Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
Volumen 23(2022). Páginas 23 a 36
DOI: 10.24309/recta.2022.23.1.02

UNA METODOLOGÍA ESTOCÁSTICA PARA DETERMINAR LA RENTABILIDAD FINANCIERO-ACTUARIAL-FISCAL DE UNA RENTA DE SUPERVIVENCIA CON PRIMAS PERIÓDICAS

MARÍA JOSÉ PÉREZ-FRUCTUOSO

mariajose.perez@udima.es
Universidad a Distancia de Madrid, Departamento de ADE y Economía
Carretera de La Coruña, KM 38,500, Vía de servicio nº 15, 28400, Collado-Villalba, Madrid

ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

aalegre@ub.edu
Universidat de Barcelona, Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Acturial
Avinguda Diagonal, 690, 0,8034, Barcelona

Recibido (11/03/2022)
Revisado (02/09/2022)
Aceptado (24/11/2022)

RESUMEN: En este trabajo se determina la rentabilidad financiero-actuarial-fiscal de una renta de supervivencia. Esta rentabilidad es aleatoria porque depende de la distribución de probabilidad asociada a la supervivencia de quien la contrata. Por ello, se utiliza una metodología estocástica para obtener las expresiones analíticas de las distribuciones de probabilidad de las rentabilidades real y esperada y de unos indicadores de riesgo que reflejan el riesgo de la operación y su influencia en dicha rentabilidad esperada. El desarrollo teórico se realiza considerando primas periódicas y bajo los escenarios de prima pura, prima recargada e incluyendo impuestos y desgravaciones fiscales.
Finalmente se presenta un ejemplo numérico que muestra la aplicabilidad de los resultados obtenidos en la toma de decisiones del asegurado en ambiente aleatorio con la máxima información.

Palabras Clave: tanto efectivo anual de rentabilidad, rentabilidad esperada, indicadores de riesgo, fiscalidad de la renta de supervivencia.

ABSTRACT: This paper determines the financial-actuarial-tax return of a life annuity. Such profitability is random because it depends on the probability distribution associated to the survival of the contracting person, so a stochastic methodology is used to obtain the analytical expressions of the probability distributions of both the real and the expected returns and of some risk indicators that reflect the risk of the operation as well as its influence on the aforementioned expected return. The theoretical development is carried out considering periodic premiums under the scenarios of both pure premium and loaded premium, taking into account taxes and tax deductions. Finally, we present a numerical example that shows the applicability of the results obtained to the decision-making of the insured within a random environment with the maximum information.

Keywords: annual interest rate (real return), expected return, risk indicators based on the probability distribution of the real return, life annuity tax.

1. Aspecto general

En el ámbito financiero, la herramienta utilizada para medir en términos homogéneos la rentabilidad o coste de las operaciones bancarias es la Tasa Anual Equivalente (TAE). La TAE está definida en la Circular 5/2012, de 27 de junio, del Banco de España, a entidades de crédito y proveedores de servicios de pago, sobre transparencia de los servicios bancarios y responsabilidad en la concesión de préstamos, como el tipo de interés vencido que iguala en cualquier fecha el valor actual de los efectivos entregados y recibidos a lo largo de la operación. Para realizar este cálculo debe aplicarse un régimen financiero de interés compuesto, además de considerar las diferentes comisiones bancarias y los gastos inherentes a la operación (Alegre, *et al*., 1991).

En el mercado asegurador, no existía un instrumento de estas características hasta la aprobación del Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (ROSSEAR) surgido al armonizar la normativa española en materia de seguros a la Directiva Europea de Solvencia II (Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio). En él, se establece por primera vez la obligatoriedad de informar a los asegurados de productos de vida acerca de la rentabilidad esperada de la operación que contratan. Esta rentabilidad esperada se define en el punto 5 del artículo 124 de este Real Decreto como el tipo de interés anual que iguala los valores actuales de las prestaciones esperadas que se puedan percibir en la operación por todos los conceptos y los pagos esperados de prima y su objetivo es convertirse en un indicador homogéneo de las operaciones actuariales, equivalente a la TAE en las operaciones financieras, que dote de transparencia al sector asegurador y permita la contratación de operaciones en igualdad de condiciones de información sobre rentabilidad y precio para todos los consumidores (Devesa, *et. al*, 2016). Sin embargo, el ROSSEAR no establece la ley financiera de capitalización con la que determinar dicha rentabilidad esperada (Devesa *et al*., 2016), ni considera los gastos de gestión de la entidad aseguradora, que sí están incluidos en la determinación de la TAE.

Es importante notar que las operaciones actuariales sujetas a esta obligatoriedad de información son estocásticas ya que están condicionadas a la supervivencia o fallecimiento del asegurado a través de la tabla de mortalidad utilizada en su valoración. Ello implica que su rendimiento será estocástico al depender de la distribución de probabilidad de la contingencia cubierta y por tanto no será correcto aplicar la metodología financiera propuesta por la ley. Además, al trabajar en ambiente aleatorio, la rentabilidad esperada puede resultar una herramienta insuficiente para la toma de decisiones, sino se acompaña de alguna medida de riesgo adicional.

En cuanto a la literatura científica en la que se aborda el cálculo de la rentabilidad esperada de las operaciones de seguros de vida cabe destacar la siguiente. Devesa, *et al*. 2013 proponen un método que permite comparar diferentes operaciones actuariales a través del cálculo de la rentabilidad financiero-actuarial-fiscal igualando el valor actuarial de las primas y el valor actuarial de las indemnizaciones y considerando las características comerciales que incorpora la operación. Por su parte, Devesa, *et al*. 2016, definen la rentabilidad esperada como el tipo de interés que iguala los valores actuales de las prestaciones esperadas con los pagos esperados de primas y la calculan a través de una función implícita que debe resolverse por métodos iterativos cuyos resultados dependen del tipo de prima, de las tablas de mortalidad utilizadas y de la estructura de gastos aplicada por la aseguradora. Para Moreno, *et al.* 2017 la rentabilidad de una operación de seguros de vida es una variable aleatoria y calculan la rentabilidad esperada aplicando dos metodologías: como esperanza matemática de la variable aleatoria rentabilidad y obteniendo el tipo de interés al que se igualan los valores actuales medios esperados de las prestaciones y las primas. Pérez-Fructuoso y Alegre (2018) y Pérez-Fructuoso y Alegre (2021a) desarrollan una metodología financiero-actuarial para determinar la rentabilidad financiero-fiscal de una operación simple de capital diferido contratado a prima única y a primas periódicas utilizando un enfoque estocástico de la distribución de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*, que permite obtener, mediante el análisis de su distribución de probabilidad, la rentabilidad máxima que obtiene el asegurado, igualando, en términos financieros, el valor final de las prestaciones y las contraprestaciones derivadas del contrato. La rentabilidad esperada se calcula igualando a cero el valor esperado de la variable aleatoria *valor actual financiero del* *beneficio del producto*. Posteriormente, Pérez-Fructuoso y Alegre (2019) aplican esta metodología de determinación de las diferentes rentabilidades a una operación de seguros de vida simple de capital al final del año de fallecimiento del asegurado.

