



## Constant elasticity of variance model: An application in the stock market of Lima

### Modelo con elasticidad constante de la varianza: Una aplicación en la Bolsa de Valores de Lima

Dennis Quispe S.  and Obidio Rubio 

Received, Apr. 20, 2020

Accepted, Jun. 15, 2022



#### How to cite this article:

Quispe D, Rubio O. *Modelo con elasticidad constante de la varianza: Una aplicación en la Bolsa de Valores de Lima*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(1):79–90. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.06>

#### Abstract

*The objective of this article is to present the constant elasticity of variance model, its main probabilistic aspects, and we implement the stochastic Runge Kutta method to simulate the sample trajectories based on the data of the CREDITC1 asset of the Bank of Credit from Perú taken from the Lima stock exchange.*

**Keywords** . Constant elasticity of variance, stochastic differential equation, elasticity factor, stochastic Runge Kutta method, Lima stock exchange.

#### Resumen

*El objetivo de este artículo es presentar el modelo con elasticidad constante de la varianza, sus principales aspectos probabilísticos, así como implementar el método de Runge Kutta estocástico para simular las trayectorias muestrales en base a la data del activo CREDITC1 del Banco de Crédito del Perú tomada de la bolsa de valores de Lima.*

**Palabras clave**. Elasticidad constante de la varianza, ecuación diferencial estocástica, factor de elasticidad, método de Runge Kutta estocástico, bolsa de valores de Lima.

**1. Introducción.** La teoría moderna de valoración de activos financieros comienza con la publicación de la famosa fórmula de Black-Scholes publicada en 1973[2], ellos utilizan la teoría de integración y ecuaciones diferenciales estocásticas propuestas por el matemático japonés Kiyoshi Ito en el año 1942.

A pesar de su popularidad y uso generalizado del modelo de Black-Scholes, ésta se basa en algunas hipótesis poco realistas como la suposición de que las volatilidades son constantes en el tiempo, lo cual no siempre es así.

Para resolver esta deficiencia, Cox[7] en 1996 presenta como una alternativa interesante al modelo de Black-Scholes, el modelo con elasticidad constante de la varianza [1], donde asume que el precio del activo subyacente es un proceso estocástico  $S = \{S(t), t \geq 0\}$  que evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)^{\beta/2} dW(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  es el factor de elasticidad de la varianza de los rendimientos con respecto al precio del subyacente. Así este modelo propone la siguiente relación determinística entre el precio del activo subyacente y la varianza de los rendimientos:

$$Var \left[ \frac{dS(t)}{S(t)} \right] = \sigma^2 S(t)^{\beta-2}. \quad (1.2)$$

\*Departamento Académico de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú. (dquispe@unitru.edu.pe).

†Instituto de Investigación en Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú. (orubio@unitru.edu.pe).

De la ecuación (1.2) vemos que la elasticidad de la varianza de los rendimientos con respecto al precio del subyacente es  $\beta - 2$ . Cuando  $\beta = 2$ , la volatilidad es una constante  $\sigma$ , y el precio es dado por el modelo de Black-Scholes. Si  $\beta < 2$ , la volatilidad y el precio del subyacente están inversamente relacionados y para  $\beta > 2$  están directamente relacionados. Existe evidencia empírica que soporta, contundentemente, la hipótesis de un modelo con elasticidad constante de la varianza en cualquiera de los tres casos mencionados, [1], [2], [5]. También nos proponemos resolver numericamente la ecuación (1.1) y aplicarlo en un movimiento de activos de la bolsa de valores de Lima.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se describe la realación de la existencia de la solución débil de la ecuación con elasticidad constante de la varianza (1.1) a partir de la solución fuerte de la ecuación para el proceso de Bessel, en cualquiera de los tres escenarios antes mencionados. En la sección 3 se muestran algunos aspectos probabilísticos del modelo como tiempo de ruina, función densidad de probabilidad y ecuación diferencial parcial con elasticidad constante de la varianza. En la sección 4 discutimos la solución numérica de la ecuación usando el método de Runge Kutta estocástico y mostramos una aplicación al mercado financiero peruano simulando las trayectorias muestrales del proceso para el activo CREDITC1 del Banco de Crédito del Perú tomada de la Bolsa de Valores de Lima. Por último se encuentran las conclusiones en concordancia con los objetivos planteados.

## 2. Preliminares.

### 2.1. Conceptos Financieros.

**Definición 2.1.** *Un activo financiero es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor, es decir, es un derecho sobre los activos reales del emisor y el efectivo que generen. Pueden ser emitidas por cualquier unidad económica (empresa, Gobierno, etc).*

Los activos financieros tienen tres características fundamentales; rentabilidad, riesgo y liquidez,:

- Rentabilidad: Cuanto más interés aporta el activo mayor es su rentabilidad.
- Riesgo: Probabilidad de que el emisor no cumpla sus compromisos, cuanto mayor sea el riesgo mayor será la rentabilidad.
- Liquidez: Capacidad de convertir el activo en dinero sin sufrir pérdidas.

**Definición 2.2.** *La elasticidad es la variación porcentual de una variable con respecto a otra. Si la variación porcentual de la variable dependiente es mayor que la variable independiente, se dice que la relación es elástica, caso contrario la relación es inelástica.*

**Definición 2.3.** *La volatilidad es una medida de la incertidumbre sobre los movimientos futuros del precio del activo financiero.*

**Definición 2.4.** *El rendimiento esperado es la cantidad que razonablemente esperamos ganar de nuestra inversión. El rendimiento esperado expresa una probabilidad de rendimiento futuro, proyectando datos pasados y por lo tanto, no representa una garantía para el futuro.*

Los precios futuros de cualquier activo financiero son impredecibles en cierta medida. Los precios de mercado dependen de las decisiones económicas y financieras tomadas por un gran número de agentes financieros que actúan en condiciones de incertidumbre; por lo tanto, es razonable interpretar a los precios de activos financieros como aleatorios.

