

MEDIACIONES REALIZADAS A ESTUDIANTES DE SEGUNDO DE PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

Romina Narváez Orellana y María C. Cañadas Santiago

El estudio se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico en educación primaria. Trabajamos con seis estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) una tarea de generalización durante entrevistas semiestructuradas individuales. Nos centramos en las mediaciones del investigador-docente que guio dichas entrevistas. Se pretende describir la generalización de los estudiantes antes y después de las mediaciones realizadas. Los resultados destacan que, al finalizar las entrevistas, los seis estudiantes generalizaron algunos de forma correcta y otros de forma incompleta. Identificamos que las mediaciones tuvieron un rol fundamental para la identificación de la regularidad de la tarea planteada, permitiéndoles corregir errores y justificar.

Términos clave: Educación primaria; Generalización; Mediación; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional

Mediations Carried out with Second Graders in a Generalization Context

This study is developed within the field of algebraic thinking in elementary school. We worked with six second graders (7-8 years old) on a generalization task during individual semi-structured interview. We focused on the mediations of the researcher-teacher who guided these interviews. The research objective is to describe the generalization of the students before and after the mediations. The results highlight that, at the end of the interviews, all six students generalized, some of them correctly and others incompletely. We also identified that the mediations played a fundamental role in identifying the regularity of the task, allowing the students to correct errors and justify.

Keywords: Algebraic thinking; Elementary education; Functional thinking; Generalization; Mediation

Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA*, 17(3), 239-264. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153>

Mediações realizadas com estudantes do segundo ano num contexto de generalização

O estudo é desenvolvido no campo do pensamento algébrico no ensino primário. Trabalhamos com seis alunos no segundo ano do ensino primário (7-8 anos) em uma tarefa de generalização durante entrevistas individuais semiestruturadas. Focamos nas mediações da professora-pesquisadora que orientou essas. Pretende-se descrever a generalização dos estudantes antes e depois das mediações realizadas. Os resultados salientam que, no final das entrevistas, os seis estudantes generalizaram, alguns correctamente e outros de forma incompleta. Identificámos também que as mediações desempenharam um papel fundamental na identificação da regularidade da tarefa, permitindo aos estudantes corrigir erros e justificar.

Palavras-chave: Ensino primário; Generalização; Mediação; Pensamento algébrico; Pensamento funcional

Investigaciones relacionadas con el *early algebra* han descrito que los estudiantes de los primeros cursos pueden desarrollar tareas que aborden funciones y que más de los estudiantes de lo que se podría esperar son capaces de generalizar (e.g., Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2021). Trabajar con pensamiento funcional puede ayudar a niños y niñas a desarrollar distintas habilidades matemáticas que les permitan aprender y comprender el álgebra de mejor forma. La percepción y generalización de patrones y relaciones son algunas de esas habilidades que facilitan herramientas para alcanzar el conocimiento matemático (Castro et al., 2010; Kaput, 2008; Molina y Cañadas, 2018).

En el trabajo con el enfoque funcional, el estudiante puede utilizar “diversas herramientas lingüísticas y de representación, tratando relaciones o funciones generalizadas que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio” (Blanton y Kaput, 2004, p. 35). Una forma de abordar la generalización con estudiantes de primaria es a través de actividades o situaciones que involucren una función lineal (Cañadas, 2016; Torres et al., 2021). Pero para trabajar el pensamiento funcional con los primeros cursos, es necesario adaptarlo al nivel educativo donde se trabaja, planteando actividades que incentiven el razonamiento matemático (Cañadas y Molina, 2016).

Trabajar el pensamiento funcional no es una tarea sencilla. Debemos considerar las distintas actuaciones que ayuden a los estudiantes a resolver dudas, corregir errores y motivarlos a lograr el objetivo matemático. Una forma de apoyar a los estudiantes en este proceso es la mediación, considerada como un proceso de interacción social, donde se trabaja de forma conjunta para producir conocimiento (Rodríguez et al., 2008).

Existen investigaciones que han analizado la generalización y las mediaciones o acciones por parte de un docente o investigador-docente, con estudiantes de los últimos cursos de educación primaria y de secundaria (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Mata-Pereira y Da Ponte, 2017; Ureña et al., 2019). Estos estudios han mostrado que las acciones de interacción o mediaciones han favorecido el avance de los estudiantes hacia la generalización.

En este estudio describimos las mediaciones realizadas por parte de un investigador-docente durante el desarrollo de entrevistas semiestructuradas a seis estudiantes de segundo año de Educación Primaria, identificando los tipos de mediaciones y cuál fue el resultado de las mismas. Para ello, describimos la generalización de los estudiantes antes y después de las mediaciones realizadas por el investigador-docente, y caracterizamos las mediaciones empleadas por él.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y PENSAMIENTO FUNCIONAL

“El pensamiento algebraico considera las formas de hacer, pensar y hablar sobre el álgebra” (Cañadas, 2016, p. 8). Esto permite desarrollar habilidades que ayudan a los estudiantes a comprender de mejor forma los componentes que lo conforman, como las relaciones funcionales y la generalización, trabajando a su vez con cantidades indeterminadas, a través del análisis de las situaciones presentadas (Butto y Rojano, 2010; Radford, 2011).

El trabajo con pensamiento algebraico en Educación Primaria ayuda a desarrollar concepciones matemáticas más profundas y complejas (Blanton y Kaput, 2005). Este tipo de pensamiento matemático ocurre cuando los estudiantes identifican relaciones en operaciones aritméticas, expresiones, ecuaciones o datos de funciones que pueden generalizar más allá de los casos dados. Su uso en cursos Educación Primaria puede mejorar las dificultades que los estudiantes de cursos superiores han enfrentado por mucho tiempo (Stephens et al., 2015).

En este trabajo nos centramos en el pensamiento funcional, uno de los componentes del pensamiento algebraico, a través del cual se puede trabajar la generalidad (Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Blanton, 2014). Este tipo de pensamiento está “basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

Distintos autores han caracterizado el pensamiento funcional, indicando que se basa en la forma de pensar en términos de y acerca de relaciones, siendo una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que covarían (Rico, 2007; Smith 2008). El pensamiento funcional permite que los estudiantes se familiaricen con conceptos y procedimientos como la representación y generalización de relaciones entre cantidades, razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función (Stephens et al., 2017). Abordar el pensamiento funcional implica

(a) generalizar las relaciones entre cantidades covariables; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras utilizando lenguaje natural, notación variable, tablas, y gráficas; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional (Blanton et al., 2015). Por ello, autoras como Cañadas y Fuentes (2015) indican que se puede identificar el pensamiento funcional cuando “el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla general o generalización” (p. 213).