En este trabajo, como generalización de Pérez-Fructuoso y Alegre (2021b) en el que desarrollan las expresiones que permiten obtener la rentabilidad financiero-fiscal, real y esperada, que puede obtener un asegurado al contratar una renta de supervivencia diferida y vitalicia pero contratada a prima única, se obtienen dichas expresiones cuando la renta de supervivencia se contrata a primas periódicas generalizando de esta forma el cálculo de dichas rentabilidades. Este modelo genérico desarrollado puede aplicarse a cualquier operación cuando se requiere pasar de un contexto cierto a otro en el que aparece una componente de aleatoriedad. Para ello, se definirá en primer lugar la variable aleatoria tanto efectivo anual de rendimiento y se determinará su distribución de probabilidad a partir de la cuál se obtendrán los valores de las rentabilidades reales que genera la operación en cada periodo según se produzca o no la contingencia de supervivencia cubierta en el contrato. Seguidamente, se definirá la variable aleatoria *función valor actual financiero del beneficio del producto* y, tras establecer su distribución de probabilidad, se calculará la rentabilidad esperada del contrato como aquel tipo de interés que surja al anular su esperanza matemática. Finalmente, tras determinar las distribuciones de probabilidad de estas dos variables aleatorias, se obtendrán unos indicadores de riesgo que complementarán la información proporcionada por la rentabilidad esperada facilitando de esta forma la toma de decisiones al asegurado en este tipo de operaciones. Todo el análisis se llevará a cabo considerando diferentes escenarios de gastos, desgravaciones fiscales e impuestos, que, a pesar de no estar contemplados en la legislación vigente, es importante considerarlos para conseguir obtener una rentabilidad esperada lo más cercana posible a su verdadero valor.

La estructura del artículo es la siguiente. La sección 2 se presenta el marco conceptual y metodológico sobre el que se va a desarrollar el estudio. En la sección 3 se desarrollan de forma teórica las expresiones que permiten obtener los valores de la variable tipo de interés anual efectivo de una operación de renta de supervivencia a prima periódica bajo los siguientes supuestos: prima pura, prima comercial, prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital obtenido y prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación. En la sección 4 se determina la rentabilidad esperada también de forma teórica y bajo los mismos supuestos que en la sección anterior. Seguidamente, en la sección 5 se definen los indicadores de riesgo y se establece su forma de cálculo. La sección 6 presenta los resultados obtenidos de la aplicación numérica realizada en cada uno de los casos. Finalmente, la Sección 7 expone las principales conclusiones alcanzadas con el estudio.

2. Marco conceptual y metodológico

El objetivo de este trabajo es calcular la rentabilidad real, la rentabilidad esperada y dos indicadores de riesgo de una operación de seguros consistente en el pago de una renta anticipada, diferida m años y temporal n años, de función de cuantía $u(t) = h(\alpha)$ unidades monetarias, si el asegurado, de edad actual x años, llega vivo a la edad $x + m$.

En los seguros de vida, la determinación de la rentabilidad[1] depende de la distribución de probabilidad de la contingencia, en este caso de supervivencia. Por tanto, su determinación requiere utilizar métodos estadísticos de variables aleatorias debido al carácter estocástico de estas operaciones inducido por las tablas de mortalidad utilizadas, que no permite tratarlas como operaciones financieras tradicionales.

Entonces, para la operación genérica de renta de supervivencia diferida m años y temporal n años (se considera que la renta vitalicia es un caso particular de la renta temporal, en la que $n = \omega - (x + m)$), la distribución de probabilidad de la variable aleatoria tanto efectivo anual de rendimiento es, (renta vitalicia)

[1] Entendemos por rentabilidad el tanto efectivo de interés compuesto que equilibra el conjunto de primas con las prestaciones contratadas en la operación. Como a priori, en el momento de contratar la operación, no sabemos el número de primas a pagar, si ésta no es única, y también desconocemos las prestaciones que van a recibirse, este tanto efectivo será una variable aleatoria que proviene de una transformación de la distribución de supervivencia asociada al asegurado. Por todo ello, en el campo actuarial, la rentabilidad no es un valor cierto sino una variable aleatoria cuya distribución deberá estudiarse para cada operación concreta.

$$
\begin{array}{cc}
\underline{Valores\ de\ \tilde{\imath}} & \underline{Probabilidades} \\
i_0 & /_{m}q_x \\
i_1 & {}_{m/1}q_x \\
i_2 & {}_{m+1/1}q_x \\
i_3 & {}_{m+2/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
i_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x \\
i_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} \\
 & 1
\end{array}
\qquad (1)
$$

de forma que el valor de las diferentes rentabilidades i_j se obtiene igualando el valor actual financiero de las prestaciones y contraprestaciones de la operación en cada periodo:

$$VA_{i_j}(\text{prestaciones}\ \forall\ t < m + j) = VA_{i_j}(\text{contraprestaciones}\ \forall\ t < m + j) \quad \forall j \in \{0,1,2, \dots , n\} \quad (2)$$

Por otra parte, en este tipo de operaciones, la rentabilidad esperada, no puede obtenerse como la esperanza matemática de la variable aleatoria rentabilidad real de la operación. Ello es debido a que, para obtener dicha variable, su distribución de probabilidad no se transforma linealmente por lo que el valor esperado no será igual a la esperanza de la variable transformada, como, por ejemplo, sucede al determinar la esperanza de la distribución lognormal (Spiegel, *et al*., 2009). Dicho de otro modelo, al utilizar el interés compuesto para valorar financieramente este tipo de operaciones de seguros, el rendimiento medio o esperado no coincide con la esperanza matemática de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* debido a la acumulación exponencial (y no lineal) de intereses que se genera. Por ello, el cálculo de la rentabilidad esperada se realizará igualando a cero la esperanza matemática de la variable aleatoria función valor actual del beneficio (o, alternativamente, pérdida) del producto, $\tilde{B}$. Esto es, el valor esperado de la rentabilidad será el tanto efectivo que anule la esperanza matemática de la variable valor actual del beneficio para el asegurado.

