



Analysis and simulation of an extended SEIR mathematical model with vaccination for the spread of SARS-COV-2

Análisis y simulación de un modelo matemático SEIR extendido con vacunación para la propagación del SARS-COV-2

Jennifer Madge^{id} and Jhelly Pérez^{id}

Received, Oct. 01, 2021

Accepted, Mar. 02, 2022



How to cite this article:

Madge J, Perez J. *Análisis y simulación de un modelo matemático SEIR extendido con vacunación para la propagación del SARS-COV-2*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(1):121–136. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.09>

Abstract

This article analyzes the dynamic of an extended SEIR model for the spread of COVID-19 considering a system of 7 differential equations whose stages are susceptible, exposed, infected, quarantined, recovered, dead and vaccinated. The necessary and sufficient conditions are determined for non-negativity, delimitation, existence and uniqueness of the solution of the model, local stability of the equilibrium points and the next generation matrix method. The simulations made in Python complement the qualitative analysis of the mathematical model to conclude the behavior of the virus spread over time; the information shown in this work could also be useful for the development of new prevention measures.

Keywords . Covid-19, differential equation, basic reproduction number, epidemiological model.

Resumen

En el presente artículo se analiza la dinámica de un modelo SEIR extendido para la propagación del COVID-19 considerando un sistema de 7 ecuaciones diferenciales cuyas etapas son susceptibles, expuestos, infectados, en cuarentena, recuperados, muertos y vacunados. Se determinan las condiciones necesarias y suficientes para la no negatividad, acotación, existencia y unicidad de la solución del modelo, estabilidad local de los puntos de equilibrio y el método de la matriz de próxima generación. Las simulaciones hechas en Python complementan el análisis cualitativo del modelo matemático para concluir el comportamiento de la propagación del virus en el tiempo; la información que nos brinda este trabajo también podría ser útil para la elaboración de nuevas medidas de prevención.

Palabras clave. Covid-19, ecuaciones diferenciales ordinarias, simulación, número reproductivo básico, modelo epidemiológico.

1. Introducción. El SARS-CoV-2, se ha extendido ampliamente por todo el mundo causando un masivo contagio en la población que ha requerido de manera urgente una mayor atención médica. En este contexto, los modelos matemáticos pueden jugar un papel importante en la comprensión y predicción de la transmisión de enfermedades [5][2]. Además, ayudan a implementar medidas apropiadas y estrategias eficientes para controlar la propagación de la pandemia y mitigar su impacto.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) reconoce la labor de los modelos matemáticos, estadísticos y computacionales en el desempeño de un papel clave para proporcionar información, basada en evidencias, que permita una mejor toma de decisiones con respecto a políticas de salud pública. Estos modelos pueden ayudar a comprender la transmisibilidad de la enfermedad; a generar predicciones con respecto a las tasas y la gravedad de contagios; así como también para brindar un análisis con respecto a la efectividad de las

*UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú. (jennifer.madge@unmsm.edu.pe).

†UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú. (jhelly.perez@unmsm.edu.pe).

medidas tomadas para mitigarlo.

Para el desarrollo del presente trabajo se tomó de referencia un modelo SIR donde se realizan estimaciones y predicciones de parámetros [12] mientras que [1] propuso un modelo SEIR modificado donde se realiza una distinción entre sintomáticos y asintomáticos con el fin de identificar estrategias de observación adecuadas, pero este modelo no consideró el impacto de la vacunación durante la propagación de la pandemia. En esta investigación se analiza un modelo SEIR extendido propuesto por Rabih Ghostine, Mohamad Gharamti, Sally Hassrouny e Ibrahim Hoteit. Dicho modelo posee un compartimiento de vacunación para simular la propagación del coronavirus (COVID-19) [4]; asimismo, se presentan las simulaciones numéricas hechas en Python para verificar los resultados obtenidos analíticamente tomando datos aproximados de Perú.

2. Modelo. Considerando las variables (poblaciones epidemiológicas) y parámetros (tasas epidemiológicas), se formuló el modelo matemático SEIR, para luego ser extendido a 7 compartimientos con el fin de realizar las simulaciones del COVID-19[9, 10]. Este modelo consta de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales las cuales se mostrarán a continuación así como su diagrama de fase:

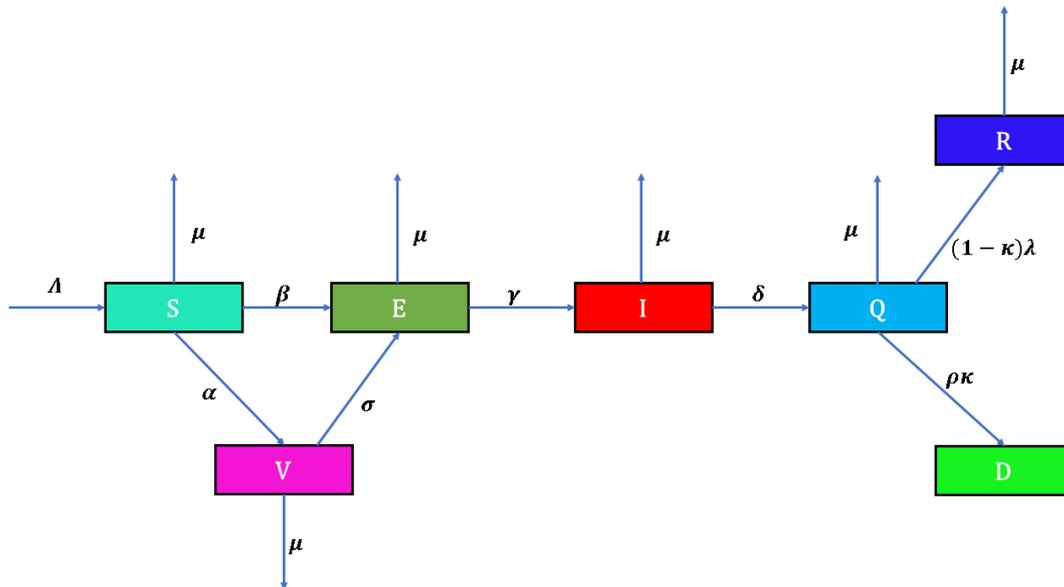


Figura 2.1: Diagrama de fase del modelo SEIR extendido.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \alpha S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) + \sigma \beta V(t)I(t) - \mu E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma E(t) - \delta I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \delta I(t) - (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \kappa\rho Q(t) - \mu Q(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \mu R(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \kappa\rho Q(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \alpha S(t) - \sigma \beta V(t)I(t) - \mu V(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Con condiciones iniciales no negativas $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0, D(0) = D_0, y V(0) = V_0$.