GENERALIZACIÓN

La generalización se considera el núcleo central del álgebra, en el conocimiento matemático y en el conocimiento en general (Mason, 1996). La generalización, como proceso, permite analizar las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión de ellas. Como describen Cañadas y Castro (2007), la generalización se produce cuando “una conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada” (p. 57). Es un proceso que involucra reconocer distintos tipos de patrones, relaciones de variables entre diferentes términos y la forma breve de expresarlo (Villa, 2006). Para Radford (2010) la generalización se basa en captar una característica común sobre algunos elementos de la secuencia y que este elemento en común aplique para todos los casos. Este autor expresa que esta característica común identificada, sirve para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan más allá del campo perceptivo.

La generalización nos permite analizar relaciones entre cantidades y extraer una regularidad ante una situación dada, donde se identifican propiedades que van más allá de una instancia particular (Kaput, 2008; Mata-Pereira y Da Ponte, 2019). Como lo expresa Kaput (1999) la generalización implica llevar el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos.

Dentro de un contexto funcional, la generalización implica identificar y representar la regla que relaciona ambas cantidades desde lo particular a casos más generales, permitiendo que los estudiantes identifiquen y expresen la regularidad que existe entre variables (Ureña, et al., 2019).

MEDIACIONES

Dentro del enfoque sociocultural, la mediación es una interacción educativa significativa y trascendente. Su intención es acompañar y ayudar, llevando al sujeto que aprende a su zona de desarrollo potencial, considerada como zona de construcción social del conocimiento (Ferreiro y Calderón, 2005). Esta interacción en el proceso de aprendizaje estimula y activa distintos procesos mentales que

surgen de la relación con otras personas (Carrera y Mazzarella, 2001). El sentido de la mediación es promover una interacción dialógica y lúdica que ayude a tener un conocimiento, considerando los distintos estilos de aprendizaje (Escobar, 2011). En este sentido, el docente o persona que ejerce como mediador juega un rol importante en el proceso de aprendizaje, siendo el que orienta al estudiante en la conformación del andamiaje. Desde esta perspectiva social, Ferreiro y Calderón (2005) señalan que:

El mediador es la persona que, al relacionarse con otra u otras, propicia el paso del sujeto que aprende de un estado inicial de no saber, poder o ser, a otro cualitativamente superior de saber, saber hacer y lo que es más importante, ser. (p. 112)

El mediador ayuda para que la persona que está en un estado inicial de aprendizaje, pueda pasar a un estado potencial, es decir, que haya aprendido. Esto se consigue con la utilización de distintas estrategias, considerando el estilo de aprendizaje. Por tanto, el mediador favorece, estimula y corrige (Ferreiro y Calderón, 2005). El mediador puede explorar los desacuerdos o errores a través del apoyo y guía, incentivando a los estudiantes a justificar sus respuestas (Da Ponte et al., 2017).

Los objetivos de investigación que planteamos en este trabajo son: (a) caracterizar la generalización de los estudiantes antes y después de la mediación, y (b) describir las mediaciones realizadas por un investigador-docente a seis estudiantes de segundo de primaria dentro de un contexto de generalización.

METODOLOGÍA

En este trabajo seguimos un enfoque mixto, realizando un análisis de datos que combina lo cualitativo y lo cuantitativo, teniendo, además, un carácter exploratorio y descriptivo (Hernández-Sampieri et al., 2014). Este estudio es parte de una investigación más amplia, donde diseñamos e implementamos experimentos de enseñanza con sesiones de trabajo (Molina et al., 2011).

Tabla 1

Tareas propuestas a los estudiantes

Sesión	Contexto	Función
1	Cuestionario inicial “máquina funcional”	$y = x + 3$
2	Parque de atracciones	$y = x + 3$
3	Parque de atracciones	$y = 2x + 1$
4	Cumpleaños	$y = 2x/x + x$
5	Paradas de Tren	$y = 2x/x + x$

El experimento de enseñanza, realizado con los estudiantes de segundo año de Educación Primaria, incluyó dos entrevistas y cinco sesiones de trabajo, donde propusimos a los estudiantes distintas tareas que involucraban funciones. En la tabla 1 detallamos las funciones trabajadas en cada una de las sesiones.

En este estudio analizamos la información recogida a través del cuestionario inicial y de las entrevistas iniciales individuales realizadas a los estudiantes. Además, realizamos un estudio de casos, definido como “la descripción y el examen o análisis en profundidad de una o varias unidades y su contexto de manera sistémica y holística” (Hernández et al, 2014, p. 2).

Este trabajo lo realizamos con seis estudiantes de segundo grado de Educación Primaria (7-8 años) pertenecientes a un colegio concertado de Granada (España). El grupo fue seleccionado por la maestra de la clase, quien consideró a estudiantes con buena disposición para trabajar y expresar sus respuestas, además de pertenecer a distintos niveles académicos (bajo, intermedio y alto) según su rendimiento en Matemáticas.

Respecto a los conocimientos previos de los estudiantes, tuvimos en cuenta el currículo vigente para los números involucrados en las tareas (Boletín Oficial del Estado, 2014). Además, no habían trabajado con tareas sobre generalización.

El investigador-docente fue un integrante del proyecto en el que se encuentra inmerso este trabajo. Participó en la sesión del cuestionario inicial y posteriormente en la realización de las entrevistas individuales. Su función, como investigador-docente, fue mediar cuando los estudiantes presentaban dificultades, cuando incurrían en un error al responder o no sabían seguir en el desarrollo de la tarea.

En la recolección de información, usamos la observación participante, entrevistas semiestructuradas y cuestionarios individuales de los estudiantes. Grabamos las entrevistas y escaneamos las producciones escritas de los cuestionarios.

Respecto al cuestionario y las entrevistas, fueron elaboradas considerando el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Utilizamos la idea de *function machines* (e.g., Torres et al., 2018) para presentar la tarea de generalización, siendo adaptada a una situación más familiar para ellos. Los dos instrumentos fueron validados por miembros del proyecto, mediante una triangulación de expertos.