Para una renta de supervivencia genérica, diferida m años y temporal n años, con primas y rentas variables, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria función valor actual del beneficio del producto es,

$$
\begin{array}{cc}
\underline{Valores\ de\ \tilde{B}} & \underline{Probabilidades} \\
-P_0 & /_{1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{2}|i^*}[u_P(t)] & {}_{1/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{3}|i^*}[u_P(t)] & {}_{2/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] & {}_{k-1/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] & {}_{k/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] & {}_{k+1/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] & {}_{m-1/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] + \alpha_0 \cdot (1+i^*)^{-m} & {}_{m/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] + -(V\ddot{a})_{\overline{2}|i^*}[u_\alpha(t)] & {}_{m+1/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] + -(V\ddot{a})_{\overline{n-1}|i^*}[u_\alpha(t)] & {}_{m+n-2/1}q_x \\
-(V\ddot{a})_{\overline{k}|i^*}[u_P(t)] + -(V\ddot{a})_{\overline{n}|i^*}[u_\alpha(t)] & \underline{{}_{m+n-1}p_x} \\
 & 1
\end{array}
\qquad (3)
$$

donde (Gerber, 1997):

- $(V\ddot{a})_{\overline{k|}i^*}[u_P(t)]$ es la contraprestación de la operación y se corresponde con el valor actual del pago de primas por parte del asegurado, mediante una renta inmediata, anticipada, temporal k años, valorada al tipo de interés i* o rentabilidad esperada, de cuantía inicial P_0, con $u_P(t)$ la función de cuantía de las primas.
- $/_m(V\ddot{a})_{\overline{n|}i^*}[u_\alpha(t)]$ es la prestación de la operación y se corresponde con el pago de la renta en caso de supervivencia del asegurado, mediante el valor actual de una renta diferida m años, anticipada, temporal n años, valorada al tipo de interés i* o rentabilidad esperada, de cuantía inicial α_0, con $u_\alpha(t)$ la función de cuantía de los términos de la renta.
- $_{s/1}q_x = \frac{l_{x+s}-l_{x+s+1}}{l_x}$ $\forall s = 1,2,\dots,k,\dots,m+n-2$ es la probabilidad de fallecimiento, diferida s años y temporal 1 año.
- l_x es el colectivo de personas vivas a la edad x.
- $_{m+n-1}p_x = \frac{l_{x+m+n-1}}{l_x}$ es la probabilidad de supervivencia de una persona de edad x, m+n-1 años más.

A continuación, en los epígrafes 3 y 4 siguientes, se desarrolla matemáticamente el cálculo de la rentabilidad real y la rentabilidad esperada para una renta de supervivencia diferida m años, temporal n años, anticipada y de términos variables $\{\alpha_t\}_{t=m,m+1,\dots,m+n-1}$ que se hacen efectivos siempre que el asegurado de edad actual x años, cuando llegue vivo a cada uno de los momentos de pago de dichos términos. Como contraprestación de la operación, el asegurado paga durante k años, con $k \leq m$, una prima periódica, anticipada y constante de importe P unidades monetarias cuyo cálculo dependerá de cada uno de los siguientes supuestos analizados: 1) prima pura, 2) prima comercial, 3) prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital obtenido y 4) prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación. Al considerar las condiciones fiscales, a través de los correspondientes impuestos y desgravaciones, los tipos de interés de equilibrio obtenidos serán la rentabilidad financiero-fiscal de la operación.

3. Cálculo del tipo de interés efectivo anual o rentabilidad real de una renta de supervivencia contratada a prima periódica

3.1. *Prima pura periódica*

La prima pura periódica de una renta de supervivencia, P, se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio financiero-actuarial al principio de la operación, esto es, igualando el valor actual actuarial de las contraprestaciones con el valor actual actuarial de las prestaciones en $t = 0$ (Promislow, 2015),

$$P \cdot /_k\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot \ _tp_x \qquad (4)$$

con,

$$/_k\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{k} (1+i)^{-t} \cdot \ _tp_x$$

de forma que su valor es:

$$P = \frac{\sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot \ _tp_x}{\sum_{t=0}^{k} (1+i)^{-t} \cdot \ _tp_x} \qquad (5)$$

Nota: En todo el trabajo se utilizan sumas y no sumatorios tal que $\sum_{t=0}^{n} X_t = X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$, esto es, la suma desde el extremo inferior hasta el anterior al extremo superior. En forma de sumatorio se expresa como sigue:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} = \sum_{t=0}^{n-1}$$

El uso del operador suma presenta ventajas respecto al del sumatorio, ya que unifica los cálculos discreto y continuo. La suma cumple la propiedad de escindibilidad (como sucede con la integral), de forma que para $m < n$:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} X_t = \sum\nolimits_{t=0}^{m} X_t + \sum\nolimits_{t=m}^{n} X_t$$

Esta propiedad es fundamental para el tratamiento de las rentas discretas, por ejemplo, en el caso de las rentas unitarias y prepagables, la escindibilidad permite expresarlas como,

$${}_{/n}\ddot{a}_x = {}_{/m}\ddot{a}_x + {}_{m/n-m}\ddot{a}_x$$

o, equivalentemente:

$$\sum\nolimits_{t=0}^{n} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t} = \sum\nolimits_{t=0}^{m} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t} + \sum\nolimits_{t=m}^{n} {}_t p_x \cdot (1+i)^{-t}$$

Definimos la variable aleatoria rentabilidad real o tipo de interés efectivo anual de una renta de jubilación contratada a prima pura periódica. La función de cuantía de esta variable aleatoria y el cálculo, mediante un proceso iterativo, de los valores correspondientes a cada una de las rentabilidades, según el periodo considerado, viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}} & \underline{\text{Probabilidades}} & \underline{\text{Cálculo}} \\
i_0 & {}_{/m}q_x & -1 \\
i_1 & {}_{m/1}q_x & P \cdot \ddot{a}_{\overline{k|}i_1} = \alpha_m \cdot (1+i_1)^{-m} \\
i_2 & {}_{m+1/1}q_x & P \cdot \ddot{a}_{\overline{k|}i_2} = \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t \cdot (1+i_2)^{-t} \\
i_3 & {}_{m+2/1}q_x & P \cdot \ddot{a}_{\overline{k|}i_3} = \sum_{t=m}^{m+3} \alpha_t \cdot (1+i_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x & P \cdot \ddot{a}_{\overline{k|}i_{n-1}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} \alpha_t \cdot (1+i_{n-1})^{-t} \\
i_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} & P \cdot \ddot{a}_{\overline{k|}i_n} = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i_n)^{-t} \\
 & 1 &
\end{array} \tag{6}$$

3.2. *Prima comercial periódica*

La prima comercial, también denominada prima de tarifa, es aquella destinada a cubrir los gastos directos por siniestralidad y los gastos generales de gestión y administración, gastos comerciales o de adquisición, gastos de cobro de las primas, gastos de liquidación de siniestros y el margen de beneficios de la compañía. Dicha prima se calcula, como un tanto por uno, g, con $0 \leq g \leq 1$, sobre la prima pura:

$$P' = P \cdot (1+g) \tag{7}$$

Se deduce de esta definición que este caso tendrá un planteamiento idéntico al de la prima pura en cuanto a obtención del tipo de interés efectivo real, simplemente substituyendo en la ecuación (6), P por la ecuación (7).