Las variables usadas están definidas en la tabla 2.1

Variable	Descripción
S(t)	Población de Susceptibles
E(t)	Población de Expuestos
I(t)	Población de Infectados

Q(t)	Población de Infectados en Cuarentena
R(t)	Población de Recuperados
D(t)	Población de Fallecidos
V(t)	Población de Vacunados

Tabla 2.1: Descripción de variables del modelo SEIR.

Los parámetros están definidos en la tabla 2.2 :

Parámetro	Unidades	Descripción
Λ	personas/día	Tasa de nacimientos
β	día ⁻¹	Nuevos residentes por unidad de tiempo
α	día ⁻¹	Tasa de transmisión dividida entre N
μ	personas/día	Tasa de vacunación
γ	personas/día	Tasa de muerte natural
σ	día ⁻¹	Tiempo de latencia promedio
δ	día ⁻¹	Tiempo promedio de cuarentena
κ	personas/día	Tasa de mortalidad
λ	día ⁻¹	Días promedio hasta la recuperación
ρ	día ⁻¹	Días promedio hasta la muerte

Tabla 2.2: Descripción de parámetros del modelo SEIR.

3. Análisis Matemático. En esta sección se demuestra la no negatividad del modelo, acotación, existencia y unicidad de la solución del modelo, equilibrio epidémico y el número de reproducción básico, la existencia y la unicidad del equilibrio endémico del sistema propuesto.

3.1. Existencia y unicidad de la solución del modelo. Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (2.1), trabajaremos con las funciones F_i para $i = 1, 2, 3, \dots, 7$ definidas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 F_1(S, E, I, Q, R, D, V) &= \Lambda - \beta SI - \alpha S - \mu S, \\
 F_2(S, E, I, Q, R, D, V) &= \beta SI - \gamma E + \sigma \beta VI - \mu E, \\
 F_3(S, E, I, Q, R, D, V) &= \gamma E - \delta I - \mu I, \\
 F_4(S, E, I, Q, R, D, V) &= \delta I - (1 - \kappa)\lambda Q - \kappa \rho Q - \mu Q, \\
 F_5(S, E, I, Q, R, D, V) &= (1 - \kappa)\lambda Q - \mu R, \\
 F_6(S, E, I, Q, R, D, V) &= \kappa \rho Q, \\
 F_7(S, E, I, Q, R, D, V) &= \alpha S - \sigma \beta VI - \mu V.
 \end{aligned}$$

Las cuales están definidas en

$$\Omega^0 = \{(S, E, I, Q, R, D, V) \in \mathbb{R}^7 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, R \geq 0, D \geq 0, V \geq 0\}.$$

Consideremos Ω^0 , y la función

$$\begin{aligned}
 F &: \Omega^0 \subseteq \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7 \\
 (S, E, I, Q, R, D, V) &\rightarrow F(S, E, I, Q, R, D, V),
 \end{aligned}$$

donde

$$F(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)) = (F_1(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), \\ F_2(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), F_3(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), \\ F_4(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), F_5(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), \\ F_6(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t)), F_7(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t))),$$

y $X(t) = (S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), V(t))$; así tenemos el siguiente PVI asociado a X y F

$$(PVI) \begin{cases} X' = F(X), \\ X(0) = (S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0), D(0), V(0)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Con $E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0, V_0 \geq 0$. Notamos que el PVI (3.1) es equivalente a nuestro modelo SEIR extendido definido por el sistema (2.1).

Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del modelo se usa el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Existencia y unicidad). *Sea $F : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ localmente Lipschitz y para cada $j = 1, 2, \dots, 7$ se satisfacen:*

$$F_j(x) \geq 0, \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}_+^7 \text{ con } x_j = 0.$$

Entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}_+^7$, existe una única solución de $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ en \mathbb{R}^7 , la cual está definida en algún intervalo $[0, b)$ con $b \in \langle 0, \infty \rangle$. Si $b < \infty$, entonces

$$\sup_{0 \leq t < b} \sum_{j=1}^7 x_j(t) = \infty.$$

[11][8]

Demostración: Para la función F , notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial S} &= -\beta I - \alpha - \mu, & \frac{\partial F_1}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial I} &= -\beta S, & \frac{\partial F_1}{\partial Q} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} &= \beta I, & \frac{\partial F_2}{\partial E} &= -\gamma - \mu, & \frac{\partial F_2}{\partial I} &= \beta S + \sigma \beta V, & \frac{\partial F_2}{\partial Q} &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_3}{\partial S} &= 0, & \frac{\partial F_3}{\partial E} &= \gamma, & \frac{\partial F_3}{\partial I} &= -\delta - \mu, & \frac{\partial F_3}{\partial Q} &= 0, & \frac{\partial F_3}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_3}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_3}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_4}{\partial S} &= 0, & \frac{\partial F_4}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial F_4}{\partial I} &= \delta, & \frac{\partial F_4}{\partial Q} &= -\lambda + \kappa \lambda - \kappa \rho - \mu, & \frac{\partial F_4}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_4}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_4}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_5}{\partial S} &= 0, & \frac{\partial F_5}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial F_5}{\partial I} &= 0, & \frac{\partial F_5}{\partial Q} &= (1 - \kappa) \lambda, & \frac{\partial F_5}{\partial R} &= -\mu, & \frac{\partial F_5}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_5}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_6}{\partial S} &= 0, & \frac{\partial F_6}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial F_6}{\partial I} &= 0, & \frac{\partial F_6}{\partial Q} &= \kappa \rho, & \frac{\partial F_6}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_6}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_6}{\partial V} &= 0; \\ \frac{\partial F_7}{\partial S} &= \alpha, & \frac{\partial F_7}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial F_7}{\partial I} &= -\sigma \beta V, & \frac{\partial F_7}{\partial Q} &= 0, & \frac{\partial F_7}{\partial R} &= 0, & \frac{\partial F_7}{\partial D} &= 0, & \frac{\partial F_7}{\partial V} &= -\sigma \beta I - \mu. \end{aligned}$$

Como las derivadas parciales son continuas, por lo tanto son de clase C^1 ; y, por ende, son localmente Lipschitz.