### 2.2. Cálculo Estocástico.

**Definición 2.5.** *Un proceso estocástico es una función  $S : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $t$  fijo  $S(t, \cdot)$  es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y para cada  $\omega$  fijo,  $S(\cdot, \omega)$  es una función medible, llamada camino o trayectoria muestral, definida sobre  $[0, T]$ .*

**Definición 2.6.** *Una filtración es una familia monótona creciente de  $\sigma$ -álgebras  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ . Un proceso estocástico  $S(t, \omega)$  es adaptado a  $\mathbb{F}$ , si para cada  $t$  fijo, la variable aleatoria  $S(t, \cdot)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.*

**Definición 2.7.** *Un proceso estocástico  $W(t, \omega)$  es un movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones:*

- (1)  $\mathbb{P}[\omega \in \Omega : W(0, \omega) = 0] = 1$ ,
- (2) Para cualquier  $0 \leq s \leq t$ , la variable aleatoria  $W(t) - W(s)$  tiene distribución normal con media cero y varianza  $t - s$ , es decir,  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ .
- (3)  $W(t, \omega)$  tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son independientes.

- (4)  $\mathbb{P}[\omega \in \Omega : W(\cdot, \omega) \text{ es continuo}] = 1$ .

Considerar que el precio del activo subyacente, es un proceso estocástico  $S(t, \omega)$  cuya dinámica esta dada por la ecuación diferencial estocástica con elasticidad constante de la varianza (1.1) donde  $W(t, \omega)$  es un movimiento Browniano, el cual se utiliza para encapsular la aleatoriedad presente en los mercados financieros, [12].

**Definición 2.8.** Un proceso estocástico  $S(t, \omega)$  pertenece al espacio  $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$  si se satisface las siguientes condiciones

- (1)  $S(t, \omega)$  es adaptado a  $\mathbb{F}$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\}$ .
- (2)  $\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \int_0^t |S(t, \omega)|^2 dt < \infty] = 1$ .

**Definición 2.9.** Sea  $S(t, \omega) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ , definimos la integral estocástica de Ito de  $S(t, \omega)$  como

$$I(T) = \int_0^T S(t)dW(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})),$$

a condición de que el límite exista en probabilidad.

En particular si  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t |S(t, \omega)|^2 dt \right] < \infty$  es decir si  $S(t, \omega) \in L^2_{ad}([0, T] \times \Omega)$  se cumple que, [13]

$$\mathbb{E}[I(t)] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[I(t)^2] = \int_0^t |S(t, \omega)|^2 dt.$$

**Definición 2.10.** Un proceso de difusión de Ito es un proceso estocástico de la forma:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(S(s), s)ds + \int_0^t b(S(s), s)dW(s); \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

donde  $S(0)$  es  $\mathcal{F}_0$ -medible;  $b(S(t), t) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$  y  $a(S(t), t) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[0, T])$ .

La ecuación integral (2.1) se interpreta como una ecuación diferencial estocástica de la forma,

$$dS(t) = a(S(t), t)dt + b(S(t), t)dW(t). \tag{2.2}$$

La incógnita de esta ecuación es el proceso estocástico  $S(t, \omega)$ . Los coeficientes  $a(x, t)$  y  $b(x, t)$  se conocen como coeficientes de tendencia y de difusión respectivamente.

Uno de los resultados más importantes del cálculo estocástico es la fórmula de Ito, que permite determinar el comportamiento aleatorio de una variable que sea, a su vez, función de otra variable que siga un proceso de difusión de Ito. Podríamos considerarlo como el equivalente a la regla de la cadena del cálculo de Newton.

**Teorema 2.1 (Fórmula de Ito).** Sea  $S(t, \omega)$  un proceso de Ito dado por la ecuación (2.1). Suponer que  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, T])$  entonces el proceso estocástico  $Y(t, \omega) = f(S(t, \omega), t)$ , también es un proceso de Ito y su diferencial estocástica es dada por

$$dY(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(S(t), t)dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S(t), t)(dS(t))^2. \tag{2.3}$$

*Demostración:* Para la demostración ver [13] □

**Definición 2.11.** Una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (2.2) sobre el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  con respecto a un movimiento Browniano fijo  $W(t, \omega)$  y con condición inicial  $S_0$ , es un proceso  $S(t, \omega)$  continuo el cual satisface:

- i)  $S$  es adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$  y posee trayectorias continuas.
- ii)  $\mathbb{P}[S(0) = S_0] = 1$ .
- iii)  $\mathbb{P} \left[ \int_0^t |a(S(s), s)|ds < \infty \right] = \mathbb{P} \left[ \int_0^t |b(S(s), s)|ds < \infty \right] = 1$ .
- iv) La versión integral de 2.1 se satisface con probabilidad uno

$$S(t) = S_0 + \int_0^t a(S(s), s)ds + \int_0^t b(S(s), s)dW(s) \quad , \quad t \geq 0.$$

La idea clave en esta definición es que la solución  $S$  se construye teniendo la fuente de aleatoriedad a priori, por lo tanto, se puede ver a  $S$  como un output de  $W$  y  $S_0$ , [11].

**Definición 2.12.** Diremos que la ecuación (2.2) posee unicidad fuerte si para todo contexto  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  y para todo par de soluciones fuertes  $S$  y  $\tilde{S}$  se tiene que:

$$\mathbb{P}[S(t) = \tilde{S}(t); 0 \leq t < \infty] = 1.$$

Es decir, si existe unicidad fuerte, entonces dos soluciones serán indistinguibles.

Ahora, introducimos una noción de solución más débil.

**Definición 2.13.** Una solución débil de la ecuación 2.2 es una terna  $(S, W)$ ,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  donde:

- i)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es un espacio de probabilidad, y  $\{\mathcal{F}_t\}$  es una filtración de sub  $\sigma$ -álgebras of  $\mathcal{F}$  las cuales satisfacen las condiciones usuales.
- ii)  $S(t, w)$  es un proceso estocástico continuo y adaptado a  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,  $W(t, w)$  es un movimiento Browniano con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}$ , y
- iii) Se satisfacen ii) y iv) de la definición 2.11.

La filtración  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  en la definición 2.13 no es necesariamente la ampliación de  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, W(s); 0 \leq s \leq t)$  generada por el movimiento Browniano  $W$  y la condición inicial  $S_0$ . Así, el valor de la solución  $S$  no esta dada necesariamente por una función medible del movimiento Browniano  $W$  y la condición inicial  $S_0$ , [11].