Por tanto, la distribución de probabilidad y las expresiones que permiten calcular los diferentes valores de la rentabilidad real en cada uno de los periodos de la operación son:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}'} & \underline{\text{Probabilidades}} & \underline{\text{Cálculo}} \\
i'_0 & /_m q_x & -1 \\
i'_1 & {}_{m/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_1} = \alpha_m\cdot(1+i_1)^{-m} \\
i'_2 & {}_{m+1/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_2} = \sum_{t=m}^{m+2}\alpha_t\cdot(1+i_2)^{-t} \\
i'_3 & {}_{m+2/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_3} = \sum_{t=m}^{m+3}\alpha_t\cdot(1+i_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i'_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_{n-1}} = \sum_{t=m}^{m+n-1}\alpha_t\cdot(1+i_{n-1})^{-t} \\
i'_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} & P\cdot(1+g)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_n} = \sum_{t=m}^{m+n}\alpha_t\cdot(1+i_n)^{-t} \\
 & 1 &
\end{array} \tag{8}$$

3.3. *Prima comercial periódica con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital*

En este caso, la contraprestación de la renta de supervivencia está formada por el pago de una prima comercial periódica neta, de importe $P\cdot(1+g)\cdot(1+\beta)$ unidades monetarias, siendo β el tipo impositivo del partícipe en el momento $t=0$ o desgravación fiscal, con $0\leq g\leq 1$ y $0\leq\beta\leq 1$. A cambio de esta prima, si el asegurado sigue con vida a los $x+m$ años recibe una renta de cuantía $\{\alpha_t\}_{t=m,m+1,\dots,m+n-1}$ unidades monetarias durante n periodos por la cual ha de pagar unos impuestos de la forma $\{\alpha_t\cdot(1-\delta)\}_{t=m,m+1,\dots,m+n-1}$, siendo $0\leq\delta\leq 1$ el tipo impositivo pagadero en el momento del cobro de cada uno de los términos de la renta.

Los valores de la variable aleatoria rentabilidad real de la operación, en este caso, se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}''} & \underline{\text{Probabilidades}} & \underline{\text{Cálculo}} \\
i''_0 & /_m q_x & -1 \\
i''_1 & {}_{m/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_1} = \alpha_m\cdot(1-\delta)\cdot(1+i_1)^{-m} \\
i''_2 & {}_{m+1/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_2} = (1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+2}\alpha_t\cdot(1+i_2)^{-t} \\
i''_3 & {}_{m+2/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_3} = (1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+3}\alpha_t\cdot(1+i_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i''_{n-1} & {}_{m+n-2/1}q_x & P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_{n-1}} = (1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+n-1}\alpha_t\cdot(1+i_{n-1})^{-t} \\
i''_n & \underline{{}_{m+n-1}p_x} & P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i_n} = (1-\delta)\cdot\sum_{t=m}^{m+n}\alpha_t\cdot(1+i_n)^{-t} \\
 & 1 &
\end{array} \tag{9}$$

3.4. *Prima comercial periódica con pago de impuestos sobre los rendimientos*

La prima periódica correspondiente a la renta completa se obtiene como suma de las primas periódicas correspondientes a cada término de la renta, suponiendo que dichos términos son capitales diferidos que se pagan en cada uno de los periodos de duración de la renta, esto es,

$$P=\sum_{t=m}^{m+n}P_t \tag{10}$$

donde,

$$P_t\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|i}=\alpha_t\cdot(1+i)^{-t}\cdot\ {}_tp_x \tag{11}$$

y por tanto P_t vale:

$$P_t=\alpha_t\cdot\frac{(1+i)^{-t}\cdot\ {}_tp_x}{\sum_{t=0}^{k}(1+i)^{-t}\cdot\ {}_tp_x} \tag{12}$$

Bajo este supuesto, el asegurado paga unos impuestos por los rendimientos recibidos en el momento del cobro de cada uno de los términos de la renta. Estos impuestos serán un porcentaje δ con $0\leq\delta\leq 1$, del capital obtenido menos la prima pagada de forma que el término de la renta neto de impuestos vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\alpha_t^N = \alpha_t - (\alpha_t - k \cdot P_t) \cdot \delta = \alpha_t \cdot (1-\delta) + k \cdot P_t \cdot \delta =$$

$$= \alpha_t \cdot (1-\delta) + k \cdot \alpha_t \cdot \frac{(1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x}{\sum_{t=0}^{k}(1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x} \cdot \delta = \alpha_t \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{k \cdot (1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x}{\sum_{t=0}^{k}(1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x}\right) \cdot \delta\right] \quad (13)$$

Entonces, substituyendo en (12), α_t por el valor de α_t^N obtenido en (13), la distribución de probabilidad de la rentabilidad real de la operación, así como el cálculo de los diferentes valores que toma dicha rentabilidad en función del periodo de la renta, resulta:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\tilde{\imath}'''} & \underline{\text{Probabilidades}} & \underline{\text{Cálculo}} \\
i_0''' & {}_{/m}q_x & -1 \\
i_1''' & {}_{m/1}q_x & P \cdot (1+g) \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i_1} = \alpha_m^N \cdot (1+i_1)^{-m} \\
i_2''' & {}_{m+1/1}q_x & P \cdot (1+g) \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i_2} = \sum_{t=m}^{m+1} \alpha_t^N \cdot (1+i_2)^{-t} \\
i_3''' & {}_{m+2/1}q_x & P \cdot (1+g) \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i_3} = \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t^N \cdot (1+i_3)^{-t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i_{n-1}''' & {}_{m+n-2/1}q_x & P \cdot (1+g) \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i_{n-1}} = \sum_{t=m}^{m+n-2} \alpha_t^N \cdot (1+i_{n-1})^{-t} \\
i_n''' & {}_{m+n-1}p_x & P \cdot (1+g) \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i_n} = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t^N \cdot (1+i_n)^{-t} \\
 & \overline{1} &
\end{array} \quad (14)$$

4. Cálculo de la rentabilidad esperada de una renta de supervivencia contratada a prima periódica

El cálculo de la rentabilidad esperada se desarrollará, como en el epígrafe anterior, para el caso de que la operación se contrate a prima pura[2] y comercial, periódicas y constantes y considerando, además, las dos situaciones descritas respecto a la fiscalidad de estas operaciones.