También notamos:

$F_1(S, E, I, Q, R, D, V) = \Lambda - \beta SI - \alpha S - \mu S$, donde $S_0 = 0, E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0, V_0 \geq 0$.

$$F_1(0, E_0, I_0, Q_0, R_0, D_0, V_0) = \Lambda \geq 0.$$

$F_2(S, E, I, Q, R, D, V) = \beta SI + \gamma E + \sigma \beta VI - \mu E$, donde $S_0 \geq 0, E_0 = 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0$, y $V_0 \geq 0$.

$$F_2(S_0, 0, I_0, Q_0, R_0, D_0, V_0) = \beta SI + \sigma \beta VI \geq 0.$$

$F_3(S, E, I, Q, R, D, V) = \gamma E - \delta I - \mu I$, donde $S_0 \geq 0, E_0 \geq 0, I_0 = 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0$, y $V_0 \geq 0$.

$$F_3(S_0, E_0, 0, Q_0, R_0, D_0, V_0) = \gamma E \geq 0.$$

$F_4(S, E, I, Q, R, D, V) = \delta I - (1 - \kappa)\lambda Q - \kappa\rho Q - \mu Q$, donde $S_0 \geq 0, E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 = 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0$, y $V_0 \geq 0$.

$$F_4(S_0, E_0, I_0, 0, R_0, D_0, V_0) = \delta I \geq 0.$$

$F_5(S, E, I, Q, R, D, V) = (1 - \kappa)\lambda Q - \mu R$, donde $S_0 \geq 0, E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 = 0, D_0 \geq 0$, y $V_0 \geq 0$.

$$F_5(S_0, E_0, I_0, Q_0, 0, D_0, V_0) = (1 - \kappa)\lambda Q \geq 0.$$

$F_6(S, E, I, Q, R, D, V) = \kappa\rho Q$, donde $S_0 \geq 0, E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 = 0$, y $V_0 \geq 0$.

$$F_6((S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0, 0, V_0) = \kappa\rho Q \geq 0.$$

$F_7(S, E, I, Q, R, D, V) = \alpha S - \sigma \beta VI - \mu V$, donde $S_0 \geq 0, E_0 \geq 0, I_0 \geq 0, Q_0 \geq 0, R_0 \geq 0, D_0 \geq 0$, y $V_0 = 0$.

$$F_7(S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0, D_0, 0) = \alpha S \geq 0.$$

Luego, por el Teorema de Existencia y Unicidad, existe una única solución del PVI en algún intervalo $[0, T)$.

Adicionalmente, si $T < \infty$, entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + D(t) + V(t)\} = \infty. \tag{3.2}$$

Sea $N(t) = (S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + D(t) + V(t))$, entonces

$$\begin{aligned} N'(t) &= \Lambda - \beta S(t)I(t) - \alpha S(t) - \mu S(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) + \sigma \beta V(t)I(t) - \mu E(t) + \gamma E(t) - \delta I(t) \\ &\quad - \mu I(t) + \delta I(t) - (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \kappa\rho Q(t) - \mu Q(t) + (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \mu R(t) + \kappa\rho Q(t) + \alpha S(t), \\ N'(t) &= \Lambda - \mu(S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + V(t)), \\ N'(t) &= \Lambda - \mu N(t). \end{aligned}$$

Resolviendo la EDO obtenemos:

$$N(t) = N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

Luego,

$$N(t) \leq N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu},$$

se puede deducir,

$$e^{\mu t} \geq 1 \quad \text{entonces} \quad N(0) + \frac{\Lambda}{\mu} \geq N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Considerando $N(0) = N_0$ se tiene,

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + N_0 = M \quad \forall t \in [0, T) \text{ y para algún } M > 0.$$

Lo que implica,

$$\sup\{S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + D(t) + V(t)\} \leq M, \quad \forall t \in [0, T),$$

de aquí, $\sup\{S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + D(t) + V(t)\} < +\infty$.

Lo cual se contradice con (3.2); por lo tanto la solución única del PVI (3.1) está definida para todo $t \in [0, \infty)$. □

3.2. No-negatividad del modelo.

Teorema 3.2. Si $S_0 \geq 0$, $E_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$, $Q_0 \geq 0$, $R_0 \geq 0$, $D_0 \geq 0$ y $V_0 \geq 0$, entonces las soluciones del sistema (2.1) permanecen no negativas para todo $t > 0$.

Demostración: Se tiene como hipótesis que las condiciones iniciales son no negativas, ahora probaremos que las soluciones del modelo también lo son.

Tomando en cuenta las ecuaciones del modelo (2.1) tenemos:

$$\frac{d}{dt}S(t) = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \alpha S(t) - \mu S(t) \geq -\mu S(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } S(t) \geq S_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) + \sigma \beta V(t)I(t) - \mu E(t) \geq -\mu E(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } E(t) \geq E_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \gamma E(t) - \delta I(t) - \mu I(t) \geq -\mu I(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } I(t) \geq I_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \delta I(t) - (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \kappa \rho Q(t) - \mu Q(t) \geq -\mu Q(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } Q(t) \geq Q_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \mu R(t) \geq -\mu R(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } R(t) \geq R_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}D(t) = \kappa \rho Q(t), \text{ como } Q(t) \geq 0 \text{ entonces } D(t) \geq 0.$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = \alpha S(t) - \sigma \beta V(t)I(t) - \mu V(t) \geq -\mu V(t), \text{ integrando la ecuación se tiene: } V(t) \geq V_0 e^{-\mu t} \geq 0.$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema (2.1) son no negativas $\forall t > 0$. \square

3.3. Acotación de las soluciones.

Teorema 3.3. Todas las soluciones del modelo propuesto con condiciones iniciales no negativas están limitadas y $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, $\forall t \geq 0$.