**Definición 2.14.** La unicidad débil o trayectorial es válida para la ecuación (2.2) si para todo par de soluciones débiles.

$$(S, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}, (\tilde{S}, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\},$$

con movimiento Browniano  $W$  común y espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  común, tales que  $\mathbb{P}[S_0 = \tilde{S}_0] = 1$ , se tiene que  $\mathbb{P}[S(t) = \tilde{S}(t); 0 \leq t < \infty] = 1$ .

El siguiente teorema nos da condiciones para asegurar unicidad trayectorial en una dimensión [11].

**Teorema 2.2 (Yamada y Watanabe).** Suponer que los coeficientes  $a(x)$ ,  $b(x)$  de la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = a(S(t))dt + b(S(t))dW(t), \quad t \geq 0,$$

satisfacen las condiciones :

$$|a(x) - a(y)| \leq K|x - y|,$$

$$|b(x) - b(y)| \leq h(|x - y|),$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  donde  $K > 0$  y  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función continua estrictamente creciente con  $h(0) = 0$  y tal que

$$\int_0^\varepsilon h^{-2}(u)du = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces la unicidad trayectorial es válida para la ecuación (2.2).

*Demostración:* Para la demostración ver [11]. □

**Teorema 2.3 (Yamada y Watanabe).** Si la ecuación (2.2) posee existencia débil y unicidad trayectorial, entonces posee existencia fuerte.

*Demostración:* Para la demostración ver [11]. □

El siguiente teorema es importante en la construcción de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales estocásticas.

**Teorema 2.4 (Dambis, Dubins-Schwarz).** Sea  $M(t, \omega)$  un martingala local continuo, con  $M(0) = 0$ , tal que su variación cuadrática  $[M](t)$  es no decreciente a infinito, y  $\tau_t = \inf\{s \geq 0 : [M](s) > t\}$ . Entonces el proceso  $W(t) = M(\tau_t)$  es un movimiento Browniano con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_\tau$ . Además,  $[M](t)$  es un tiempo de paro con respecto a esta filtración, y el martingala  $M(t, \omega)$  puede ser obtenido a partir del movimiento Browniano  $W(t, w)$  por el cambio de tiempo  $M(t) = W([M](t))$ .

*Demostración:* Para la demostración ver [11]. □

**3. Modelo con elasticidad constante de la varianza.** En esta sección describiremos algunos aspectos que consideramos importantes en la existencia y unicidad para el modelo con elasticidad constante de la varianza, presentada en la ecuación (1.1), pero abordado de manera un poco general por la ecuación (2.2); utilizando para ello la ecuación diferencial estocástica para el proceso de Bessel  $\delta$ -dimensional.

**3.1. Existencia y unicidad de la solución para el modelo de elasticidad constante de la varianza.**

Enunciamos el teorema en su forma mas explícita y veremos que se usa la solución fuerte de la ecuación de Bessel  $\delta$ - dimensional para hallar una solución débil del modelo descrito.

**Teorema 3.1.** *Para  $\beta \leq 2$ , existe solución de la ecuación diferencial estocástica (1.1).*

*Demostración:* Primeramente consideremos un proceso de Bessel  $\delta$ -dimensional  $X^{(\delta)}(t)$ , el cual satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} dX^{(\delta)}(t) &= \delta dt + 2\sqrt{|X^{(\delta)}(t)|}dW(t), \\ X^{(\delta)}(0) &= s_0^{\frac{2}{2-\delta}} ; \quad s_0 = S(0) > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De acuerdo a [11], la ecuación diferencial estocástica (3.1) tiene solución fuerte única para todo  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Siguiendo las ideas de Delbaen y Shirakawa [8], hallaremos la solución débil para (2.2). Sea  $T_0 = \inf\{t > 0; X^{(\delta)}(t) = 0\}$  el tiempo de primera visita al estado cero de  $X^{(\delta)}(t)$ .

Sean  $\mu > 0$  y  $\delta < 2$ , consideramos el siguiente cambio de tiempo determinístico

$$g(t) = \frac{(2 - \delta)}{\sqrt{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)t}},$$

entonces la integral de Ito,

$$M(t) = \int_0^t g(s)dW(s),$$

es un martingala continuo nulo en cero, y su variación cuadrática esta dada por:

$$\begin{aligned} [M](t) &= \int_0^t \frac{(2 - \delta)^2}{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)s} ds \\ &= \frac{(2 - \delta)}{2\mu} \ln \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)t} \right). \end{aligned}$$

Así  $[M](t)$  es una función estrictamente creciente, diferenciable y positiva; luego por el teorema 2.4 el cambio de tiempo esta dado por  $\tau_t = [M]^{-1}(t)$

$$\tau_t = \frac{\sigma^2}{2\mu(2 - \delta)} \left( 1 - \exp \left\{ \frac{-2\mu t}{2 - \delta} \right\} \right), \tag{3.2}$$

y

$$W^{(\delta,\mu)}(t) = M(\tau_t) = \int_0^{\tau_t} \frac{2 - \delta}{\sqrt{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)s}} dW(s), \tag{3.3}$$

es un movimiento Browniano con respecto a la filtración  $\mathcal{F}(\tau_t)$ .

Se define el proceso estocástico:

$$Y^{(\delta,\mu)}(t) = e^{\mu t} \left( X^{(\delta)}(\tau_t \wedge T_0) \right)^{1-\frac{\delta}{2}}. \tag{3.4}$$

Usando la fórmula de Ito, teorema 2.1 obtenemos la siguiente expresión

$$dY^{(\delta,\mu)}(t) = \mu Y^{(\delta,\mu)}(t)dt + e^{\mu t}(2 - \delta) \left( X^{(\delta)}(\tau_t \wedge T_0) \right)^{\frac{1-\delta}{2}} dW(t); \tag{3.5}$$