En la sesión del cuestionario inicial, presentamos una tarea de generalización que involucra la función $f(x) = x + 3$. Trabajamos con esta función porque en trabajos previos se observa que menores de estas edades pueden abordarlas, pero a la vez supone un reto para ellos en la generalización (e.g., Cañadas, 2016).

El contexto empleado para la tarea fue una máquina donde la variable independiente era el número de bolas que entraba en la máquina y la variable dependiente, el número de bolas que salían. En el enunciado se empleó un dibujo de la máquina y las bolas que entraban y salían (ver figura 1).

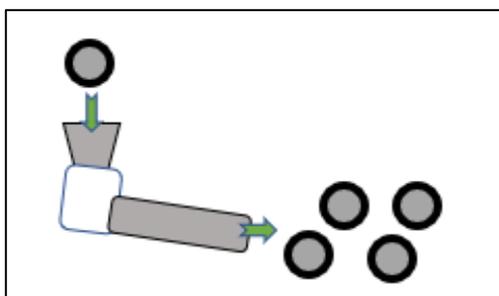


Figura 1. Representación pictórica de la máquina

Una vez introducida la tarea, les planteamos distintos casos particulares a los estudiantes, los que resolvieron conjuntamente. Posterior a esto, trabajaron individualmente el cuestionario. Este instrumento tenía como objetivo indagar la situación inicial de los estudiantes respecto a la generalización. El cuestionario tenía 13 preguntas, sobre casos particulares y sobre la generalización. Seis de ellas eran abiertas y las otras siete de verdadero y falso. En la tabla 2 presentamos las preguntas realizadas en el cuestionario.

Tabla 2

Preguntas presentadas en el cuestionario inicial

Pregunta	Descripción	Tipo
P.1	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas?	Abierta
P.2	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 10 bolas?	Abierta
P.3	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas?	Abierta
P.4	Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina ¿cuántas bolas salen?	Abierta
P.5	Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máquina en la siguiente situación	Abierta
P.6	Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quién averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?	Abierta
P.7a	Si en la máquina metes 4 bolas, salen 7 bolas.	V/F
P.7b	En la máquina siempre salen 2 bolas más que las bolas que has metido.	V/F
P.7c	En la máquina siempre salen 3 bolas más que las bolas que has metido.	V/F
P.7d	En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que has metido.	V/F
P.7e	Si meto A bolas en la máquina, salen A bolas.	V/F

Tabla 2
Preguntas presentadas en el cuestionario inicial

Pregunta	Descripci3n	Tipo
P.7f	Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 1 bolas.	V/F
P.7g	Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 3 bolas.	V/F

Nota. V/F = verdadero o falso.

En la siguiente sesi3n realizamos una entrevista semiestructurada individual a seis estudiantes. Cada entrevista tuvo una duraci3n de 20 a 25 minutos. El objetivo fue revisar el cuestionario al que ellos mismos habían respondido. Todos los estudiantes tuvieron el tiempo necesario para responder.

Diseñamos la entrevista con base en las preguntas del cuestionario y los objetivos planteados, produciendo en primer lugar un protocolo de entrevista. El prop3sito de este instrumento fue obtener informaci3n sobre el proceso de generalizaci3n de los estudiantes y las mediaciones realizadas con ellos. Al ser una entrevista semiestructurada, nos permitía tener “la libertad de introducir preguntas adicionales” (Hernandez et al., 2014, p. 403).

Durante la realizaci3n de las entrevistas, los estudiantes tenían a su disposici3n los cuestionarios iniciales, con el fin de revisar sus respuestas. Esto daba la libertad de guiar las entrevistas segun las necesidades de cada estudiante.

Para analizar los datos obtenidos, detallamos a continuaci3n las categorías referentes a las mediaciones y a la generalizaci3n. Estas categorías fueron elaboradas con base en nuestros antecedentes y la realizaci3n de una triangulaci3n de expertos en el tema. Describimos a continuaci3n cada una de ellas:

Generalizaci3n. Consideramos que los estudiantes generalizaban de forma correcta, cuando respondían adecuadamente las preguntas del cuestionario, expresando a su vez la regularidad de la tarea planteada. A su vez, identificamos un tipo de generalizaci3n incompleta. Esta se producía cuando los estudiantes reconocían una regularidad (que la cantidad de bolas que salía era mayor o que aumentaba) pero no aludían a la cantidad concreta.

Mediaci3n. Utilizamos las categorías Da Ponte et al. (2013; 2017), Mata-Pereira y Da Ponte (2017) y Urena et al., (2019). En estos estudios se detallan las siguientes mediaciones:

- ◆ Invitar, donde el mediador anima a los estudiantes expresar sus respuestas a traves de la justificaci3n o el intercambio de idea.
- ◆ Apoyar/guiar, mediaci3n donde se le proporcionaban diversas ayudas y orientaciones para que los estudiantes realizaran con éxito la tarea. No se les entregaba la informaci3n directamente. Para ello, se les repetían

informaciones o datos que podían ser de ayudar para que el estudiante contextualizara la tarea o aclarara dudas.

- ◆ Informar/sugerir, mediación donde se le sugerían procedimientos para ordenar la información o datos de la tarea. El mediador de forma explícita le sugería un proceso para resolver la tarea. Además, validaba las respuestas de los estudiantes.
- ◆ Desafiar, mediación donde se buscaba alentar a los estudiantes a ir más allá de los ejercicios propuestos, aumentando la dificultad de los ejercicios planteados.
- ◆ Cuestionar, mediación donde se cuestionaban las respuestas erróneas de los estudiantes con el fin de que identificaran y analizaran el error.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

A continuación, presentamos el análisis de datos y los resultados. Recogimos la información de manera general para los seis estudiantes, mostrando ejemplos de algunas respuestas, tanto del cuestionario como de las entrevistas. Para resguardar la identidad de los estudiantes que participaron en esta investigación, nos referimos a ellos con una codificación alfanumérica formada por una E y un número del uno al seis (E1, E2, E3, etc.). Para referirnos al investigador-docente, utilizamos la letra I, quien además toma el rol de mediador en el desarrollo de las sesiones.