Demostración: Con el fin de demostrar la delimitación del modelo, agregaremos la tasa de crecimiento de la población:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} + \frac{dD(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Reemplazando el sistema en (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \Lambda - \beta S(t)I(t) - \alpha S(t) - \mu S(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) + \sigma \beta V(t)I(t) - \mu E(t) + \gamma E(t) - \delta I(t) \\ &\quad - \mu I(t) + \delta I(t) - (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \kappa \rho Q(t) - \mu Q(t) + (1 - \kappa)\lambda Q(t) - \mu R(t) + \kappa \rho Q(t) + \alpha S(t) \\ &\quad - \sigma \beta V(t)I(t) - \mu V(t), \end{aligned}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - \mu E(t) - \mu I(t) - \mu Q(t) - \mu R(t) - \mu V(t),$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t). \quad (3.4)$$

Resolviendo la Ecuación Diferencial (3.4) por factor integrante se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) + \mu N(t) &= \Lambda, \\ \left(\frac{d}{dt}N(t) + \mu N(t) \right) e^{\mu t} &= \Lambda e^{\mu t}, \\ \int_0^t d(N(s)e^{\mu s}) &= \Lambda \int_0^t e^{\mu s} ds, \\ N(t)e^{\mu t} - N(0) &= \frac{\Lambda}{\mu}(e^{\mu t} - 1), \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right) e^{-\mu t},$$

$$N(t) = N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \leq N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu},$$

$$0 \leq N(t) \leq N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Entonces para valores de t muy grandes se tiene,

$$0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Esto implica que $S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t)$ y $V(t)$ están acotadas. □

3.4. Análisis de estabilidad.

El equilibrio epidémico se analiza en términos de R_0 ; se dice que hay una propagación en la epidemia si y solo si R_0 es mayor de 1, lo que significa que cada infectado contagia a más de una persona. Si R_0 es igual a 1 se dice que hay equilibrio epidémico o endémico y si R_0 es menor a 1 la situación se dirige hacia el agotamiento epidémico. El equilibrio epidémico X_0 del sistema se obtiene estableciendo las derivadas del modelo a 0, es decir $I = 0$.

Para obtener el punto X^0 se igualará a 0 las ecuaciones del sistema (2.1). De la sexta ecuación obtenemos que $Q(t) = 0$, luego reemplazamos el valor hallado en la cuarta y quinta ecuación obteniendo que $R(t) = 0$ y $I(t) = 0$. En la tercera ecuación reemplazamos el valor de $I(t) = 0$ y se obtiene que $E(t) = 0$. De la primera y última ecuación obtenemos que $S(t) = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha}$ y $V(t) = \frac{\alpha\Lambda}{\mu(\mu + \alpha)}$ respectivamente.

$$X^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \alpha}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\alpha\Lambda}{\mu(\mu + \alpha)}\right). \tag{3.5}$$

Hallaremos R_0 usando la matriz de la siguiente generación.

R_0 es un parámetro de umbral conocido como número básico de reproducción:

- ◇ Si $R_0 < 1$, el equilibrio libre de la enfermedad es localmente asintóticamente estable y la enfermedad no puede invadir la población.
- ◇ Si $R_0 > 1$, el equilibrio libre de enfermedades es inestable y la invasión es posible.

Sea $X = (E, I)^T$, escribimos el sistema como:

$$X' = F(x) - W(x),$$

donde $F(x) = (\beta SI + \sigma\beta IV, 0)^T$ y $W(x) = ((\mu + \delta)E, -\gamma E + (\mu + \delta)I)^T$. La matriz Jacobiana para el equilibrio libre de la enfermedad es:

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - \mu & \beta S + \sigma\beta V \\ \gamma & -\delta - \mu \end{pmatrix}.$$

Descomponiendo

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - \mu & \beta S + \sigma\beta V \\ \gamma & -\delta - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S^0 + \sigma\beta V^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu + \gamma & 0 \\ -\gamma & \mu + \delta \end{pmatrix}.$$

Obteniéndose así F y W :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta S^0 + \sigma\beta V^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \mu + \gamma & 0 \\ -\gamma & \mu + \delta \end{pmatrix}.$$

El número básico de reproducción R_0 es el radio espectral de la matriz de la siguiente generación FW^{-1} [?]. Donde

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 \\ \frac{1}{(\gamma + \mu)(\mu + \delta)} & \frac{1}{\mu + \delta} \end{pmatrix},$$

entonces

$$FW^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S^0 + \sigma \beta V^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 \\ \frac{1}{(\gamma + \mu)(\mu + \delta)} & \frac{1}{\mu + \delta} \end{pmatrix},$$

$$FW^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta S^0 + \sigma \beta V^0}{\mu + \gamma} \\ 0 & \frac{\gamma(\beta S^0 + \sigma \beta V^0)}{(\mu + \gamma)(\mu + \delta)} \end{pmatrix}.$$

Calculando los autovalores, se tiene :

$$FW^{-1} = K = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{\beta S^0 + \sigma \beta V^0}{\mu + \gamma} \\ 0 & \lambda - \frac{\gamma(\beta S^0 + \sigma \beta V^0)}{(\mu + \gamma)(\mu + \delta)} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \left(\frac{\gamma(\beta S^0 + \sigma \beta V^0)}{(\mu + \gamma)(\mu + \delta)} \right) = 0,$$

$$\lambda = \frac{\gamma(\beta S^0 + \sigma \beta V^0)}{(\mu + \gamma)(\mu + \delta)}.$$

Del método de la matriz de la próxima generación, tenemos que R_0 es el radio espectral de K , por lo tanto

$$R_0 = \frac{\beta \gamma}{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)} (S^0 + \sigma V^0). \quad (3.6)$$

De (3.5) tomamos $S^0 = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha}$ y $V^0 = \frac{\alpha \Lambda}{\mu(\mu + \alpha)}$, sustituimos estos valores en (3.6) y obtenemos

$$R_0 = \frac{\beta \gamma \Lambda (\mu + \alpha \sigma)}{\mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma)(\mu + \alpha)}. \quad (3.7)$$

Donde R_0 es usado para medir el potencial de transmisión.

Si $R_0 > 1$, la epidemia aumenta potencialmente.

Si $R_0 < 1$, la epidemia puede acabar.