Pero de la ecuación (3.3) tenemos

$$dW^{(\delta,\mu)}(t) = \frac{(2 - \delta)}{\sqrt{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)\tau_t}} dW(t),$$

y de la ecuación (3.2) se obtiene

$$\sqrt{\sigma^2 - 2\mu(2 - \delta)\tau_t} = \sigma \exp \left\{ \frac{-\mu t}{2 - \delta} \right\},$$

entonces

$$e^{\mu t}(2 - \delta) \left( X^{(\delta)}(\tau_t \wedge T_0) \right)^{\frac{1-\delta}{2}} dW(t) = \sigma \left( Y^{(\delta,\mu)}(t) \right)^{\frac{1-\delta}{2-\delta}} dW^{(\delta,\mu)}(t). \tag{3.6}$$

Reemplazando (3.6) en (3.5) obtenemos:

$$dY^{(\delta,\mu)}(t) = \begin{cases} \mu Y^{(\delta,\mu)}(t)dt + \sigma (Y(t))^{\frac{1-\delta}{2-\delta}} dW^{(\delta,\mu)}(t) & ; \text{ si } \tau_t \leq T_0, \\ 0 & ; \text{ si } \tau_t > T_0. \end{cases}$$

De esta forma se construye la solución débil de la ecuación (1.1), dada por el proceso estocástico (3.4) con fuente de aleatoriedad (3.3) y factor de elasticidad:

$$\beta = \frac{2 - 2\delta}{2 - \delta}. \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.7) observamos que para  $\delta = \pm\infty$ , tenemos  $\beta = 2$ , el cual corresponde al movimiento Browniano geométrico usado en la formulación del modelo de Black-Scholes [2], cuya solución fuerte única esta dada por:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right). \quad (3.8)$$

Por el teorema de Yamada-Watanabe 2.3, existencia de solución débil de (1.1) y unicidad trayectorial implican existencia de solución fuerte para  $\beta < 2$ .  $\square$

**3.2. Aspectos probabilísticos del modelo con elasticidad constante de la varianza.** A continuación enunciamos algunos resultados probabilísticos obtenidos en [12].

**Lema 3.1.** Si  $\beta < 2$ , entonces la función densidad de probabilidad de transición del proceso estocástico  $S$  en el instante  $T > t$ , está dada por

$$f(s, T; s_t, t) = (2 - \beta)k^{\frac{1}{2-\beta}} (xw^{1-2\beta})^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{\frac{1}{2-\beta}}(2\sqrt{xw}), \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\mu}{\sigma^2(2 - \beta) [e^{\mu(2-\beta)\tau} - 1]}, \\ x &= k s_t^{2-\beta} e^{\mu(2-\beta)\tau}, \\ w &= k s^{2-\beta}, \\ \tau &= T - t. \end{aligned}$$

*Demostración:* Para la demostración ver [12]  $\square$

**Lema 3.2.** La esperanza y varianza condicional de la variable aleatoria  $S(T)$  condicional a  $S(t)$ , están dados por:

$$\mathbb{E}(S(T) | S(t)) = s_t e^{\mu\tau}, \quad \beta < 2,$$

$$\text{Var}(S(T) | S(t)) = \begin{cases} s_t e^{\mu\tau} \left[ k^{-\frac{1}{2-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} g(x, n+1) \frac{\Gamma\left(n+1 + \frac{2}{2-\beta}\right)}{\Gamma\left(n+1 + \frac{1}{2-\beta}\right)} - s_t e^{\mu\tau} \right] & \text{si } \beta < 2, \\ s_t \mu^{-1} e^{\mu\tau} \sigma^2 (e^{\mu\tau} - 1) & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

donde  $g(y, \nu)$  es la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria gamma.  $\square$

*Demostración:* Para la demostración ver [12]  $\square$

A diferencia del movimiento Browniano geométrico donde la solución (3.8) es estrictamente positiva, en el modelo con elasticidad constante de la varianza (1.1) existe la probabilidad de que el punto cero sea un estado absorbente.

**Lema 3.3.** Si  $\beta < 2$ , entonces la probabilidad de ruina del modelo con elasticidad constante de la varianza está dada por

$$\mathbb{P}[S(T) = 0] = G\left(x, \frac{1}{2-\beta}\right), \quad (3.10)$$

donde  $G(y, \nu)$  es la función residuo en  $y$  para una variable aleatoria gamma con parámetro de estado  $\nu$  y parámetro de escala unitario.

*Demostración:* Para la demostración ver [12]  $\square$

Dado que el punto cero es un estado absorbente, se puede calcular si el tiempo de primera visita al estado cero (tiempo de ruina) se da a largo o a corto plazo, los siguientes lemas nos proporcionan las probabilidades de que ocurran estos eventos.

**Lema 3.4.** Sea  $T_0 = \inf\{t > 0 : S(t) = 0\}$ , el primer tiempo de visita al estado cero y  $\beta < 2$  entonces:

$$\mathbb{P}[T_0 < \infty] = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } \mu \leq 0, \\ 1 - \frac{\varphi(s_0)}{\varphi(\infty)} & ; \text{ si } \mu > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

donde  $\varphi$  es la función escala del proceso  $S$  dada por:

$$\varphi(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2(2-\beta)} y^{2-\beta}\right) dy. \quad (3.12)$$

*Demostración:* Para la demostración ver [12] □

**Lema 3.5.** Si  $\beta < 2$ ,  $T > 0$  y  $\Phi$  es la función distribución Gaussiana estándar entonces:

$$\mathbb{P}[T_0 \leq T] \geq \begin{cases} \Phi\left(\frac{-s_0^{1-\beta/2}}{\sigma\sqrt{1-\beta/2}} \sqrt{\frac{2\mu}{1-e^{-(2-\beta)\mu T}}}\right) & , \text{ si } \mu \neq 0, \\ \Phi\left(\frac{-s_0^{1-\beta/2}}{\sigma(1-\beta/2)\sqrt{T}}\right) & , \text{ si } \mu = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

*Demostración:* Para la demostración ver [12] □

La función (3.9) se utiliza para valorar derivados financieros los cuales son activos cuyo precio depende del precio de otro llamado activo subyacente modelado por la ecuación (1.1).

El precio del derivado financiero  $u(s, t)$  se obtiene al resolver el problema de valor de frontera:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + rs\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^\beta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - ru = 0, & (s > 0, 0 \leq t \leq T), \\ u = (s - E)^+, & (s > 0, t = T), \\ u = 0, & (s = 0, 0 \leq t \leq T). \end{cases} \quad (3.14)$$

Observamos la presencia del factor de elasticidad  $\beta$  en la ecuación (3.14) lo que hace la diferencia con el famoso modelo de Black-Scholes [2].

