzamientos posteriores se puede analizar con independencia del número de caras lanzadas en la secuencia inicial, o sea, siendo válido el resultado que obtengamos para cualquiera que sea dicho número inicial de caras. En la tabla que sigue describimos esos posibles resultados teniendo en cuenta que quien lanza la primera cruz es el jugador B.

Tabla 5. Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, en la situación posterior a la secuencia inicial de caras.

Posibles resultados del juego después de la secuencia inicial de caras	Ganador del juego	Probabilidad de que se dé ese resultado	Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento	Ganancia del jugador A
+ c	A	$(1/2)^2 = 1/4$	1	1
+ + c	B	$(1/2)^3 = 1/8$	2	-1
+ + + c	A	$(1/2)^4 = 1/4^2$	3	2
+ + + + c	B	$(1/2)^5 = 1/32$	4	-2
+ + + + + c	A	$(1/2)^6 = 1/4^3$	5	3
+ + + + + + c ⋮	B ⋮	$(1/2)^7 = 1/128$ ⋮	6 ⋮	-3 ⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.

El ingreso esperado del jugador A sería:

$$1\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^4}+3\cdot\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{4}{9}$$

Y la pérdida esperada para este jugador:

$$(-1)\cdot\frac{1}{2^3}+(-2)\cdot\frac{1}{2^5}+(-3)\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$$

Combinamos ganancia y pérdida: $\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$. Y este resultado es válido para cualquier número de caras inicial. Entonces, multiplicamos por la suma de las probabilidades de todas las posibles secuencias de caras iniciales:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$$

Esta es la ganancia esperada de A si se produce un número impar de caras al principio de la secuencia.

Por último, combinamos la ganancia esperada del jugador A para el caso de una secuencia inicial par de caras con esa misma ganancia para una secuencia impar:

$$-\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=-\frac{4}{27}.$$

Es el resultado que Huygens defiende en esta correspondencia.

3.3 Solución de Huygens y Hudde a otra variante del problema

Como hemos visto, a lo largo de la correspondencia los autores van introduciendo hipótesis y matices que generan nuevas versiones del problema inicial. En la que resolvemos ahora, los dos coincidieron rápidamente en la solución. Podemos decir, que es la versión del problema en la que menos discusión hubo para su resolución. El enunciado del problema podría ser:

"Los jugadores A y B lanzan una moneda justa en un juego a cara o cruz siendo A el primero en lanzar. Si se lanza cruz, el jugador que la haya lanzado debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara, el jugador que la lance coge todo lo depositado en la mesa. Al inicio de juego la mesa tiene en depósito una cantidad desconocida *M*, habiendo puesto la mitad cada jugador. Se pregunta cuánto debe valer *M* para que el juego sea justo".

La idea de juego justo era inherente a los primeros estudiosos del cálculo de probabilidades: un juego es justo si, al iniciarse el juego, la esperanza de la ganancia de cada jugador es nula (ni ganancia ni pérdida esperada para cada jugador al inicio del juego).

Como se ha dicho, en la solución y resolución de este problema los dos autores coinciden. Mostramos esa resolución en un lenguaje actual. Inicialmente, sobre la mesa hay una cantidad

M, de manera que siendo A el primero que lanza, si lanza cara entonces se acaba el juego y el jugador A coge esa cantidad M y, por tanto, la ganancia de A sería, $M/2$. Con este punto de partida construimos la siguiente tabla de posibles resultados para este juego.

Tabla 6. Posibles resultados de la segunda variante de Huygens y Hudde del problema de cara y cruz.

Posibles resultados del juego	Ganador del juego	Probabilidad de que se dé ese resultado	Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento	Ganancia del jugador A
c	A	$(1/2)^1 = 1/2$	M	$\frac{M}{2}$
+ c	B	$(1/2)^2 = 1/4$	$M+1$	$-\frac{M}{2}-1$
+ + c	A	$(1/2)^3 = 1/8$	$M+2$	$\frac{M}{2}+1$
+ + + c	B	$(1/2)^4 = 1/16$	$M+3$	$-\frac{M}{2}-2$
+ + + + c	A	$(1/2)^5 = 1/32$	$M+4$	$\frac{M}{2}+2$
+ + + + + c	B	$(1/2)^6 = 1/64$	$M+5$	$-\frac{M}{2}-3$
+ + + + + + c ⋮	A ⋮	$(1/2)^7 = 1/128$ ⋮	$M+6$ ⋮	$\frac{M}{2}+3$ ⋮

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hygens y Hudde.