Teorema 3.4. *El equilibrio libre de enfermedad X^0 es localmente asintóticamente estable si $R_0 < 1$ e inestable si $R_0 > 1$.*

El sistema puede ser simplificado eliminando la ecuación 6 perteneciente a la variable D de los fallecidos, el cual se puede determinar como

$$D = N - S - E - I - Q - R - V.$$

La matriz Jacobiana para el equilibrio libre de enfermedad X^0 es

$$J(X^0) = \begin{pmatrix} -(\alpha + \mu) & 0 & -\beta S^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \beta(S^0 + \sigma \beta V^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -((1 - \kappa)\lambda + \kappa\rho + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \kappa)\lambda & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \beta V^0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Realizamos el cambio de variables, $\epsilon_1 = (\alpha + \mu)$, $\epsilon_2 = (\gamma + \mu)$, $\epsilon_3 = (\delta + \mu)$ y $\epsilon_4 = (1 - \kappa)\lambda + \kappa\rho + \mu$.

$$J(X^0) = \begin{pmatrix} -\epsilon_1 & 0 & -\beta S^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 & \beta(S^0 + \sigma\beta V^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\epsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\epsilon_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \kappa)\lambda & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma\beta V^0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Para hallar los autovalores

$$|A - \lambda I| = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\epsilon_1 < 0, \\ \lambda_2 &= -\epsilon_4 < 0, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = -\mu < 0, \\ \lambda_5 &= -\frac{1}{2} \left(\epsilon_2 + \epsilon_3 + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} \right), \\ \lambda_6 &= -\frac{1}{2} \left(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} \right). \end{aligned}$$

Sea $R_0 < 1$,

$$\begin{aligned} \epsilon_2\epsilon_3 R_0 &< \epsilon_2\epsilon_3, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 - 2\epsilon_2\epsilon_3 &< 2\epsilon_2\epsilon_3, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 - 2\epsilon_2\epsilon_3 + (\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) &< 2\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 &< (\epsilon_2 + \epsilon_3)^2, \\ \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} &< \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ -(\epsilon_2 + \epsilon_3) + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} &< 0, \\ -(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0}) &< 0, \\ -\frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0}) &< 0, \\ \lambda_6 &< 0. \end{aligned}$$

De la misma forma, para λ_5

$$\lambda_5 < 0.$$

Por lo tanto, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 < 0$. Como los autovalores son negativos, el equilibrio libre de la enfermedad X^0 es localmente asintóticamente estable.

Sea $R_0 > 1$;

$$\begin{aligned} \epsilon_2\epsilon_3 R_0 &> \epsilon_2\epsilon_3, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 - 2\epsilon_2\epsilon_3 &> 2\epsilon_2\epsilon_3, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 - 2\epsilon_2\epsilon_3 + (\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) &> 2\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2, \\ 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 &> (\epsilon_2 + \epsilon_3)^2, \\ \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} &> \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ -(\epsilon_2 + \epsilon_3) + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0} &> 0, \\ -(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0}) &> 0, \\ -\frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + 4\epsilon_2\epsilon_3 R_0}) &> 0, \\ \lambda_6 &> 0. \end{aligned}$$

De la misma forma, para λ_5

$$\lambda_5 < 0.$$

Entonces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 < 0$, $\lambda_6 > 0$. El equilibrio libre de la enfermedad X^0 es localmente asintóticamente inestable.

3.5. Existencia y Unicidad del equilibrio Endémico.

Se analizará la existencia y unicidad del equilibrio endémico cuando $R_0 > 1$.
Sea $X^* = (S^*, E^*, I^*, Q^*, D^*, V^*)$, el equilibrio endémico se obtiene estableciendo las derivadas a cero.

$$0 = \Lambda - \beta S^* I^* - \alpha S^* - \mu S^*, \quad (3.8)$$

$$0 = \beta S^* I^* - \gamma E^* + \sigma \beta V^* I^* - \mu E^*, \quad (3.9)$$

$$0 = \gamma E^* - \delta I^* - \mu I^*, \quad (3.10)$$

$$0 = \delta I^* - (1 - \kappa)\lambda Q^* - \kappa\rho Q^* - \mu Q^*, \quad (3.11)$$

$$0 = (1 - \kappa)\lambda Q^* - \mu R^*, \quad (3.12)$$

$$0 = \alpha S^* - \sigma \beta V^* I^* - \mu V^*. \quad (3.13)$$

Para E^* : De la ecuación (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma E^* - \delta I^* - \mu I^*, \\ \gamma E^* &= \delta I^* + \mu I^*, \\ \gamma E^* &= I^*(\delta + \mu), \\ E^* &= \frac{I^*(\delta + \mu)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Para Q^* : De la ecuación (3.11) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta I^* - (1 - \kappa)\lambda Q^* - \kappa\rho Q^* - \mu Q^*, \\ 0 &= \delta I^* - Q^*((1 - \kappa)\lambda + \kappa\rho + \mu), \\ \delta I^* &= Q^*((1 - \kappa)\lambda + \kappa\rho + \mu), \\ Q^* &= \frac{\delta I^*}{(1 - \kappa)\lambda + \kappa\rho + \mu}. \end{aligned}$$

Para S^* : De la ecuación (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \beta S^* I^* - \alpha S^* - \mu S^*, \\ 0 &= \Lambda - S^*(\beta I^* + \alpha + \mu), \\ \Lambda &= S^*(\beta I^* + \alpha + \mu), \\ S^* &= \frac{\Lambda}{\beta I^* + \alpha + \mu}, \\ S^* &= \frac{\Lambda}{\beta I^* + (\alpha + \mu)}. \end{aligned}$$

Para abreviar las ecuaciones anteriores denotamos a $\epsilon_1 = \alpha + \mu$, $\epsilon_2 = \gamma + \mu$, $\epsilon_3 = \delta + \mu$ y $\epsilon_4 = \mu + \lambda(1 - \kappa) + \kappa\rho$. Por lo tanto

$$E^* = \frac{I^*\epsilon_3}{\gamma}, \quad Q^* = \frac{I^*\delta}{\epsilon_4}, \quad S^* = \frac{\Lambda}{\beta I^* + \epsilon_1}.$$

Para V^* : reemplazamos los valores de E^* , Q^* y S^* en las ecuaciones (3.9) y (3.13).