La solución del problema (3.14) para diferentes valores de  $\beta$  estan dadas en [7], [8] y [12].

El caso  $\beta > 2$ , también es verificado de Delbaen et al.[8], donde se puede revisar en detalle.

Presentamos en la tabla 3.1 una solución del problema (3.14) para los diferentes casos donde puede asumir valores  $\beta$ :

| Factor de Elasticidad | Solución  |
|-----------------------|---|
| $\beta < 2$           | $u(S(t), t) = S(t)Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ke^{-r\tau}\left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right)$  |
| $\beta = 2$           | $u(S(t), t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}), d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{\tau}}$    |
| $\beta > 2$           | $u(S(t), t) = S(t)Q\left(2x, \frac{2}{\beta-2}, 2y\right) - Ke^{-r\tau}\left(1 - Q\left(2y, 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x\right)\right).$ |

Tabla 3.1: Fórmulas de valuación de derivados financieros

Donde  $N(x)$  es la función distribución acumulada normal estándar y  $Q(x; \nu, \lambda)$  la distribución complementaria chi-cuadrado no central.

**4. Simulación numérica del modelo elasticidad constante de la varianza: caso del Precio de activos en la Bolas de valores de Lima.** La mayor parte de las ecuaciones diferenciales estocásticas no tienen solución analítica, como en el caso del modelo con elasticidad constante de la varianza (1.1). Por esta razón es necesario aplicar métodos numéricos que generen aproximaciones a las soluciones exactas.



**4.1. Convergencia fuerte y convergencia débil de aproximaciones numéricas.** Dado un método numérico, es de gran importancia medir el orden de precisión; en el área de ecuaciones diferenciales estocásticas, existen dos formas de medir esta precisión:

Para el caso de aproximaciones fuertes se calculan las trayectorias muestrales del proceso estocástico; Mientras que para el caso de aproximaciones débiles se calculan varios de los momentos de la solución.

En las investigaciones que involucren simulación directa es de importancia que las trayectorias de la aproximación numérica sean cercanas a la solución exacta, es decir, debe tener una convergencia de alto orden.

A continuación se dan las definiciones de ambos tipos de convergencia. [4].

**Definición 4.1.** Sea  $\tilde{S}_N$  la aproximación numérica de  $S(t_N)$  después de  $N$  pasos con tamaño de paso constante  $h = \frac{t_N - t_0}{N}$ ; entonces  $\tilde{S}$  converge fuertemente a  $S$  con orden  $p$ , si existe  $C > 0$  (independiente de  $h$ ) y  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbb{E}(|\tilde{S}_N - S(t_N)|) \leq Ch^p, \quad 0 < h < \delta. \quad (4.1)$$

Esta definición presenta la convergencia expresada en orden global; Sin embargo, respecto al orden local, se puede decir que la definición anterior implica que un método de orden  $p$  debería tener un error local de orden  $O(h^{p+\frac{1}{2}})$ . Por ejemplo el método de Euler Maruyama tiene orden de convergencia fuerte de 0.5 y el método Milstein tiene orden 1; ver [4].

En algunas situaciones no se necesita encontrar una aproximación precisa de cada trayectoria puntual del proceso solución. En lugar de ello solo se requiere algunos de los momentos; de forma general se puede estimar  $\mathbb{E}(g(\tilde{S}))$  para alguna función  $g$ .

**Definición 4.2.** Sea  $\tilde{S}_N$  la aproximación numérica de  $S(t_N)$ ; entonces  $\tilde{S}$  converge débilmente a  $S$  con orden  $p$  si para cada polinomio  $g$  (el cual es  $2(p+1)$  veces continuamente diferenciable), existe  $C > 0$  (independiente de  $h$ ) y  $\delta > 0$  tal que

$$|\mathbb{E}(g(\tilde{S}_N)) - \mathbb{E}(g(S(t_N)))| \leq Ch^p, \quad 0 < h < \delta. \quad (4.2)$$

Por ejemplo el método de Euler Maruyama tiene convergencia débil de orden 1, ver [4].

**4.2. Método de Runge Kutta estocástico.** Consideremos el modelo general de una ecuación diferencial estocástica presentado en (2.2), de la sección 2; donde los coeficientes se consideran de forma autónoma, pero satisfaciendo las condiciones para la existencia de soluciones;

$$\begin{cases} dS(t) &= a(S(t))dt + b(S(t))dW(t), \\ S(0) &= S_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Los esquemas numéricos basados en aproximaciones de Taylor (Euler-Heunn-Milstein) tienen un inconveniente, la evaluación de las derivadas de los coeficientes  $a$  y  $b$  en cada paso. En el caso determinístico, los métodos de Runge-Kutta evitan el uso de derivadas y estiman lo mejor posible un conjunto de valores de la solución en algunos puntos dentro del intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$ . En el caso implícito hay al menos una cantidad que está implícitamente definida y requiere la solución de una ecuación que puede involucrar variables aleatorias. En el marco estocástico la adaptación de un esquema Runge-Kutta determinístico no siempre es posible, por lo tanto, sólo unos pocos esquemas particulares son usados. Por simplicidad, la discretización del intervalo de tiempo siempre se asume como "equidistante", es decir, el incremento del tiempo es constante. Consideremos el incremento de tiempo  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  y  $\Delta W_j = W_{j+1} - W_j$  es el incremento del movimiento Browniano.

Un esquema de Runge-Kutta estocástico(RKE) de orden 1 que vamos a usar está discutido por Burrage y Burrage[4], descrito en la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} S_{j+1} &= S_j + a(S_j)\Delta t + b(S_j)\Delta W_j + \frac{1}{2}(b(\tilde{S}_j) - b(S_j))((\Delta W_j)^2 - \Delta t)(\Delta t)^{-1/2}, \\ \tilde{S}_j &= S_j + a(S_j)\Delta t + b(S_j)(\Delta t)^{1/2}, \quad (\text{valor de apoyo}); \\ S_0 &= S(0). \end{cases} \quad (4.4)$$



Una variedad de esquemas Runge-Kutta fuertes de orden mayor o igual que 1, así como la consistencia de tales esquemas, se puede encontrar en Burrage y Burrage [4], pero los beneficios de la convergencia son pequeños en comparación con los esfuerzos computacionales requeridos.