Comparación del proceso de generalización de los estudiantes sin y con mediación

En la tabla 3 resumimos las respuestas de los estudiantes al responder el cuestionario inicial, antes y después de la realización de las mediaciones. Para cada estudiante y cada pregunta del cuestionario, identificamos si respondían correctamente, incorrectamente o de forma incompleta. Al referirnos a una respuesta incompleta, hemos considerado a aquellas en donde el estudiante presentaba un error de cálculo, pero identificaba parte de la regularidad (identificaba que la cantidad de bolas que salían de la máquina era mayor pero la cantidad era incorrecta).

Tabla 3

Comparación del proceso de generalización antes y después de la mediación

	Casos particulares							Generalización					
	P1	P2	P3	P4	P7a	P7b	P7c	P5	P6	P7d	P7e	P7f	P7g
	E1												
S	1*	1*	1	1*	1	1	1	1*	1	1	0	1	1
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
	E2												

Tabla 3
Comparación del proceso de generalización antes y después de la mediación

	Casos particulares							Generalización					
	P1	P2	P3	P4	P7a	P7b	P7c	P5	P6	P7d	P7e	P7f	P7g
S	1*	1*	1*	1*	0	1	0	0	1*	0	0	0	0
C	1*	1*	1*	1*	0	1	1	1*	1*	0	0	1	1
E3													
S	1*	1*	1*	1*	0	0	0	0	0	0	1	1	0
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
E4													
S	1	1*	1*	1*	0	0	1	0	1*	1	1	0	0
C	1*	1*	1*	1*	0	0	0	1*	1*	0	0	0	0
E5													
S	1*	1*	1*	1	1	1	1	0	1*	0	1	0	0
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
E6													
S	1	1*	1	1	1	1	1	1	1*	1	0	1	1
C	1	1*	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Nota. S = sin mediación; C = con mediación; 0 = respuesta incorrecta; 1 = respuesta correcta; 1* = respuesta incompleta; S= sin mediación; C= con mediación.

En la tabla 3 se observa que todos los estudiantes respondieron a todas las preguntas del cuestionario.

Sin mediación

Antes de las mediaciones, podemos ver que los estudiantes respondieron de manera variada. En la mayoría de las preguntas sobre casos particulares, lo hicieron de forma correcta o incompleta, identificando que existe un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina. Un ejemplo es el caso de E2, quien respondió una pregunta correcta, cuatro respuestas incompletas y dos de forma incorrecta. Este estudiante identificó el aumento de bolas, pero lo hace de forma incorrecta, sumando uno a la cantidad de bolas que salen de la máquina.

Los estudiantes respondieron a la mayoría de las preguntas sobre generalización de forma incorrecta. En P6, pregunta referida a la generalización, los estudiantes debían explicar el funcionamiento de la máquina, indicando cómo podían saber el número de bolas que salían de ella. Hubo un estudiante que

respondió correctamente (E1), cuatro que respondieron de forma incompleta (E2, E4, E5 y E6) y uno que respondió de forma incorrecta (E3). Presentamos algunos ejemplos a continuación.

- ◆ Respuesta correcta: E1 explicó que “en el primero y una bola nos salen cuatro. En la segunda hay dos bolas salen cinco. En la tercera hay tres bolas salen seis. En la cuarta hay cuatro bolas salen siete”. Este estudiante no expresó la regularidad y utilizó ejemplos de casos particulares para explicarlo.
- ◆ Respuesta incompleta: E4 escribió que “es porque se tiene que sumar”. Identificó que aumentan las bolas que salen de la máquina, sumando, pero no indicó en que cantidad.
- ◆ Respuesta incorrecta: E3 expresó “que parten la mitad”. El estudiante respondió de forma incorrecta e incompleta, indicando que la cantidad que sale es menor.

Al analizar las respuestas de los estudiantes del cuestionario individual, identificamos que E6 generalizó en el cuestionario inicial. Los otros cinco estudiantes (E1, E2, E3, E4 y E5) generalizaron de forma incompleta.

Con mediación

En relación a la generalización de los estudiantes después de las mediaciones, hallamos que en la mayoría de las preguntas existe una mejora en sus respuestas. Cuatro de los seis estudiantes corrigieron sus errores, pasando de respuestas incompletas a correctas o de respuestas incorrectas a respuestas incompletas o correctas.

En las preguntas sobre casos particulares E1, E3, E5 y E6 respondieron correctamente a estas preguntas. Los estudiantes E2 y E4 continuaron respondiendo de forma incompleta. En sus respuestas expresaban que aumentaba la cantidad de bolas que salían de la máquina, pero presentaban errores en determinar la regularidad. Un ejemplo es cuando E2 explica: “creo que algunos números son los que se suman dos y otros los que se les suma más de dos”.

En cuanto a las preguntas P5 y P6, relacionadas a la generalización, existe un cambio positivo en sus respuestas, generalizando.

En el caso de E1, E3, E5 y E6 generalizaron correctamente y E2 y E4 generalizaron de forma incompleta. Al preguntar a los estudiantes sobre el funcionamiento de la máquina, E1, E3, E5 y E6 expresaron que la máquina funcionaba sumándole tres bolas. Los otros dos estudiantes (E2 y E4), expresaron que se sumaba, pero no determinaron la constante que se correspondía con el número de bolas que ingresaban a la máquina.

En las preguntas sobre generalización con simbolismo algebraico (P7d, P7e, P7f y P7g) del cuestionario, los seis estudiantes presentaron mayor cantidad de respuestas incorrectas. En el siguiente fragmento evidenciamos cómo E1 evidencia no reconocer las letras en matemáticas.

I: ¿Qué representará esa A?

E1: No tengo nada.

I: No tienes ni idea, ¿Alguna vez habías visto letras en matemáticas?

E1: No.

Otros estudiantes, como E2, atribuyeron un número a la letra, según el orden alfabético de la letra en el abecedario.

I: Y después dice: si meto A bolas en la máquina sale A bolas y tu pusiste verdadero ¿Sigues pensando qué es verdadero?

E2: Sí.

I: ¿Y qué significa esa A, si meto A bolas?

E2: Yo creo que significa algún número.

I: ¿Y esa A qué representará? ¿A de “algún número”?

E2: A de... como el abecedario, que esto te da una pista. Yo creo que la A significa uno.

I: ¿Por qué uno, y no dos ponte tú?

E2: Porque dos sería el A, B... El B.

I: O sea, tú me dices que la letra A significa uno.