4.1. *Prima pura periódica*

Para calcular la rentabilidad esperada, *i**, se define la variable aleatoria *función valor actual del beneficio del producto*, cuya distribución de probabilidad resulta:

$$\begin{array}{cc}
\underline{\tilde{B}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\
-P & {}_{/1}q_x \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|i^*} & {}_{1/1}q_x \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|i^*} & {}_{2/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} & {}_{k-1/m-(k-1)}q_x \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} + \alpha_m \cdot (1+i^*)^{-m} & {}_{m/1}q_x \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} + \sum_{t=m}^{m+2} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} & {}_{m-1/1}q_x \\
\vdots & \vdots \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} + \sum_{t=m}^{m+n-1} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} & {}_{m+n-2/1}q_x \\
-P \cdot \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} + \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} & {}_{m+n-1}p_x \\
 & \overline{1}
\end{array} \quad (15)$$

El valor de i^*, se obtiene haciendo cero el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{B}$, $E(\tilde{B}) = 0$, esto es,

[2] Alternativamente se podría sustituir la prima pura o la prima recargada, por la prima comercial, que sería mayor y daría lugar a una rentabilidad esperada menor y un indicador de riesgo de rentabilidad negativa mayor.

$$P \cdot \left[\sum_{t=0}^{k} \ddot{a}_{\overline{t+1}|i^*} \cdot {}_{t/1}q_x + \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} \cdot {}_{k-1}p_x\right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=m}^{m+j} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t}\right) \cdot {}_{m+j-1/1}q_x + \left(\sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t}\right) \cdot {}_{m+n-1}p_x \qquad (16)$$

y simplificando resulta:

$$P \cdot \left[\sum_{t=0}^{k} \ddot{a}_{\overline{t+1}|i^*} \cdot {}_{t/1}q_x + \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} \cdot {}_{k-1}p_x\right] = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (17)$$

Operando en el corchete de la ecuación (17) tenemos,

$$\sum_{t=0}^{k} \ddot{a}_{\overline{t+1}|i^*} \cdot {}_{t/1}q_x + \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} \cdot {}_{k-1}p_x = \sum_{j=1}^{k} \ddot{a}_{\overline{j}|i^*} \cdot {}_{j-1/1}q_x + \ddot{a}_{\overline{k}|i^*} \cdot {}_{k-1}p_x =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{t=0}^{j} (1+i^*)^{-t}\right) \cdot {}_{j-1/1}q_x + \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{k-1}p_x =$$
$$= \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot \sum_{j=T}^{k} {}_{j-\frac{1}{1}}q_x + \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{k-1}p_x =$$
$$= \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot ({}_{t}p_x - {}_{k-1}p_x) + \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{k-1}p_x =$$
$$= \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (18)$$

de forma que el rendimiento esperado se obtiene como solución de la ecuación,

$$P \cdot \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (19)$$

resultado que coincide con la ecuación (4). Esto significa que, cuando la renta de supervivencia se contrata a prima pura periódica, la rentabilidad esperada de la operación coincide con el tipo de interés técnico de la misma, $i^* = i$.

4.2. *Prima comercial periódica*

Si la prima es comercial, sustituyendo en la ecuación (19), P por la ecuación (7), se obtiene la ecuación que permite obtener la rentabilidad esperada:

$$P \cdot (1+g) \cdot \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (20)$$

4.3. *Prima comercial periódica con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital*

En este caso, la rentabilidad esperada se obtiene, mediante proceso iterativo, como sigue:

$$P \cdot (1+g) \cdot (1-\beta) \cdot \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x = (1-\delta) \cdot \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (21)$$

4.4. *Prima comercial periódica con pago de impuestos sobre los rendimientos*

Para una renta supervivencia, que considera el pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos el valor de la rentabilidad esperada se obtiene, mediante un proceso iterativo, substituyendo en la ecuación (21), α_t por el valor de α_t^N obtenido en (13), como sigue:

$$P \cdot (1+g) \cdot \sum_{t=0}^{k} (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x = \sum_{t=m}^{m+n} \alpha_t^N \cdot (1+i^*)^{-t} \cdot {}_{t}p_x \qquad (22)$$

5. Indicadores de riesgo

Como es bien sabido, la rentabilidad esperada es un valor cierto que representa, en promedio, los valores posibles de la variable aleatoria. Esta representación será más o menos fiable dependiendo de la dispersión de la distribución de dicha variable aleatoria, que será muy distinta según la operación actuarial de que se trate.

En este trabajo, al no ser simétrica la distribución de la variable aleatoria analizada, además del cálculo de la rentabilidad *tipo de interés efectivo anual* y de la *rentabilidad esperada* se definen unos coeficientes o indicadores de riesgo que no están relacionados con la varianza de la distribución que complementan la información proporcionada por la rentabilidad esperada y facilitan la toma de decisiones al asegurado en este tipo de operaciones.

En concreto se determinan dos indicadores de riesgo. El primero, relacionado con la rentabilidad real de la renta de jubilación contratada, se define como la probabilidad de que la rentabilidad de la operación de supervivencia contratada no sea negativa y se obtiene como la suma de todas las probabilidades diferidas de fallecimiento a partir del primer valor $i_j \geq 0$. El segundo indicador de riesgo, relacionado con la rentabilidad esperada, vendrá dado por la probabilidad de que la rentabilidad esperada sea superior a la real e indica la confianza que tiene el asegurado en obtener una rentabilidad real que sea como mínimo la rentabilidad esperada.