**4.3. Simulación numérica del precio del activo CREDITC1 - Banco de Crédito del Perú.** En esta parte mostraremos algunos resultados numéricos para el precio de activos para una entidad bancaria Peruana. Implementaremos el método RKE1 (4.4), en el modelo con elasticidad constante de la varianza CEV (1.1) para el activo CREDITC1 - Banco de Crédito del Perú, cuyo reporte de cotizaciones se obtuvo de la Bolsa de Valores de Lima[3], en un período de 70 días ubicados entre el 26/01/2022 al 27/05/2022.

Estos datos se presentan en la tabla 4.1, donde podemos ver que hay algunos valores dados en cero, porque no se reportaron en tal fecha.

En primer lugar de las simulaciones una realizadas elijeremos una muestra de trayectorias, la cuales nos permitirán posteriormente generar estadísticas como: media, varianza, mediana, sesgo y curtosis.

Mencionamos también que con los datos que dispone la Bolsa de valores de Lima, no podemos simular los estados financieros, es decir opciones y futuros, porque en el Perú aun no se ha implementado este tipo de negociaciones.

A partir de este conjunto muestral de datos que representa la evolución del precio de CREDITC1, estimamos la tendencia  $\mu$  y los rendimientos (la rentabilidad de los precios) usando su media muestral:

$$\mu = \frac{\sum_{i=0}^{70} R_i}{71} = -0,002010636, \tag{4.5}$$

y la rentabilidad en tiempo discreto, en cada intervalo esta dada por:

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, \quad i \geq 1. \tag{4.6}$$

En tiempo continuo la rentabilidad de las acciones de acuerdo al modelo (1.1) esta dada por:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma S(t)^{\beta/2-1} dW(t), \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Para estimar los parámetros  $\sigma$  y  $\beta$ , Beckers ([1]) reescribe la ecuación (1.2) como

$$\ln \left( s \left( \frac{dS(t)}{S(t)} \right) \right) = \ln \sigma + \frac{\beta - 2}{2} \ln(S(t)); \tag{4.8}$$

donde  $s(\cdot)$  es el operador de desviación estándar. Esta es la ecuación de regresión para  $\beta$  utilizada por Beckers, además nos dará una estimación del parámetro  $\sigma$ . Una dificultad al usar ecuación (4.8) es que la variable dependiente en la regresión no es observable, Beckers aproxima la desviación estándar por  $|\ln(S(t+1)/S(t))|$ . Este resultado es demostrado por [1]- Así Beckers estima  $\beta$  usando la regresión:

$$\ln \left| \ln \frac{S(t+1)}{S(t)} \right| = a + b \ln S(t) + \omega_t, \tag{4.9}$$

donde  $\beta = 2b + 2$  y  $\sigma = e^a$ .

Usando la data de la tabla 4.1 obtenemos la recta de regresión lineal:

$$y = -3,7054 - 0,2036x. \tag{4.10}$$

Usamos los siguientes parámetros  $t_0 = 0$  y  $T = 70$ ,  $\mu = -0,002010636$ ,  $\sigma = e^{-3,7054} = 0,0245903$  y  $\beta = 2(-0,20369) + 2 = 1,6$ , utilizamos el método de Runge Kutta estocástico fuerte de orden 1 descrito en (4.4) para resolver la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = a(S(t))dt + b(S(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{4.11}$$

con condición inicial, coeficiente de tendencia y coeficiente de difusión dados por:

$$\begin{aligned} S(0) &= 3,20, \\ a(S(t)) &= -0,002010636S(t), \\ b(S(t)) &= 0,0245903S(t)^{0,8}. \end{aligned}$$