De la ecuación (3.13) tenemos:

$$\sigma\beta V^* I^* = \alpha S^* - \mu V^*. \tag{3.14}$$

De la ecuación (3.9) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta S^* I^* - (\gamma + \mu) E^* + \sigma\beta V^* I^*, \\ 0 &= \beta S^* I^* - \epsilon_2 E^* + \sigma\beta V^* I^*. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Reemplazamos (3.14) en (3.15)

$$\begin{aligned} 0 &= \beta S^* I^* - \epsilon_2 E^* + \alpha S^* - \mu V^*, \\ V^* &= \frac{-\epsilon_2 E^* + S^*(\beta I^* + \alpha)}{\mu}, \\ V^* &= \frac{\frac{-\epsilon_2 \epsilon_3 I^*}{\gamma} + \frac{\Lambda}{\beta I^* + \epsilon_1} (\beta I^* + \alpha)}{\mu}, \\ V^* &= \frac{\Lambda\gamma(\beta I^* + \alpha) - \epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^*}{\mu\gamma(\beta I^* + \epsilon_1)}. \end{aligned}$$

De la ecuación (3.9) tenemos:

$$\beta S^* I^* - (\gamma + \mu) E^* + \sigma\beta V^* I^* = 0.$$

Reemplazando los valores de E^* , S^* y V^* se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta \left[\frac{\Lambda}{\beta I^* + \epsilon_1} \right] I^* - (\gamma + \mu) \left[\frac{I^* \epsilon_3}{\gamma} \right] + \sigma\beta I^* \left[\frac{\Lambda\gamma(\beta I^* + \alpha) - \epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^*}{\mu\gamma(\beta I^* + \epsilon_1)} \right] &= 0, \\ \frac{\beta\Lambda I^*}{\beta I^* + \epsilon_1} - \epsilon_2 \left[\frac{I^* \epsilon_3}{\gamma} \right] + \sigma\beta I^* \left[\frac{\Lambda\gamma(\beta I^* + \alpha) - \epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^*}{\mu\gamma(\beta I^* + \epsilon_1)} \right] &= 0, \\ \frac{\mu\gamma\beta\Lambda I^* - I^* \mu\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) + \sigma\beta I^* [\Lambda\gamma(\beta I^* + \alpha) - \epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^*]}{\mu\gamma(\beta I^* + \epsilon_1)} &= 0, \\ \mu\gamma\beta\Lambda - \mu\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) + \sigma\beta [\Lambda\gamma(\beta I^* + \alpha) - \epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^*] &= 0, \\ \mu\beta\gamma\Lambda - \mu\epsilon_2 \epsilon_3 \beta I^* - \mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 + \sigma\beta\Lambda\gamma\beta I^* + \sigma\beta\gamma\Lambda\alpha - \sigma\beta\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^* &= 0, \\ \beta\gamma\Lambda(\mu + \alpha\sigma) - \mu\epsilon_2 \epsilon_3 \beta I^* - \mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 + \sigma\beta\Lambda\gamma\beta I^* - \sigma\beta\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^* &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De (3.7) se tiene

$$R_0 = \frac{\beta\gamma\Lambda(\mu + \alpha\sigma)}{\mu(\epsilon_1)(\epsilon_2)(\epsilon_3)}, \text{ entonces } \beta\gamma\Lambda(\mu + \alpha\sigma) = R_0\mu\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3.$$

Reemplazando en (3.16)

$$\begin{aligned} R_0\mu\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - \mu\epsilon_2 \epsilon_3 \beta I^* - \mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 + \sigma\beta^2 \Lambda\gamma I^* - \sigma\beta\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^* &= 0, \\ \mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (R_0 - 1) - \mu\epsilon_2 \epsilon_3 \beta I^* + \sigma\beta^2 \Lambda\gamma I^* - \sigma\beta\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta I^* + \epsilon_1) I^* &= 0, \\ -\mu\epsilon_2 \epsilon_3 \beta I^* + \sigma\beta^2 \Lambda\gamma I^* - \sigma\beta^2 I^{*2} \epsilon_2 \epsilon_3 - \sigma\beta I^* \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 + \mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (R_0 - 1) &= 0, \\ [\sigma\beta^2 \epsilon_2 \epsilon_3] I^{*2} + [\sigma\beta\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 - \sigma\beta^2 \Lambda\gamma + \beta\mu\epsilon_2 \epsilon_3] I^* + [\mu\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (1 - R_0)] &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Sea } a_2 = \sigma\beta^2\epsilon_2\epsilon_3 > 0, \quad a_1 = \sigma\beta\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 - \sigma\beta^2\Lambda\gamma + \beta\mu\epsilon_2\epsilon_3 \quad \text{y} \quad a_0 = \mu\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3(1 - R_0) < 0$$

$$a_2I^{*2} + a_1I^* + a_0 = 0.$$

Dado que $a_2 > 0$ y $a_0 < 0$ cuando $R_0 > 1$. Solo hay un único valor positivo para I^* , entonces el equilibrio endémico es único X^* . Efectivamente, esto cumple ya que los valores mencionados en las tablas de los parámetros determinan una solución positiva para ambos casos porque la solución explícita de este polinomio de segundo orden muestra que tendrá dos soluciones reales y distintas por su discriminante mayor a cero.

4. Implementación y Análisis. Se realizó la implementación del programa en Python para ambos casos (Arabia Saudita y Perú). En el primer caso, los datos usados se muestran en la investigación realizada por los autores mencionados, los cuales fueron extraídos del Centro Saudita para la Prevención y el Control de Enfermedades [3]. En el caso de Perú se usaron datos aproximados obtenidos del portal web del Ministerio de Salud del Perú. La implementación se realizó en la plataforma Jupyter Notebook, usando Python con versión 3. Python es un lenguaje de programación interpretado y multiplataforma el cual destaca por sus diferentes aplicaciones, por ejemplo, en el modelamiento matemático. Posee muchas librerías que facilitan la realización de estas aplicaciones, en nuestro caso se usaron las librerías Matplotlib para las gráficas, Numpy y Scipy para la parte matemática. Asimismo, las ecuaciones del modelo fueron resueltas usando el comando odeint, perteneciente a la librería Scipy.

4.1. Arabia Saudita. Los datos usados para Arabia Saudita corresponden a Marzo del 2020 [4]. Las condiciones iniciales establecidas en la simulación son $I(0) = E(0) = 3$ veces el número de pruebas positivas ($Q_0 = 1$). Los recuperados y fallecidos son $R(0) = D(0) = 0$; la población inicial es $N(0) = 34,218,000$ y $S(0) = N(0) - E(0) - I(0) - Q(0) - R(0) - D(0) - V(0)$. Se consideraron 2 periodos (ver 4.1, 4.2), el primero describe el inicio de la pandemia cuando aún no se habían tomado medidas para evitar el aumento de los contagios, por ello $R_0 = 2,5$, lo que resulta $\beta_1 = 8,58 \times 10^{-9}$. El segundo periodo describe el comportamiento del virus cuando ya se implementaron medidas de prevención, esta fase está comprendida hasta el 30 de Junio del 2020, es por esto que $R_0 = 1$ y $\beta_2 = 3,43 \times 10^{-9}$. Los resultados graficados a continuación, en 4.3, muestran que, al implementar medidas de prevención, los casos se reducen.