Tabla 1. Indicadores de riesgo

	Primer indicador de riesgo	**Segundo Indicador de riesgo**
Prima pura	$p[\tilde{\imath} \geq 0]$	$p[\tilde{\imath} \geq i^*]$
Prima comercial	$p[\tilde{\imath}' > 0]$	$p[\tilde{\imath}' \geq i^*]$
Prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos	$p[\tilde{\imath}'' > 0]$	$p[\tilde{\imath}'' \geq i^*]$
Prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos	$p[\tilde{\imath}''' > 0]$	$p[\tilde{\imath}''' > i^*]$

6. Aplicación numérica

Con el objeto de complementar la metodología teórica desarrollada en las secciones anteriores, en este apartado obtenemos numéricamente las rentabilidades reales y esperadas, así como los indicadores de riesgo asociados a una renta de supervivencia cuya base técnica es la siguiente.

La operación contratada es una renta de supervivencia prepagable y vitalicia, de cuantía constante igual a un euro si el asegurado, que hoy tiene 40 años, llega vivo a los 65 años. Esta renta, por tanto, está diferida 25 años, $m = 25$. A cambio de esta prestación, el asegurado paga una prima pura periódica durante 10 años de importe una unidad monetaria al inicio de cada periodo. Para analizar esta operación cuando se contrata a prima comercial, se consideran unos gastos de gestión interna y externa y el margen de beneficios del $g = 5\%$ sobre la prima pura. Finalmente, para estudiar el efecto de la introducción de impuestos en la renta de supervivencia contratada a prima comercial, se considera un tipo impositivo inicial o desgravación fiscal del $\beta = 30\%$ y un tipo impositivo final sobre los rendimientos del $\delta = 20\%$.

El tipo de interés técnico aplicado a la operación es del 1,09% o $i = 0{,}0109$, y las tablas de mortalidad utilizadas en los cálculos son las PASEM 2010 para el colectivo de hombres publicadas en el Boletín Oficial del Estado (BOE) núm. 174, de 21 de julio de 2012. El uso de estas tablas de mortalidad viene determinado en el artículo 6 de la Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, por la que se regula el cálculo de la rentabilidad esperada de las operaciones de seguro de vida, que establece la tabla PASEM 2010 para hombres, cuando el capital en riesgo sea positivo, y la tabla PER 2000-P para mujeres, cuando el capital en riesgo sea negativo e independientemente de la tabla utilizada en el cálculo de la prima del seguro. Este mismo artículo permite utilizar otras tablas de mortalidad para calcular las probabilidades de supervivencia y fallecimiento implicadas en los contratos siempre que la rentabilidad esperada resultante no supere al valor de dicha rentabilidad obtenido aplicando las tablas referidas anteriormente.

Todos los cálculos del presente trabajo se han realizado programando las diferentes expresiones de las rentabilidades, tanto reales como esperadas, en el programa R Studio.

Entonces, la Tabla (2) a continuación muestra los valores de la rentabilidad real o tipo de interés efectivo anual para todos los periodos de la operación, cuando la prima pagada es periódica y en cada uno de los cuatro escenarios analizados (prima pura periódica, PPP, prima comercial periódica PCP, prima comercial periódica con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital, PCP con β y δ, y prima comercial periódica con pago de impuestos sobre los rendimientos, PCP con δ) y las probabilidades de fallecimiento diferidas $m = \{25, 26, \dots, 67\}$ años y temporales $t = 1$ que permitirán calcular posteriormente los indicadores de riesgo de la operación:

Tabla 2: Rentabilidad Real (tipo de interés efectivo anual). Renta de Supervivencia Prima Periódica

Edad	**PPP**	**PCP**	**PCP con β y δ**	**PCP con δ**	**Probabilidad**
65	-1	-1	-1	-1	0,134577129
66	-0,110376105	-0,112608551	-0,106530565	-0,115445651	0,010993467
67	-0,076643492	-0,078854955	-0,072798979	-0,081723552	0,012012423
68	-0,056765833	-0,058938382	-0,052953556	-0,061858653	0,01319562
69	-0,042805282	-0,044947926	-0,039048722	-0,047899079	0,014562786
70	-0,032168959	-0,034304066	-0,028484941	-0,037318232	0,016135942
71	-0,023708893	-0,025760495	-0,02007623	-0,028799521	0,017934818
72	-0,016734167	-0,018779183	-0,013175317	-0,021842624	0,019986951
73	-0,010889266	-0,012898243	-0,007355914	-0,016006445	0,022326678
74	-0,005859442	-0,007840185	-0,002413824	-0,011014083	0,024978031
75	-0,001599433	-0,003545082	0,001814302	-0,006703551	0,027962636
76	0,00219329	0,00025639	0,005532906	-0,002942956	0,031276566
77	0,005512622	0,003624807	0,008809195	0,000357037	0,034890668
78	0,008468799	0,006597952	0,011727228	0,003267478	0,038731947
79	0,011088632	0,009261867	0,014268843	0,005907314	0,042680498
80	0,013418926	0,011636597	0,016584139	0,008241779	0,046540982
81	0,015553396	0,013756528	0,018636803	0,010359211	0,047556282
82	0,017473973	0,015711978	0,020540877	0,012200894	0,047994325
83	0,019185745	0,017478621	0,022238783	0,013927395	0,047751686
84	0,020797937	0,019082698	0,023796095	0,015488451	0,046765095
85	0,022242865	0,020551434	0,025169308	0,016905225	0,04501643
86	0,023573352	0,021922171	0,026478549	0,01820052	0,042529971
87	0,024803837	0,023130763	0,027659241	0,019388215	0,039343881
88	0,025886274	0,024276029	0,028743526	0,020480298	0,03553499
89	0,026923111	0,025280085	0,029741122	0,02148716	0,031232853
90	0,027872852	0,026274399	0,030660463	0,022417836	0,026625046
91	0,028751082	0,027169218	0,031508913	0,023280191	0,021942632
92	0,029564387	0,027998665	0,032292928	0,024086354	0,017429793
93	0,030318568	0,028768611	0,033004191	0,024832736	0,013312193
94	0,031018755	0,029484249	0,033695064	0,025528889	0,009756297
95	0,031669499	0,03015019	0,034341283	0,026179338	0,006849716
96	0,032274857	0,030770537	0,034927934	0,026788039	0,004600317
97	0,032838457	0,03134896	0,035474814	0,027358465	0,002951224
98	0,033372562	0,031888747	0,035985288	0,027893686	0,001805725
99	0,033881316	0,032392857	0,036462393	0,028396431	0,001051919
100	0,034345861	0,032863958	0,036877923	0,028869143	0,000582309
101	0,034781244	0,033304463	0,037296637	0,029314024	0,000305641
102	0,035189733	0,033746463	0,037688799	0,02973307	0,000160294
103	0,035573399	0,034139614	0,038056392	0,030128096	7,07E-05
104	0,035934134	0,034509314	0,038419765	0,030500761	2,85E-05
105	0,036235952	0,034857294	0,038742014	0,030852585	1,04E-05
106	0,036555205	0,03518514	0,03904486	0,031184961	3,38E-06
107	0,036855704	0,03549431	0,039329684	0,031499174	9,60E-07