E2: Sí como que el A es una parte del abecedario y haciendo A B C D E F G pues ya vas sabiendo.

I: ¿Entonces por ejemplo A?

E2: A es el uno porque va primero, segundo B.

I: ¿El número tres?

E2: La C.

I: ¿El número cuatro?

E2: La D.

Después de la mediación, E1, E3, E5 y E6 generalizaron. Dos de ellos (E2 y E4) generalizaron de forma incompleta.

Mediaciones

En la tabla 4 resumimos los resultados relacionados con las mediaciones realizadas por el investigador-docente durante las entrevistas. Mostramos el tipo de mediación realizada con cada estudiante y la frecuencia con la que se hizo. Posteriormente describimos en qué momentos se utilizaban y el efecto que produjo cada una de ellas.

Tabla 4

Mediaciones realizadas por el investigador-docente

Estudiante	Invitar	Apoyar /guiar	Informar /sugerir	Desafiar	Cuestionar	Total
E1	6	2	1	6	3	18
E2	7	1	1	4	3	16
E3	6	2	0	5	5	18
E4	6	2	4	2	2	16
E5	5	2	0	6	1	14
E6	6	4	1	3	3	17
Total	36	13	7	26	17	99

Identificamos cinco mediaciones: (a) invitar, (b) apoyar/guiar, (c) informar/sugerir, (d) desafiar y (e) cuestionar. La frecuencia de mediaciones utilizadas por estudiante fue similar y constante. La mediación informar/sugerir no se utilizó con todos, a diferencia de las otras cuatro mediaciones que se usaron durante las entrevistas.

La mediación *invitar* permitió a los estudiantes justificar sus respuestas, dándoles el espacio para que describieran la forma y método utilizado para llegar a ella. Esta mediación ayudó a los estudiantes a generalizar. En las entrevistas, el investigador-docente les pidió a los estudiantes que explicaran su razonamiento sobre la tarea. Un ejemplo lo mostramos a través del siguiente fragmento de entrevista con E1.

I: ¿Me podrías volver a contar como lo encontraste?

E1: Pues si hay uno nos salen cuatro. Le tenemos que sumar tres más.

En este ejemplo observamos cómo el investigador-docente invitó al estudiante a justificar su respuesta y este así lo hizo.

Otro ejemplo de la mediación *invitar* lo encontramos en el siguiente fragmento de entrevista con E2.

I: ¿Seis? ¿Sí? ¿Por qué?

E2: Porque como en esta son cinco pues sumando uno serían seis.

I: Veamos, o sea si entran tres, tú te preocupaste de la cantidad anterior.

E2: Sí.

I: ¿Y qué hiciste aquí para saber ésta? ¿Cuántas salían aquí?

E2: Seis.

I: ¿Le agregaste uno o le restaste uno?

E2: Le sumé uno.

La mediación *desafiar* promovió a los estudiantes a ir más allá de sus conocimientos. Se les planteaban situaciones más complejas, donde los estudiantes requerían de un mayor esfuerzo para responderlas. Para verificar si comprendían la regularidad con cualquier caso particular planteado, el investigador-docente les planteó preguntas con números más elevados o situaciones donde debían dar su opinión respecto a una expresión. A continuación, detallamos algunos ejemplos:

En la primera situación, el investigador-docente aumentó la complejidad de la tarea planteada, indicando ejemplos con números mayores a los usados en el cuestionario:

I: Vale, eso está muy bien. ¿Si metieras...? Venga, dime un número más grande.

E5: 20.

I: Vale.

E5: Nos saldrían 23.

I: Vale, vamos bien. ¿Otro número más grande todavía?

E5: ¿52?

I: Bueno, tú verás.

E5: Nos saldría 55.

I: Vale, vale, vale. Ahora me voy a inventar uno más grande, ¿vale? El 100.

E5: Nos saldría 103.

En el ejemplo anterior observamos que el estudiante respondió correctamente a casos con cantidades mayores. Otro ejemplo es la situación que se refleja en la entrevista con E3, donde el investigador-docente le planteó una situación y el estudiante debía evaluarla y justificarla.

I: Te quiero contar que un niño de la clase, no te voy a decir quién, me dijo que si entraban 25 bolas en la máquina debieran salir 27. ¿Estás de acuerdo con él?

E3: No, porque tienen que salir tres más no dos.

I: ¿Y cuánto debería salir entonces?

E3: 28.

La mediación *cuestionar* permitió a los estudiantes identificar errores en sus respuestas. En la mayoría de las situaciones, al realizar esta mediación, los estudiantes evidenciaban en qué se habían equivocado y modificaban su respuesta. Detallamos a continuación parte de la entrevista con E4, donde se observa esta mediación.

I: Y ¿aquí cuántas bolas estas metiendo en la máquina?

E4: Cinco.

I: Cinco. ¿Y cuántas salen?

E4: Ocho.

I: ¿Cuántas estás sumando entonces?

E4: Cinco y cinco.

I: ¿Cinco y cinco son ocho?

E4: No.

I: Piénsalo bien, no me respondas rápido, piénsalo que no tenemos prisa.

En la mediación *guiar/apoyar*, el investigador-docente reiteró información a los estudiantes, ayudándoles a recordar datos que se habían presentado. Esto permitió que ellos contextualizaran la tarea o recordaran algún dato que les permitía entender la situación planteada. En el siguiente extracto de la entrevista con E3 detallamos un ejemplo sobre el uso de esta mediación:

I: Veamos estos ejemplos para recordarlo. Era una máquina en la cual entraban y salían bolas. Este fue el primer ejemplo que os mostré: si entraba una bola salía esa cantidad de bolas. Si quieres puedes ir registrando o rayando en tu hoja que no hay problema. Si entraban esa cantidad de bolas salía esa cantidad de bolas. Ahora bien, tenemos más ejemplos. Fíjate ahora entra otra cantidad de bolas y sale esa cantidad de bolas. ¿Cuántas entraron aquí?

E3: Pues ahí son cinco.

I: ¿Y cuántas salieron?

E3: Ocho.

La mediación *informar/sugerir* se utilizó cuando el investigador-docente a través de sugerencias, ayudaba al estudiante a buscar una forma para obtener la respuesta. Esto lo hacía a través de sugerencias como organizar los datos a través de una tabla. Un ejemplo es lo evidenciado en la entrevista con E2.