Según la tabla, el ingreso esperado de A sería:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{M}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{M}{2}+2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{M}{2}+3\right)+\cdots=$$

$$=\frac{M}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{M}{3}+\frac{2}{9}$$

Y la pérdida esperada de A:

$$\left(-\frac{M}{2}-1\right)\frac{1}{4}+\left(-\frac{M}{2}-2\right)\frac{1}{16}+\left(-\frac{M}{2}-3\right)\frac{1}{64}+\cdots=$$
$$=\left(-\frac{M}{2}\right)\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right]-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right)=$$
$$=-\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=-\frac{M}{6}-\frac{4}{9}$$

El saldo entre ingresos y pérdida ha de ser 0: $\frac{M}{3}+\frac{2}{9}-\frac{M}{6}-\frac{4}{9}=0$. De aquí obtenemos

$M=\frac{4}{3}$. Cada jugador debe poner $\frac{2}{3}$ de ducado en el juego.

3.4 Solución de Huygens y Hudde a la última variante del problema

La última variante del problema de lanzar a cara y cruz también fue propuesta por Huygens a Hudde, en el contexto de esta correspondencia, pero desconociéndose la fecha, dado que no se dispone de la carta que contenía su enunciado. Se sabe que Huygens trabajó en este problema el 15 de julio de 1665, donde obtiene la ventaja de A que es -1/6 ducado. En el Anexo V del Tratado de Huygens (se encuentra en el tomo XIV de las Obras Completas) escribe este autor en el último apartado de este anexo:

> *15 de julio de 1665.*
>
> *En las Págs. 19 y 20*[23] *hemos intentado la solución de la siguiente cuestión que aquí será resuelta:*
>
> *A y B lanzan cada uno en su turno a cruz (croix) o cara (pile), con la condición de que aquel que lance cara pondrá cada vez un ducado en la apuesta, pero el que lance cruz recibirá cada vez un ducado si hay algo puesto. Y A lanzará el primero cuando aún no hay nada en la apuesta, y el juego no acabará antes de que algo haya sido puesto, y se jugará hasta que todo haya sido acabado. Se pide cuál es la desventaja de A. Hace* $\frac{1}{6}$ *de un ducado.*

También tenemos el apéndice nº 1447 (según numeración de las Obras Completas), incluido en el Tomo V de las mismas) de Hudde, que debe estar fechado después del 21 de agosto de 1665, en el que obtiene el equivalente: se espera que B gane 1/6 de ducado. Leemos en dicho anexo:

> *Solución de una cuestión relacionada con la ventaja y desventaja de dos jugadores.*
>
> *A y B juegan sin que nada haya sido puesto, y estipulan que aquél que lance cara pondrá un ducado, y el que lance cruz, cogerá un ducado, con la condición de que A lanzará el primero. Se pide la ventaja de B. Respuesta* $\frac{1}{6}a$.

[23] Estas páginas del manuscrito contienen cálculos que corresponden en parte a los que aquí siguen, pero que no fueron terminados.

Mostramos, a título de anécdota, la resolución que Hudde incluye en este apéndice. En ésta, el autor admite la interpretación de Huygens sobre la manera en que el juego debe concluir, es decir, supone que el juego no concluye antes de que algo haya sido puesto de una parte o de otra. Está claro, pues, que este anexo debe ser posterior a las cartas del 28 de julio (de Huygens a Hudde) y del 21 de agosto (de Hudde a Huygens). Se utiliza el símbolo $\propto$ como signo igual. Hudde comienza indicando que *a* es igual a un ducado.

Tabla 7. Resolución literal de Hudde de una de las variantes del problema de cara y cruz, traducida al español.