| Día        | i  | S(i) | R(i)       | Día        | i  | S(i) | R(i)         |
|------------|----|------|------------|------------|----|------|--------------|
| 26/01/2022 | 0  | 3.20 |            | 23/03/2022 | 36 | 3.16 | 0            |
| 31/01/2022 | 1  | 3.20 | 0          | 24/03/2022 | 37 | 3.20 | 0.012658228  |
| 01/02/2022 | 2  | 3.07 | -0.040625  | 25/03/2022 | 38 | 3.20 | 0            |
| 02/02/2022 | 3  | 3.07 | 0          | 28/03/2022 | 39 | 3.22 | 0.00625      |
| 03/02/2022 | 4  | 3.05 | -0.0065147 | 29/03/2022 | 40 | 3.24 | 0.00621118   |
| 07/02/2022 | 5  | 3.05 | 0          | 30/03/2022 | 41 | 3.50 | 0.080246914  |
| 08/02/2022 | 6  | 3.21 | 0.05245902 | 31/03/2022 | 42 | 3.37 | -0.037142857 |
| 10/02/2022 | 7  | 3.20 | -0.0031153 | 01/04/2022 | 43 | 3.36 | -0.002967359 |
| 11/02/2022 | 8  | 3.15 | -0.015625  | 04/04/2022 | 44 | 3.48 | 0.035714286  |
| 14/02/2022 | 9  | 3.00 | -0.047619  | 07/04/2022 | 45 | 3.35 | -0.037356322 |
| 15/02/2022 | 10 | 3.10 | 0.03333333 | 11/04/2022 | 46 | 3.47 | 0.035820896  |
| 16/02/2022 | 11 | 3.20 | 0.03225806 | 12/04/2022 | 47 | 3.38 | -0.025936599 |
| 17/02/2022 | 12 | 3.20 | 0          | 13/04/2022 | 48 | 3.30 | -0.023668639 |
| 18/02/2022 | 13 | 3.15 | -0.015625  | 18/04/2022 | 49 | 3.28 | -0.006060606 |
| 21/02/2022 | 14 | 3.10 | -0.015873  | 19/04/2022 | 50 | 3.28 | 0            |
| 22/02/2022 | 15 | 3.05 | -0.016129  | 20/04/2022 | 51 | 3.12 | -0.048780488 |
| 23/02/2022 | 16 | 3.04 | -0.0032787 | 22/04/2022 | 52 | 3.05 | -0.022435897 |
| 24/02/2022 | 17 | 2.95 | -0.0296053 | 26/04/2022 | 53 | 2.88 | -0.055737705 |
| 25/02/2022 | 18 | 3.10 | 0.05084746 | 27/04/2022 | 54 | 3.05 | 0.059027778  |
| 28/02/2022 | 19 | 3.01 | -0.0290323 | 28/04/2022 | 55 | 3.07 | 0.006557377  |
| 01/03/2022 | 20 | 3.00 | -0.0033223 | 02/05/2022 | 56 | 3.1  | 0.009771987  |
| 02/03/2022 | 21 | 3.05 | 0.01666667 | 04/05/2022 | 57 | 3.1  | 0            |
| 03/03/2022 | 22 | 3.20 | 0.04918033 | 05/05/2022 | 58 | 3.1  | 0            |
| 04/03/2022 | 23 | 3.20 | 0          | 06/05/2022 | 59 | 2.94 | -0.051612903 |
| 07/03/2022 | 24 | 3.20 | 0          | 09/05/2022 | 60 | 2.94 | 0            |
| 08/03/2022 | 25 | 3.10 | -0.03125   | 11/05/2022 | 61 | 2.93 | -0.003401361 |
| 09/03/2022 | 26 | 3.00 | -0.0322581 | 12/05/2022 | 62 | 2.8  | -0.044368601 |
| 10/03/2022 | 27 | 3.20 | 0.06666667 | 13/05/2022 | 63 | 2.78 | -0.007142857 |
| 11/03/2022 | 28 | 3.15 | -0.015625  | 16/05/2022 | 64 | 2.75 | -0.010791367 |
| 14/03/2022 | 29 | 3.03 | -0.0380952 | 17/05/2022 | 65 | 2.7  | -0.018181818 |
| 15/03/2022 | 30 | 3.03 | 0          | 20/05/2022 | 66 | 2.8  | 0.037037037  |
| 16/03/2022 | 31 | 3.19 | 0.05280528 | 24/05/2022 | 67 | 2.8  | 0            |
| 17/03/2022 | 32 | 3.15 | -0.0125392 | 25/05/2022 | 68 | 2.8  | 0            |
| 18/03/2022 | 33 | 3.15 | 0          | 26/05/2022 | 69 | 2.8  | 0            |
| 21/03/2022 | 34 | 3.15 | 0          | 27/05/2022 | 70 | 2.7  | -0.035714286 |
| 22/03/2022 | 35 | 3.16 | 0.0031746  |            |    |      |              |

Tabla 4.1: Historial del precio de acciones del BCP

A continuación se simulan una muestra de  $m = 100$  trayectorias para la ecuación (4.11) con  $t \in [0, 70]$ , con el fin de identificar el tipo de distribución del modelo (4.11).

Utilizamos el método de Runge Kutta estocástico(RKE1) con tamaño de paso fijo  $h = 0,01$ , utilizando el sistema aleatorio para la generación de incrementos del movimiento Browniano.

La figura 4.1 reporta las trayectorias muestrales generadas por el método numérico RKE1 del modelo con elasticidad constante de la varianza (4.11), todas iniciadas en la misma condición inicial.

La figura 4.2 informa la media muestral punto por punto (línea continua verde) de la muestra de  $m = 100$  trayectorias simuladas, también se presentan sus intervalos de confianza al 95 por ciento (del percentil

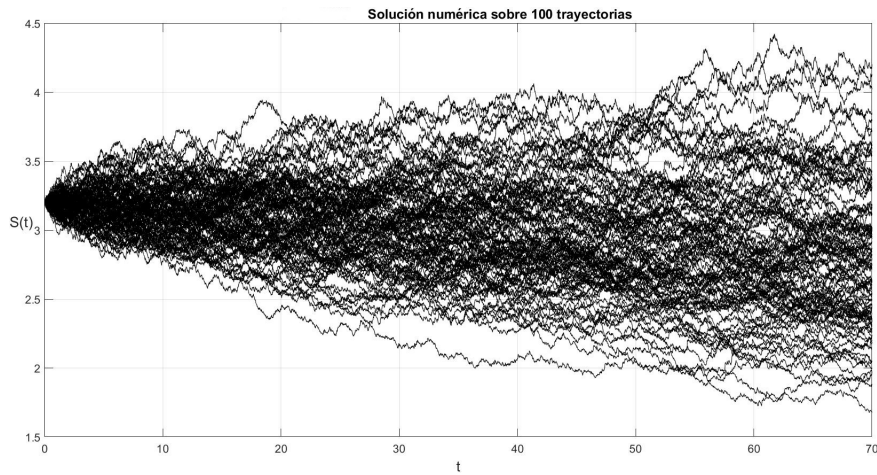


Figura 4.1: Soluciones numéricas del modelo de la elasticidad constante de la varianza.

2,5 al 97,5; líneas discontinuas) y su primer y tercer cuartil (líneas punteadas).

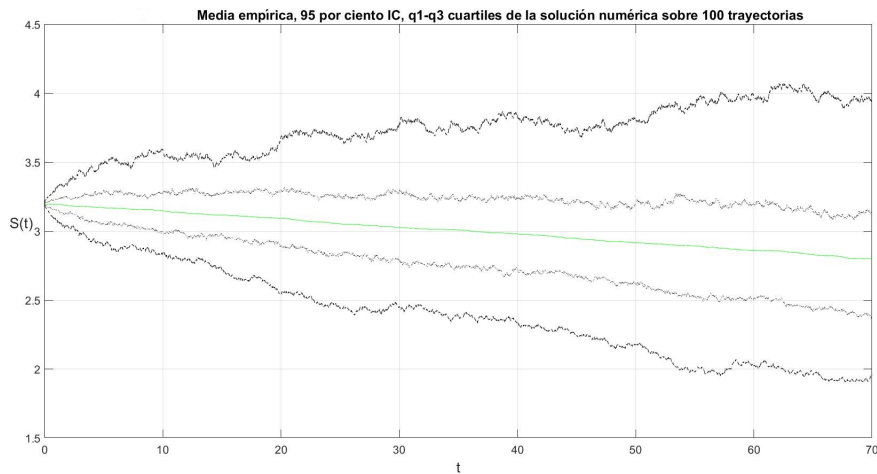


Figura 4.2: Media muestral (línea verde), banda de confianza 95 % (líneas discontinuas), primer y tercer cuartil  $q_1$  y  $q_3$  (líneas punteadas)