I: ¿Y tú quieres un boli para anotar el numerito para que no se te olvide?

E2: Vale sí. Ahora aquí seis, ¿no?

I: No sé. Por lo que tú me dijiste eran seis.

E2: Ocho. Aquí no lo sé, voy a contarlas: uno, dos tres... nueve.

I: Nueve. ¿Y salen?

E2: Yo creo que 12.

I: Pero cuéntalas, puedes ir marcando las bolas que ya contaste.

E2: Yo creo que 12, uno, dos, tres ... 12.

I: 12, vale. Regístralo ahí.

E2: 12 (apunta el número).

I: Entonces t ves que hay una relación entre, por ejemplo, aquí la cantidad de bolas que entran y la cantidad de bolas que salen? habr alguna relación?

E2: Yo creo que no tanto porque en verdad esto es un tres y esto es más de un tres.

I: O sea, salen más de las que entran.

E2: S.

ESTUDIO DE CASO

A continuación, presentamos un estudio de caso de E5, caracterizando la generalización antes y después de las mediaciones. Además, describimos los tipos de mediaciones utilizadas y el efecto que tuvo cada una de ellas en el desarrollo de su trabajo, dando respuesta a los objetivos planteados para esta investigación. Nos centramos en este estudiante porque pasó de generalizar de forma incompleta a generalizar correctamente después de las mediaciones.

Al revisar las respuestas de E5 en su cuestionario inicial, observamos que el estudiante identificó un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina, pero no una cantidad concreta. En la figura 2 mostramos parte de sus respuestas, donde apreciamos que en el primer caso dibuj 10 bolas más de las que había en la cantidad inicial. En el segundo caso, dibuj el doble.

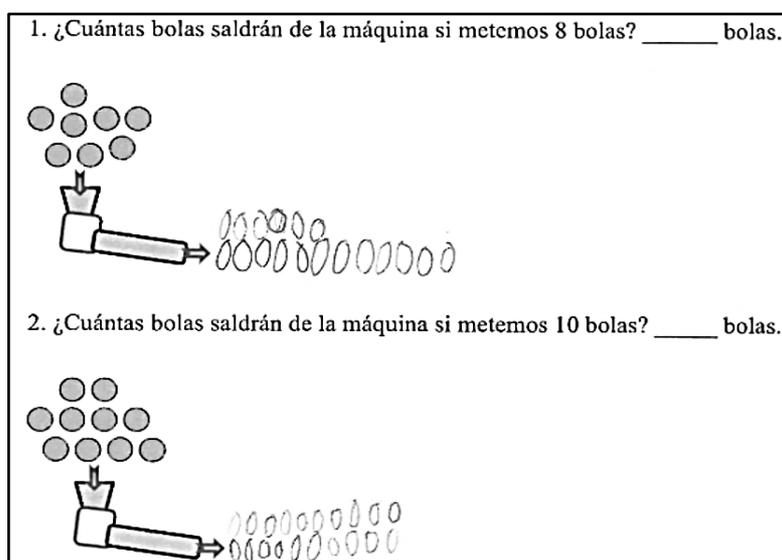


Figura 2. Respuestas de E5 en P1 y P2 del cuestionario inicial.

En P6 debía escribir el funcionamiento de la máquina y así saber cuántas bolas salen de ella. En este caso E5 escribe “sumando el doble” (ver figura 3).

En este caso el estudiante responde de forma incompleta, identificando que la cantidad de bolas que salen de la máquina es mayor, pero se equivoca al indicar en qué cantidad.

6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina? *Mando el doble*

Figura 3. Respuesta de E5 en P6 del cuestionario inicial.

Al analizar las respuestas del estudiante E5, identificamos que en este primer momento generalizó de forma incompleta. Durante la entrevista con E5, utilizamos las mediaciones *guiar/apoyar*, *cuestionar*, *invitar* y *desafiar*. Con este estudiante no se utilizó la mediación *informar/sugerir*. Las mediaciones más utilizadas en su entrevista fueron *invitar* y *desafiar*. Cada mediación fue clave en su proceso de generalización, desde el inicio hasta el final de la entrevista. Cada una de ellas se realizó en distintos momentos, cumpliendo el rol de ayudar al estudiante cuando presentaba errores o no sabía cómo continuar.

La mediación *guiar/apoyar* fue utilizada con E5 para recordar información y aclarar preguntas. Para el estudiante fue clave recordar lo trabajado en la sesión inicial para comprender la tarea planteada (ver figura 4).

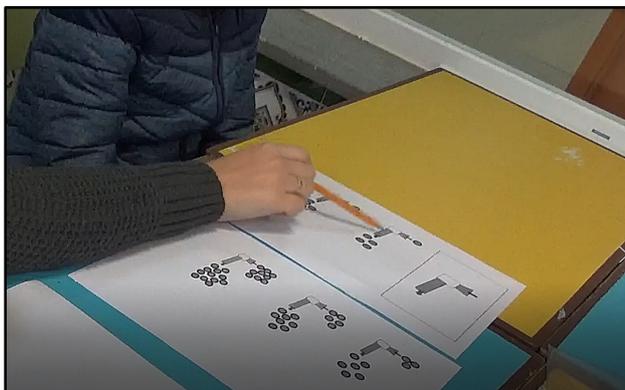


Figura 4. Realización de mediación *guiar/apoyar* a E5.

A continuación, detallamos parte de la entrevista donde sucede esta situación:

- I:* ¿Te acuerdas que llevamos a la clase unos posters grandes de una máquina? La máquina siempre funciona de la misma manera, entonces os decía: ¿si metes 1 bola cuantas salen?
- E5:* Cuatro, triplete.
- I:* Eso es. ¿Si metes dos?
- E5:* Cinco, ¿no?

En relación a la mediación *cuestionar*, permitió al estudiante corregir errores de cálculo, a través de los cuestionamientos realizados por el investigador-docente. En el ejemplo que detallamos a continuación, E5 presenta un error:

I: Vale. ¿Si metes...? ¿Cuántas hay aquí?

E5: Cinco.

I: Vale. ¿Cuántas salen?

E5: Siete.

I: ¿Seguro?

E5: No, ocho, ocho.

I: No sé.

E5: Ocho.