Parámetro	Valor inicial
Λ	2300 personas/día
β_1	$8,58 \times 10^{-9}$ día ⁻¹
β_2	$3,43 \times 10^{-9}$ día ⁻¹
α	$3,5 \times 10^{-4}$ día ⁻¹
μ	3×10^{-5} personas/día
γ^{-1}	5.5 días
σ	0.05
δ^{-1}	3.8 días
κ	0.014
λ^{-1}	10 días
ρ^{-1}	15 días

Tabla 4.1: Descripción de parámetros del modelo SEIR para Arabia Saudita [4].

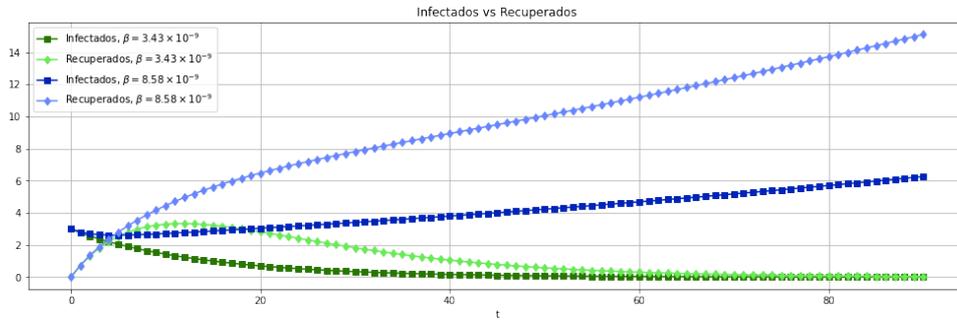


Figura 4.1: Infectados vs Recuperados.

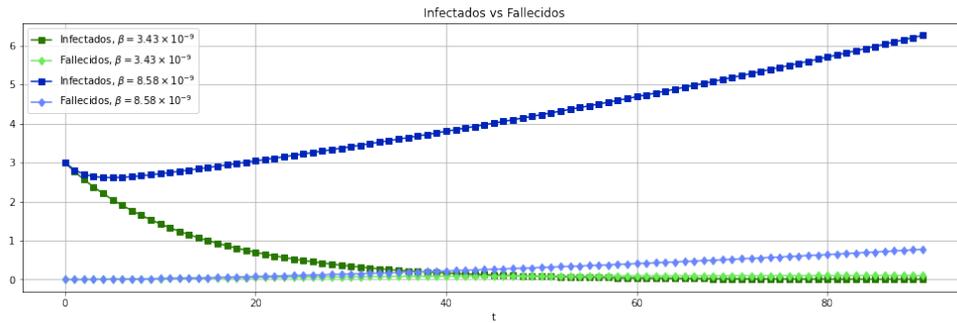


Figura 4.2: Infectados vs Fallecidos.

4.1.1. Impacto de la Vacunación. El impacto de la vacunación en Arabia Saudita se mide a medida que la cantidad de vacunados aumenta; por ejemplo, hasta el 17 de enero de 2021, casi 295,000 personas fueron vacunados contra COVID-19 según el Consejo de Salud de Arabia Saudita, por lo que $\alpha = 3 * 10^{-4}$. Según estudios realizados, la vacuna administrada fue desarrollada por el laboratorio Pfizer-BioNtech, y ofrece hasta un 95 % de protección después de recibir la segunda dosis. Esto daría un $\rho = 0,05$. La simulación mostrada a continuación, la cual fue proporcionada por los autores, inició el 17 de diciembre por un periodo de seis meses con y sin vacunación. A medida que la cantidad de vacunados aumentaba, la variable α también. En la gráfica se puede ver que a mayor α , la cantidad de casos activos, recuperados, confirmados y fallecidos iba en descenso.

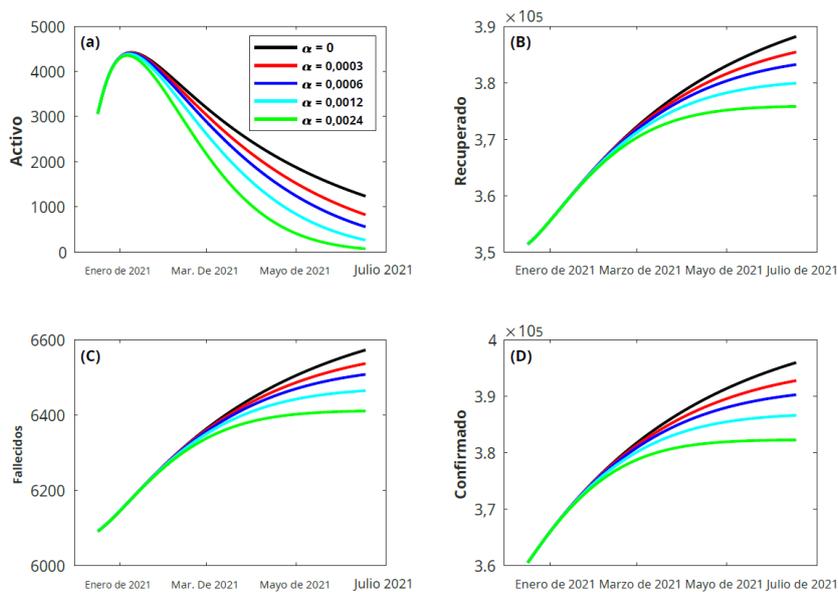


Figura 4.3: Impacto de la Vacunación en Arabia Saudita [4].

4.2. Caso Perú. Los datos usados para Perú no son cantidades exactas, como ya se mencionó, son aproximados dado que estos se mantienen en constante actualización[6, 7]. Para este caso se tomará como fecha inicial el día 6 de setiembre del 2021, donde $I(0) = E(0) = 4$ veces el número de pruebas positivas. La población inicial es $N(0) = 32,625,948$ y $S(0) = N(0) - E(0) - I(0) - Q(0) - R(0) - D(0) - V(0)$. Se considera 1 periodo, el cual describe el comportamiento del virus en la actualidad, con medidas de prevención implementadas donde $R_0 = 1,1$ y $\beta_2 = 3,51 \times 10^{-9}$. Los resultados graficados a continuación muestran que en un periodo de 90 días los casos seguirán en ascenso, lo cual coincide con las predicciones dadas por el Ministerio de Salud con respecto a una tercera ola.