Finalmente en la figura 4.3 se reporta la distribución empírica de  $S(t)$  en el tiempo final de la simulación  $t = T = 70$  y en la tabla 4.2 mostramos algunas estadísticas del proceso para  $S(T)$  con  $t = T = 70$ , sobre las  $m = 100$  trayectorias simuladas

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| Media del proceso                       | $\mathbb{E}[S(T)] = 2,799982$ |
| Varianza del proceso                    | $Var[S(T)] = 0,2951215$       |
| Mediana del proceso                     | $Me[S(T)] = 2,759166$         |
| Intervalo de confianza al 95 por ciento | $[1,963646, 3,936835]$        |
| Primer y tercer cuartil del proceso     | $[2,360580, 3,131834]$        |
| Sesgo del proceso                       | $A[S(T)] = 0,4054848$         |
| Curtosis del proceso                    | $K[S(T)] = 2,588382$          |

Tabla 4.2: Estadísticas del proceso  $S(T)$

Del histograma de la figura 4.3 y de la tabla 4.2 se puede observar que la Mediana es menor que la media,  $Me[S(T)] < \mathbb{E}[S(T)]$ , lo cual nos indica una distribución sesgada hacia la izquierda coeficiente de

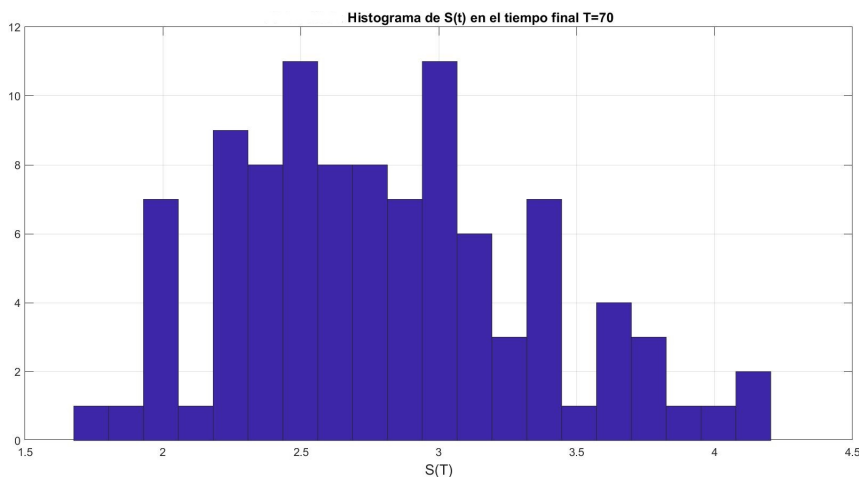


Figura 4.3: Histograma de  $S(t)$  en  $T = 70$  para las 100 trayectorias simuladas

asimetría positiva  $A[S(T)] = 0,4054848$ . El coeficiente de curtosis  $K[S(T)] = 2,588382 > 0$ , mostrado en la tabla 4.2, lo cual nos indica que que la distribución es leptocúrtica, comprobando la hipótesis de que la distribución del modelo (1.1) es chi-cuadrado no cental.

## 5. Conclusiones.

1. Se presenta una descripción de los modelos de opciones con elasticidad constante de la varianza (1.1), explicando la condiciones bajo las cuales hay soluciones y éstas son únicas.
2. El precio del activo CREDITC1 del Banco de Crédito del Perú puede ser modelado con el proceso con elasticidad constante de la varianza con un factor de elasticidad  $\beta = 1,6$  dado por la estimación hecha en (4.8) usando la data del activo CREDITC1 del Banco de Crédito del Perú.
3. De acuerdo a las estadísticas dadas en la tabla 4.2 para  $\beta = 1,6$  se obtiene una dispersión baja en torno a la media.

## ORCID and License

Dennis Quispe S. <https://orcid.org/0000-0002-5885-4506>

Obidio Rubio <https://orcid.org/0000-0002-6853-8160>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Beckers S. The constant elasticity of variance model and its implications for option pricing. The J. of Finance. 1980; 35(3):661-673.
- [2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J. Political Economic. 1973; 81(3):637-654.
- [3] Bolsa de Valores de Lima [Internet], información de Bolsa. Lima. 2022 [accesado 27 de mayo 2022]. Disponible en <https://www.bvl.com.pe/>
- [4] Burrage P, Burrage M. *Order conditions of stochastic Runge Kutta methods by B series*. SIAM J. Numer. Anal. 2000; 38(5): 1626-1646.
- [5] Campbell J. Stock returns and the term structure, J. Financial Economics. 1987; 18(2):373-399.
- [6] Chen RR, Lee CF. A constant elasticity of variance family of stock price distributions in option pricing: Review and integration. J. Financial Studies. 1993; 1:29-51.
- [7] Cox J. The constant elasticity of variance option pricing model. The J. of Portfolio Management, 1996; 22:15-17.
- [8] Delbaen F, Shirakawa H. A Note of Option Pricing for Constant Elasticity of Variance Model. Asia-Pacific Financial Markets. 2002; 9:85-99.
- [9] Emanuel D, Macbeth J. Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model, J. Financial and Quantitative Analysis. 1982; 17(4):533-554.
- [10] Hsu Y, Lin T, Lee C. Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: Integration and detailed derivation. Math. and Comp. in Simulation. 2008; 79(1):60-71.
- [11] Karatzas I, Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. 2da. Edition. Springer-Verlag; 1998.
- [12] Quispe D. Probabilidad de transición y el enfoque chi cuadrado no central del modelo de valoración de opciones con elasticidad constante de la varianza [título de maestría]. [Trujillo]. Universidad Nacional de Trujillo, 2016.
- [13] Rubio O. La Integral de Ito y ecuaciones diferenciales estocásticas [Título de maestría]. [Lima]. Universidad Nacional de Ingeniería, 1990.