$a \propto$ un ducado

Ventajas y desventajas de B.		
x	Cuando A debe lanzar sin que nada haya sido puesto.	$x \propto \frac{z-x}{2}$. Luego $3x \propto z$.
	Por consiguiente	
	Cuando B debe lanzar sin que nada haya sido puesto, él tiene $-x$	
	Cuando ha sido puesto un ducado por A y B debe lanzar.	
z	La desventaja del lanzamiento, cuando por A y por B ha sido puesto *uno* contra *uno*, y que A debe lanzar.	$z \propto \frac{a-y}{2}$
	Por consiguiente	$-y \propto \frac{z-a+q}{2}$. Luego
$-y$	Cuando ha sido puesto 2 contra 2 y que A debe jugar, la desventaja es de nuevo $-y$.	$-2y \propto z-a+q$. Cuando ahora se pone en lugar de z y de q los valores que se han encontrado, se obtiene
Nota.		$-2y \propto \frac{a-y}{2} - a + \frac{-2y+a}{2}$
Si se quisiera negar este corolario[24] la		y llega tras la reducción

[24] En el siguiente anexo (documento nº 1448) Hudde se esfuerza inútilmente en llegar a una solución sin hacer uso del corolario en cuestión.

cuestión es imposible de encontrar, si no es por una progresión.[25]		$-4y \propto -3y + 2a - 2a$ donde añadiendo $3y$ en los dos lados $-y \propto 2a - 2a$, luego $-y \propto 0$. Pero z era $\propto \frac{a-y}{2}$. Luego $z \propto \frac{1}{2}a$. Luego $3x \propto \frac{1}{2}a$ y $x \propto \frac{1}{6}a$. Quod erat Demonstrandum.
q	Cuando dos ducados han sido puestos por A y por B, y B debe lanzar.	$q \propto \frac{-2y+a}{2}$

Elaboración propia a partir del apéndice de Hudde.

Veamos una resolución con lenguaje algebraico actual.

Suponemos que A es el primero en lanzar, y que la secuencia de lanzamientos es la misma que en todas las versiones anteriores, ABABAB … Al inicio del juego nada hay puesto sobre la mesa. Si se lanza cruz, el jugador que lo lanza debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara el jugador debe coger un ducado de la mesa si la misma no está vacía. Por tanto, debe haber al menos un ducado en la mesa. El juego, entonces, continúa hasta que la mesa se queda vacía.

Si se produce una secuencia inicial de caras, durante la misma el juego no concluye y no se aporta nada a la mesa. Por tanto, nos interesan las secuencias a partir de la primera cruz. Contando esa primera cruz, el número de lanzamientos que haga que el juego concluya ha de ser par, dado que por cada lanzamiento que genera el depósito de un ducado debe haber otro equivalente más adelante para la retirada del mismo.

La siguiente tabla nos ilustra sobre el proceso en el que se podría desarrollar este juego. Hay que tener en cuenta que, cuando en la secuencia a partir de la primera cruz se produzca la coincidencia entre el número de cruces y el número de caras, el juego concluye:

Tabla 8. Posibles resultados de la última variante de Huygens y Hudde del problema de cara y cruz.

[25] En el anexo nº 1449 Hudde intenta demostrar por medio de una progresión que el valor de y es igual a cero.

<table>
<tr><th>Número previo de caras antes de la primera cruz</th><th>Número de lanzamientos a partir de la primera cruz (incluyendo esta cruz)</th><th>Posibles resultados a partir de la primera cruz</th><th>Probabilidad de que se dé ese resultado</th><th>Ganancia del jugador A</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Número par, incluyendo la posibilidad de 0 caras</td><td>2</td><td>+ c</td><td>$(1/2)^2 = 1/4$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+ + c c</td><td>$(1/2)^4$</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>+ + + c c c</td><td>$(1/2)^6$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>+ + c + c c</td><td>$(1/2)^6$</td><td>+1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">8</td><td>+ + + + c c c c</td><td>$(1/2)^8$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>+ + + c + c c c</td><td>$(1/2)^8$</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>+ + + c c + c c</td><td>$(1/2)^8$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>+ + c + c + c c</td><td>$(1/2)^8$</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>+ + c + + c c c</td><td>$(1/2)^8$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>

Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hygens y Hudde.

De la tabla se deduce que, para 4 lanzamientos, la ganancia esperada de A es 0: $0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0$.

También, para 6 lanzamientos: $-1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0$.