La mediación *invitar* ayudó a E5 a explicar sus resultados. Además, a través de esta mediación, el estudiante describió el funcionamiento de la máquina, como se observa en el siguiente fragmento de su entrevista.

I: ¿Tú me sabrías decir cómo funciona la máquina?

E5: Pues que metes una bola y te sale un triplete, te salen cuatro.

I: Pero, ¿triplete que significa?

E5: Pues tres más.

I: Ah, entonces, ¿si yo metiera por ejemplo 10 bolas?

E5: Pues 13 tendrías.

Finalmente, *desafiar*, que es la mediación donde se le plantearon preguntas con números mayores y símbolos, fue de gran ayuda para que el estudiante expresara que siempre se cumplía la misma regularidad, sumar tres. Como se observa a continuación, el investigador-docente utilizó cantidades indeterminadas para desafiar al estudiante, utilizando N y alfa.

I: Mira ¿sabes lo que ha pasado? Que un niño de otra clase nos ha dicho que si metemos N bolas pues que luego saldrían (escribe) a N le sumamos 3. ¿tú qué opinas de eso? ¿estás de acuerdo o no, o no lo sabes? Piénsalo un poco a ver.

E5: Uf, yo creo que estaría un poquillo de acuerdo, no sé.

I: Piénsalo a ver.

E5: No, no estaría de acuerdo, bueno sí, sí, sí estaría.

I: No tengas prisa, si no tenemos prisa. Tú piénsalo y luego me dices si estarías de acuerdo o no.

E5: Porque sería nada de número, pero más tres.

I: Porque a la N le estas diciendo nada ¿no?

E5: Sí.

En este caso expresa que N es “nada de números”, pero identificó que siempre saldrían más tres bolas. Lo mismo sucede cuando se le presenta el caso con alfa (ver figura 5):

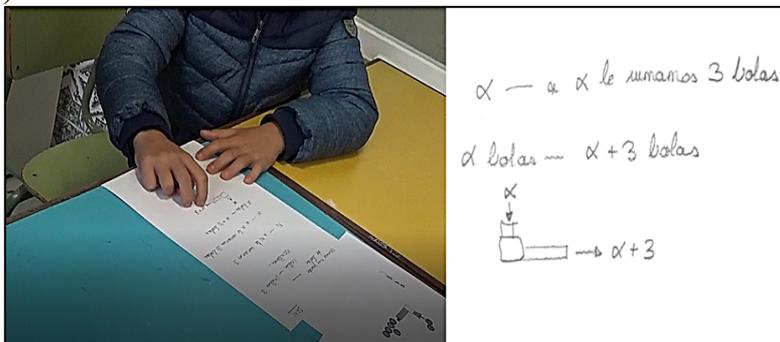


Figura 5. Realización de mediación desafiar con E5. En la imagen se ve el desafío planteado y E5 explicando la regularidad.

A continuación, detallamos parte de la entrevista donde sucede esta situación:

I: Vale, o sea que parece que sí podría ser, ¿no? Y ahora ¿si en vez de la N, tuviéramos este símbolo? (Escribe) Esto es alfa, es una letra del alfabeto griego. ¿Lo has visto alguna vez?

E5: No.

I: Pues es la alfa pero da igual, es un símbolo. Si metiéramos eso, ese número de bolas en la máquina... hay otro niño que nos ha dicho esto: a alfa, ese número, le sumamos tres, ¿Tú que crees?

E5: Yo...

I: ¿Se te ocurre algo? Es que es muy difícil E5, yo lo sé. Esta pregunta es de los niños mayores, pero como lo has hecho muy bien en el resto quería, ver como hacías este.

E5: Uf, esto pues le metemos esto, un símbolo, te saldría tres bolas más.

I: Sí.

E5: ¿Sí?

I: Sí.

E5: ¡Toma!

I: Entonces ¿podría ser esto: a alfa le sumamos tres? ¿Estás de acuerdo? A alfa le sumamos tres bolas (escribe) ¿Con esto estarías de acuerdo?

E5: Sí.

Después de analizar la entrevista realizada a E5, identificamos que el estudiante generaliza correctamente, identificando y expresando la regularidad, como se detalla en el siguiente fragmento de la entrevista:

I: Vale. ¿Lo estás haciendo todo el rato es igual no?

E5: Yo sí, yo pienso más tres.

CONCLUSIONES

Con este estudio hicimos una descripción de la generalización de estudiantes de primero de Educación Primaria en España al resolver una tarea que involucra una función lineal a través de números naturales. Observamos que en un momento inicial los estudiantes presentaron dificultades para trabajar esta, evidenciando en sus respuestas que no identificaron la regularidad. Estas dificultades corroboran lo observado en cursos superiores (e.g., Castro, 2012; Doorman y Drijvers, 2011), donde se evidencia que los estudiantes tienen dificultades para trabajar con nociones algebraicas.

Una vez que se llevaron a cabo mediaciones con los estudiantes que presentaron dificultades, identificamos que los estudiantes trabajaron de mejor forma con la tarea propuesta, llegando a generalizar. Las mediaciones *invitar*, *cuestionar*, *informar/sugerir*, *desafiar* y *apoyar/guiar* ayudaron a los estudiantes a recordar información, corregir errores y justificar respuestas, permitiéndoles generalizar. Por tanto, coincidimos con las ideas de Ureña et al. (2019), al destacar los beneficios que tiene la mediación al abordar la generalización. Esta herramienta pedagógica, donde el mediador ayuda en el proceso de resolución al estudiante, permite que se alcance su objetivo de aprendizaje, permitiéndole analizar cada situación, hasta generalizar.

A través de la mediación *invitar*, podemos dar espacios a la justificación, donde los estudiantes expresen su forma de pensar y razonar sobre la tarea propuesta y respuestas entregadas. Preguntas como *¿por qué?*, *¿cómo lo pensaste?*, *¿me puedes explicar cómo lo hiciste?*, son una guía para que los estudiantes tengan el espacio para expresar la regularidad, justificándola. Es por ello que destacamos a la justificación como un proceso necesario para la generalización.