Como se observa en la Tabla 2, cuando la prima periódica pagada es pura o comercial, la rentabilidad real de la operación es negativa durante los 11 primeros términos de la renta, desde los 65 años y hasta los 75 años del asegurado. Sin embargo, cuando existe una desgravación fiscal y se pagan impuestos sobre el capital, los términos negativos de la rentabilidad real de la renta son 10, mientras que en el caso de que se paguen impuestos sobre los rendimientos existen 12 periodos en los que dicha rentabilidad es negativa. Desde entonces, en todos los casos analizados la rentabilidad es positiva y mayor cuantos más términos de la renta recibe el asegurado y alcanza su valor máximo al término de la operación si es el asegurado llega vivo a los 107 años.

En lo referente a la rentabilidad esperada, si la prima pagada es periódica, bajo los diferentes supuestos analizados, alcanza los valores que se muestra en la Tabla (3) siguiente:

Tabla 3. Rentabilidad Esperada Renta de Supervivencia Prima Periódica

PPP	**PCP**	**PCP con β y δ**	**PCP con δ**
0,0109	0,009223326	0,01383216	0,005608937

Resulta evidente que cuando la prima periódica es pura, la rentabilidad esperada coincide con el tipo de interés técnico de la operación. Si la prima es comercial la rentabilidad esperada es i*= 0,009223326, valor inferior al tipo de interés técnico de la operación y por tanto a la rentabilidad esperada obtenida en el caso de prima pura periódica. Cuando la prima pagada es comercial y considera una bonificación fiscal del 30% sobre el pago de cada una de las primas y el pago de unos impuestos del 20% sobre el capital, la rentabilidad esperada es i*= 0,01383216, superior al tipo de interés técnico de la operación y también a la rentabilidad esperada obtenida en el caso de prima pura periódica. Finalmente, la rentabilidad esperada cuando se consideran los impuestos sobre los rendimientos es i*= 0,005608937, inferior al tipo de interés técnico de la operación y también a la rentabilidad esperada obtenida en cualquier de los tres casos analizados previamente.

Respecto a los indicadores de riesgos se calculan dos. El primero de ellos es la probabilidad $p[\tilde{\imath} \geq 0]$, que informa acerca de que la rentabilidad real de la renta de supervivencia contratada no sea negativa y es el resultado de sumar todas las probabilidades diferidas de fallecimiento desde el momento en que la rentabilidad deja de ser negativa para pasar a ser positiva o nula, y hasta el final de la operación.

El segundo indicador de riesgo, que muestra la confianza del asegurado en obtener un tipo de interés real mayor o igual a la rentabilidad esperada, se obtiene sumando las probabilidades diferidas de fallecimiento a partir del pago del término de la renta en el que el tipo de interés real supera por primera vez al tipo de interés esperado, y hasta el final de la operación.

Los valores de los indicadores de riesgo se muestran en la Tabla (4):

Tabla 4. Indicadores de riesgo. Renta de Supervivencia a Prima Periódica

	PPP	**PCP**	**PCP con β y δ**	**PCP con δ**
Primer indicador de riesgo	0,68533323	0,685333234	0,71329587	0,65405667
Segundo indicador de riesgo	0,58043405	0,58043405	0,58043405	0,58043405

Los valores obtenidos indican que el primer indicador relativo a la probabilidad de que la rentabilidad real obtenida sea positiva es menor en el caso de que la renta de supervivencia se contrate a prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos. La mayor probabilidad de obtener una rentabilidad real positiva se produce en el caso de que haya desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital. Además, se cumple la relación $p[\tilde{\imath}' > 0] \leq p[\tilde{\imath} > 0]$ al ser $g > 0$.

El segundo indicador de riesgo es la probabilidad de que la rentabilidad real obtenida sea superior a la rentabilidad esperada de la operación y, para este ejemplo, coincide en todos los casos alcanzando una probabilidad del 58,04%.

7. Conclusiones

Desde la aprobación del Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, la rentabilidad esperada se ha convertido en el instrumento seleccionado por el sector asegurador para dotar de transparencia al mercado lo que ha permitido a los potenciales clientes la comparación de operaciones actuariales con características similares.

No obstante, es importante notar que la rentabilidad esperada presenta deficiencias importantes para ser considerada un indicador homogéneo de la rentabilidad de las operaciones actuariales. En primer lugar, debería concretarse legalmente la metodología a seguir para su cálculo ya que, como se ha mencionado anteriormente, no se establece la ley financiera de capitalización a utilizar ni se considera la inclusión de los gastos de la entidad aseguradora en su determinación lo que puede resultar en una rentabilidad real inferior a la esperada. Por otra parte, debería hacerse extensivo el cálculo de la rentabilidad esperada a todas las operaciones de seguros, especialmente en aquellas en las que media un largo periodo de tiempo entre el momento de la contratación y el momento en el que se produce la prestación. Cabe destacar que actualmente las rentas vitalicias y temporales sin contraseguro no tienen la obligación de informar sobre la rentabilidad esperada exclusión que no resulta comprensible al tratarse de modalidades de seguros de vida cuya naturaleza es plenamente de inversión. Finalmente, sería importante que la ley incluyera junto a la rentabilidad esperada, la obligatoriedad de calcular otros indicadores de riesgo que facilitaran la toma de decisiones por parte de los asegurados. En una operación actuarial de ahorro, el tipo de interés efectivo o rentabilidad real es aleatorio porque depende de las tablas de mortalidad utilizadas para el cálculo de las probabilidades de supervivencia que intervienen en su valoración. La distribución de probabilidad de este tipo de interés efectivo anual será una transformación de la distribución de probabilidad asociada a la supervivencia y su obtención se realizará a partir del valor esperado de dicha distribución cuya interpretación varía en función de la dispersión que presente la variable aleatoria analizada. Por ello, tomar decisiones suponiendo que el valor esperado representa exactamente lo mismo que el tanto efecto de rentabilidad en la operación cierta es muy arriesgado por lo que resulta de mucha utilidad añadir información adicional que permita, por ejemplo, conocer el valor mínimo y el valor máximo posibles que puede alcanzar la rentabilidad de la operación, definiendo de esa forma un intervalo en el que se puede mover la rentabilidad real una vez finalice la operación. Este intervalo ser de gran amplitud por lo que se podrían establecer distintos criterios acerca de la rentabilidad de la operación, que pueda tener en cuenta el asegurado en el momento de suscribirla. Estos criterios podrían ser informar acerca de la confianza de no perder el capital de la prima invertido o la de obtener como mínimo la rentabilidad esperada, como se plantea en el presente trabajo a través de los indicadores de riesgo.