También, para 8 lanzamientos: $0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0$

$(-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$. Ahora bien, esa pérdida de 1/4 se puede dar para todas las posibles secuencias previas pares de caras, Cuyas probabilidades suman:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{1}{3}$. A esto hay que sumarle el caso en que no hay caras al principio de la secuencia: $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. Por tanto, la ganancia esperada de A en el caso de una secuencia previa par de caras es:

$$\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Una tabla similar a la anterior se puede construir para el caso en el que el número de caras antes de la primera cruz sea impar. En este caso, el jugador que lanza la primera cruz es B. Podemos copiar la tabla cambiando sólo los signos correspondientes a las ganancias del jugador A. Igual que antes, todos los valores esperados de ganancia se anulan salvo en el primer caso, en el que la esperanza de A sería $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Esto sería para cualquier número impar de lanzamientos previos de caras, cuyas probabilidades suman:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{2}{3}.$$

Por tanto, la ganancia esperada de A cuando se produce un número previo impar de caras es $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$.

Combinando el caso previo con el número par de caras con el del número impar tenemos $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$. Tal y como obtuvieron los dos autores, coincidiendo una vez más en sus soluciones.

4. Conclusiones

El nuevo cálculo de probabilidades se estaba consolidando. Tras las bases establecidas por Pascal, Fermat, y el propio Huygens con su tratado, nuevos problemas, con sus soluciones, se iban incorporando paulatinamente. En un principio, casi todos relacionados con juegos de azar. Entonces, para estos autores los problemas abordados no dejaban de ser más que un divertimento matemático. Tanto Huygens como Hudde lo ponen de manifiesto en la correspondencia cuando dudan sobre el tiempo que han de dedicar a la resolución de este tipo de problemas. Ellos no entran en situaciones reales de juegos de azar reales. No son jugadores, son científicos. Todavía, la aplicación práctica del cálculo de probabilidades no se considera. En este contexto surge la correspondencia de 1665 entre ambos autores e, incluida en ella, un problema sobre lanzamiento de una moneda equilibrada que, en el devenir de la propia correspondencia, acaba generando varias versiones distintas, que se van resolviendo de manera correcta. Ya se vislumbra la necesidad de máxima precisión en el enunciado de los propios problemas, de establecimiento de hipótesis claras y perfectamente delimitadas, con objeto de evitar malos entendidos y limitar así la lectura de distintos posibles enunciados, dependiendo de quién sea la persona que lee. Los autores muestran imaginación en la construcción de los enunciados y una importante habilidad de cálculo, con un álgebra incipiente, más engorroso que el actual. La suma de progresiones geométricas y aritmético-geométricas son un ejemplo de ese dominio. La incorporación de estos problemas en la docencia, para alumnos que se inician en este tipo de cálculo, es un aliciente interesante.

Referencias

[1] DAVID, F. N. (1962). *Games, Gods and Gambling.* Charles Griffin & Co. Ltd., London.

[2] FREUDENTHAL, H. (1980). Huygens' Foundations of Probability. *Historia Matemática*, 7, 113-117.

[3] HACKING, I. (1975). *The emergence of probability.* Cambridge University Press.

[4] HALD, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

[5] HOLGATE, P. (1984). The Influence of Huygens' Work in Dynamics on his Contribution to Probability. *International Statistical Review*, 52, 2, 137-140.

[6] HUYGENS, C. *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. 1888-1950. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, V, y XIV.

[7] KENDALL, M.G. (1956). The beginnings of a probability calculus. *Biometrika,* 43, 1-14.

[8] PEARSON, K. (1978). *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries.* Charles Griffin & Company Limited, Sussex.

[9] REIERSOL, O. (1968). Notes on some propositions of Huygens in the Calculus of Probability. *Nordisk Matematsk Tidskrift*, 16, 88-91.

[10] SCHNEIDER, I. (1980). Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities. *Janus* LXVII, 269-279.

[11] SHOESMITH, E. (1983). Expectation and the Early Probabilists. *Historia Mathematica*, 10, 78-80.

[12] STIGLER, S. M. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900.* The Belknap Press of Harvard University Press. London.

[13] TODHUNTER, I. (1865) *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

Sobre los autores:
Nombre: José Antonio Camúñez Ruiz
Correo Electrónico: camunez@us.es
Institución: Universidad de Sevilla, España

Nombre: María Dolores Pérez Hidalgo
Correo Electrónico: mdperez@us.es
Institución: Universidad de Sevilla, España