En relación a la mediación *desafiar*, esta tuvo un papel clave durante el desarrollo de las entrevistas. Fue un puente de confirmación sobre la regularidad que expresaban los estudiantes, permitiéndoles ver que esa regularidad servía para cualquier caso (números “grandes” o letras). Empatizamos con lo expuesto por Da Ponte et al. (2017) quienes expresan que el desafío presentado a los estudiantes debe ser armonioso (ni fácil ni difícil). Por lo mismo creemos que al utilizar la mediación *desafiar*, debemos tener claro que será un medio para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. El desafío planteado al momento de desarrollar una actividad o tarea matemática no debe generar estrés o desmotivación a los

estudiantes. Por ello es importante que el docente sea consciente de las capacidades de sus estudiantes y trabaje entorno a ello.

Respecto al estudio de caso presentado, nos ha permitido profundizar en nuestro análisis, ejemplificando lo sucedido con este estudiante. Observamos un ejemplo en el que, después de las mediaciones, el estudiante pasa de generalizar de forma incompleta a generalizar correctamente.

Si comparamos la cantidad de mediaciones realizadas con el estudiante con el que hicimos el estudio de caso y los demás estudiantes, observamos que es el estudiante al que menos mediaciones se le realizaron. Con esto planteamos que la cantidad de mediaciones no es un factor para que el estudiante generalice. La cantidad y el tipo de mediaciones se realizan según las necesidades de cada estudiante, por ello son tan diversas para cada uno.

Preguntas claves como: “¿Tú me sabrías decir cómo funciona la máquina?”, “¿Tú me puedes explicar cómo lo estás haciendo?” o “¿Tú qué opinas de eso?”, ayudaron al estudiante a explicar la regularidad. Entendemos que, por su nivel educativo, las justificaciones utilizadas no son muy sofisticadas desde el punto de vista matemático. Sin embargo, al expresar que es siempre “más tres”, como en el ejemplo detallado en el estudio de caso con N, nos muestra que ha asumido que, independiente al número de bolas que metan en la máquina, siempre será más tres.

En conclusión, destacamos que una sola mediación o un único tipo de mediación no es suficiente para guiar a un estudiante a la generalización si presenta dificultades. Las mediaciones motivan a los estudiantes a responder, justificar, corregir un error y superar una dificultad en el contexto de tareas de generalización en el ámbito del pensamiento funcional (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Ureña et al., 2019). Estas mediaciones deben dar respuesta a las necesidades de los estudiantes para que avancen en su camino hacia la generalización. Por ello sugerimos contar con acciones que ayuden a los estudiantes a generalizar, más aún, si no han tenido una instrucción previa sobre este proceso matemático. La oportunidad de experiencias pedagógicas permite que abordemos las distintas formas y logros de aprendizaje que presentan los estudiantes. Es por ello que, a través de esta investigación, motivamos a los docentes a dar espacios en el aula para mediar con los estudiantes a través de preguntas, desafíos o intercambio de ideas. Esto ayudará a los estudiantes a ser partícipes de su proceso de aprendizaje y, en particular, a alcanzar la generalización.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado dentro del proyecto PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, y del marco de la Beca Iniciación a la Investigación para estudiantes de Másteres Oficiales del Plan Propio de Investigación 2019 otorgada por el Vicerrectorado de Investigación y

Transferencia UGR. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

REFERENCIAS

- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Boletín Oficial del Estado (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (núm. 52, pp. 19349-19420). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf>
- Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, 14, 37-57.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22(3), 55-86.
- Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 73, 7-13.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81. <https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213>
- Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

- Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carrera, B. y Mazzarella, C. (2001). Vygotsky: Enfoque sociocultural. *Educere*, 5(13),41-44.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, 55-67.
- Da Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, XXII(2), 55-81.
- Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae*, 1, 45-59.
- Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-334-1_6
- Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica*, 20, 58-73.
- Ferreiro, R. y Calderón, E. (2005). *ABC del aprendizaje cooperativo. Trabajo en equipo para enseñar y aprender*. Trillas
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). McGraw-Hill.
- Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, 14(3), 204-225. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378>
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5
- Mata-Pereira, J. y Da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and

- justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- Mata-Pereira, J. y da Ponte, J. P. (2019). Enhancing students' generalizations: a case of abductive reasoning. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598-605). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf
- Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 113-134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rodríguez, A., Sánchez, M. S. y Rojas de Chirinos, B. (2008). La mediación, el acompañamiento y el aprendizaje individual. *Investigación y Postgrado*, 23(2), 349-381.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-6>
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 92-101. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092>
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P.

- Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM
- Torres, M., Cañadas, M., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en forma directa e inversa de una función evidenciada por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia*, 35 (2), 1-16. <https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16>
- Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020>
- Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecnológicas*, 16, 139-151. <https://doi.org/10.22430/22565337.525>

Romina Narváez Orellana
Universidad de Granada
rnarvaez@correo.ugr.es

María C. Cañadas Santiago
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Recibido: marzo, 2022. Aceptado: enero, 2023

doi: 10.30827/pna.v17i3.24153



ISSN: 1887-3987

MEDIATIONS CARRIED OUT WITH SECOND GRADERS IN A GENERALIZATION CONTEXT

Romina Narváez Orellana and María C. Cañadas Santiago

Working with functional thinking in primary education can help children to develop different mathematical skills that will allow them to learn and understand algebra in a better way, providing them with tools for the acquisition of mathematical knowledge and skills. But we are aware that this incorporation in primary education is not a simple task. Therefore, we highlight mediation as a supportive action that can be carried out during the teaching-learning process. In this paper we characterize the generalization of six students in the second year of primary education (7-8 years old), before and after the mediations carried out by a researcher-teacher. We collected information through a questionnaire and individual interviews where they worked with the function $y = x + 3$. In addition, we conducted a case study with one of the students, to exemplify what happened with one of them, who in this case went from generalizing incompletely to generalizing correctly after the mediations. The results show that the mediations performed by the researcher-teacher were constant and diverse for each student. For the same reason, the amount and type of mediations are performed according to the needs of each student. The mediations inviting, challenging, and questioning the students are the most used. Moreover, after the mediations performed by the researcher-teacher, all six students generalized. As a result of our results, we ratify that it is feasible to introduce functional thinking to students in the first years of elementary school. Furthermore, that they are capable of generalizing at an early school age. We emphasize that mediations played a fundamental role in the identification of the regularity of the task, allowing students to correct errors and justify, which helped them to generalize. We express the importance of having actions that help in this process, even more so if the group of students has not had previous instruction on what generalization is. For the same reason, the mediations must respond to the needs of the students so that they advance on their way to generalization.