En este trabajo se ha calculado la rentabilidad real, la rentabilidad esperada y dos indicadores de riesgo de una renta de supervivencia, cuando esta operación se contrata a prima periódica tanto pura como comercial e introduciendo la fiscalidad de la operación, con los correspondientes impuestos y bonificaciones en su caso. Para calcular las diferentes rentabilidades se han aplicado métodos estadísticos de variables aleatorias, puesto que su comportamiento está estrechamente relacionado con la distribución de probabilidad de la contingencia cubierta en la operación. En primer lugar se ha obtenido la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* a partir de la cuál, además de conseguir los diferentes valores de la rentabilidad real de la operación, también se calculan, utilizando las probabilidades diferidas de fallecimiento, dos indicadores de riesgo que proporcionan información sobre la probabilidad de pérdida de la operación y sobre la probabilidad de obtener una rentabilidad real superior a la esperada según ocurra o no la contingencia prevista y el momento en el que dicha contingencia se produzca.

Sin embargo, al utilizar la ley de capitalización compuesta para valorar financieramente estas operaciones, cuya periodicidad se extiende al medio o largo plazo, la transformación no será lineal sino exponencial y, por consiguiente, el rendimiento medio o esperado no coincidirá con la esperanza matemática de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*. Por ello, para determinar el tanto efectivo de rentabilidad esperada primeramente se establece la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *función valor actual del beneficio (pérdida) del producto* de forma que la rentabilidad esperada la que resulte de igualar la esperanza matemática del valor de las prestaciones y de las contraprestaciones en el momento inicial de la operación. Pero este valor esperado, no deja de ser un promedio y su representatividad puede ser muy pequeña cuando queremos analizar de forma individual la operación para un asegurado, de forma similar a lo que sucede cuando asociamos la renta *per cápita* como renta media de la población, a uno de sus integrantes de forma individual. Como consecuencia de ello, para tomar decisiones sobre una operación actuarial, no podemos utilizar simplemente el *tanto efectivo de rentabilidad esperada*, como sucedía con el tanto efectivo anual equivalente en las operaciones financieras, sino que proponemos añadir información adicional sobre el riesgo de la operación a través de los dos indicadores de riesgo calculados.

Finalmente, respecto a la fiscalidad de la operación, la propuesta realizada para determinar la base imponible del impuesto aplicable a los rendimientos, determinando la cuantía del rendimiento imputable a cada uno de los términos de la renta de supervivencia, consiste en considerar dicha renta como una suma de operaciones simples de seguros denominadas capital diferido. Así, se descomponen las primas de la operación en las correspondientes a cada uno de sus términos como un capital diferido y se considera la aplicación del impuesto sobre el rendimiento obtenido, restando de la cuantía del correspondiente término de la renta, las primas que lo han generado como capital diferido.

Referencias Bibliográficas

Alegre Escolano, P. & Sáez Madrid, J. (1991). Sobre la denominada tasa de rentabilidad financiero fiscal. *Revista Española de Financiación y Contabilidad,* 20(67), 465–487.

Devesa Carpio, J. E., Devesa Carpio, M., Alonso Fernández, J. J., Domínguez Fabián, I., Meneu Gaya, R. & Encinas Goenechea, B. (2016). El reto de las entidades aseguradoras ante la introducción de la rentabilidad esperada en España. *Universia Business Review*, 52, 168-197.

Gerber, H. (1997) *Insurance Mathematics*. Springer.

Moreno Ruiz, R., Trigo Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. & Escobar López, R. N. (2017). Rentabilidad esperada en seguros de vida: análisis actuarial de la metodología de cálculo a la luz de la Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 4ª época, 23,102-128.

Circular 5/2012. Circular del Banco de España, a entidades de crédito y proveedores de servicios de pago, sobre transparencia de los servicios bancarios y responsabilidad en la concesión de préstamos (27 de junio de 2012). https://www.boe.es/boe/dias/2012/07/06/pdfs/BOE-A-2012-9058.pdf.

Devesa Carpio, J.E., Devesa Carpio, M., Alonso Fernández, J.J., Domínguez Fabián, I., Encinas Goenechea, B. & Meneu Gaya, R. (2013). La rentabilidad actuarial como método de comparación de las operaciones financieras y aseguradoras. En Gómez, E., Guillén, M. & Vázquez, F. (Eds.). *Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: Riesgo 2013* (pp.85-98). Fundación Mapfre.

Directiva 2009/138/UE. Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II) (25 de noviembre de 2009). https://www.boe.es/doue/2009/335/L00001-00155.pdf

Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, por la que se regula el cálculo de la rentabilidad esperada de las operaciones de seguro de vida (13 de diciembre de 2014). https://www.boe.es/eli/es/o/2014/12/12/ecc2329

Pérez-Fructuoso, M.J. & Alegre Escolano, A. (2018). Cálculo de la rentabilidad esperada y cuantificación del riesgo en una operación de ahorro de capital diferido a prima (pura y comercial) única. *Rect@*, 19, 17-34. https://doi.org/10.24309/recta.2018.19.1.02

Pérez-Fructuoso, M.J. & Alegre Escolano, A. (2019). Cálculo estocástico de la rentabilidad financiero-fiscal de una operación de capital al final del periodo de fallecimiento del asegurado. *Revista Investigación Operacional*, 40(4), 475-495.

Pérez-Fructuoso, M. J. & Alegre Escolano, A. (2021a). Cálculo de la rentabilidad financiero-fiscal de una operación de capital diferido a prima periódica. *INNOVAR*, 31(80), 29-43.

Pérez-Fructuoso, M. J. & Alegre Escolano, A. (2021b). Rentabilidad financiero-fiscal de las rentas de jubilación temporales o vitalicias aseguradas y contratadas a prima única. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 4ª época, 27, 113-133. https://doi.org/10.26360/2021_5

Promislow, S.D. (2015). *Fundamentals of Actuarial Mathematics* (3rd ed.). Ringgold Inc.

Real Decreto 1060/2015. Real Decreto de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (20 de noviembre de 2015). https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2015-13057.

Spiegel, M. & Stephens, L.J. (2009). *Estadística*, 4ª ed, McGraw-Hill Interamericana, México D.F.