Parámetro	Valores Estimados
Λ	1700 personas/día
β_1	$9,6 \times 10^{-9} \text{ día}^{-1}$
β_2	$3,5 \times 10^{-9} \text{ día}^{-1}$
α	$4 \times 10^{-4} \text{ día}^{-1}$
μ	$3,05 \times 10^{-5} \text{ personas/día}$
γ^{-1}	6.1 días
σ	0.05
δ^{-1}	3.5 días
κ	0.02
λ^{-1}	12 días
ρ^{-1}	15 días

Tabla 4.2: Descripción de parámetros del modelo SEIR para Perú.

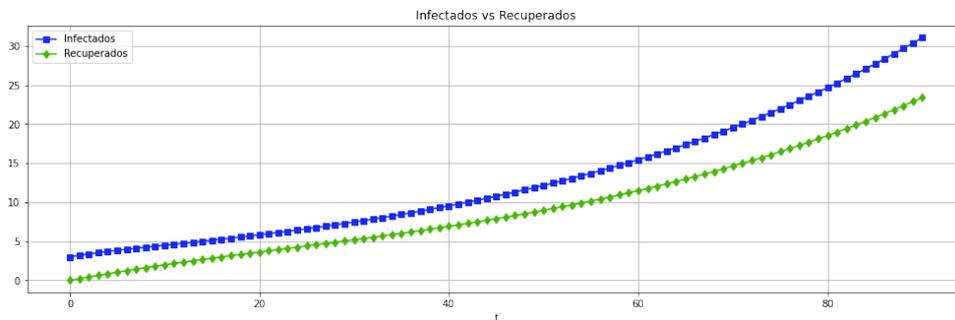


Figura 4.4: Infectados vs Recuperados.



Figura 4.5: Infectados vs Fallecidos.

4.2.1. Impacto de la Vacunación. El impacto de la vacunación en Perú se mide con la cantidad de personas vacunados. En este caso se hará una estimación del desarrollo del virus a medida que los vacunados aumentan, la cantidad inicial tomada corresponde a las personas vacunados hasta el 6 de setiembre del 2021, las cuales son 20,032,369 $\alpha = 0,02$. En Perú se han aplicado dosis de diferentes laboratorios (Pfizer-Biotech, Sinopharm, Astra Zeneca), por lo que promediando se tendría $\rho = 0,04$. A medida que la cantidad de vacunados aumenta, la variable α también. En la gráfica se realiza una simulación donde a mayor α la cantidad de casos activos, recuperados, confirmados y fallecidos irá descendiendo.

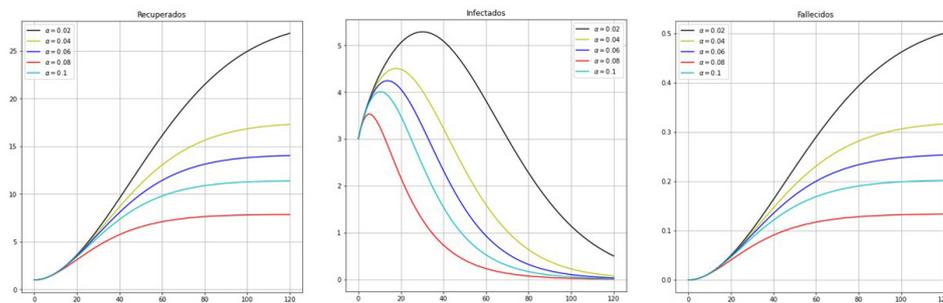


Figura 4.6: Impacto de la Vacunación en Perú.

5. Conclusiones. Se presentó un modelo SEIR extendido partiendo del trabajo “An Extended SEIR Model with Vaccination for Forecasting the COVID-19 Pandemic in Saudi Arabia Using an Ensemble Kalman Filter” presentado por Rabih Ghostine, Mohamad Gharamti, Sally Hassrouny e Ibrahim Hoteit. Este modelo presenta siete etapas de infección, incluida la vacunación para simular y predecir el desarrollo del SARS-COV2 con datos reales de Arabia Saudita y aproximados de Perú. Las simulaciones realizadas pueden dar un concepto general del desarrollo del virus con respecto a las etapas de infección; asimismo se puede analizar de forma gráfica la importancia de las medidas tomadas por el gobierno para reducir la cantidad de contagios. Con respecto a las simulaciones sobre el impacto de la vacunación para ambos países, es necesario recalcar su importancia como medida de prevención, ya que disminuye significativamente los casos de infectados y fallecidos; también es preciso mencionar que la vacunación salva vidas.

ORCID and License

Jennifer Madge <https://orcid.org/0000-0002-2628-2232>

Jhelly Pérez <https://orcid.org/0000-0003-0717-8277>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Armstrong E, Runge M, Gerardin J. Identifying the measurements required to estimate rates of COVID-19 transmission, infection, and detection, using variational data assimilation. *Infect. Dis. Model.* 2020; 6:133–147.
- [2] Bjørnstad ON, Shea K, Krzywinski M, Altman N. The SEIRS model for infectious disease dynamics. *Nature Methods.* 2020; 17(6):557-559.
- [3] Centro Saudita para la Prevención y el Control de Enfermedades. COVID-19: Actualización Diaria[Internet][accesado: 18 de junio de 2021]. Disponible en <https://covid19.cdc.gov.sa/dailyupdates>.
- [4] Ghostine R, Gharamti M, Hassrouny S, Hoteit I. An Extended SEIR Model with Vaccination for Forecasting the COVID-19 Pandemic in Saudi Arabia Using an Ensemble Kalman Filter[Internet]. *Mathematics* 2021, 9(6):636. Disponible en <https://doi.org/10.3390/math9060636>
- [5] Kermack, W.O.; McKendrick, A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond.* 1927, 115, 700–721.
- [6] Ministerio de Salud Gobierno del Perú. Vacuna COVID-19 en el Perú[Internet][accesado 27 de agosto de 2021]. Disponible en <https://www.minsa.gob.pe/reunis/data/vacunascovid19.asp>.
- [7] Ministerio de Salud Gobierno del Perú. Sala Situacional Covid 19 en Perú[Internet][accesado 27 de agosto 2021]. Disponible en https://covid19.minsa.gob.pe/sala_situacional.asp.
- [8] Núñez JP, Cruz RL. (2017). Análisis Matemático de una cadena alimenticia-presa-depredador control-biológico. *Selecciones Matemáticas.* 2017; 4(01):112-123. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.11>
- [9] Pérez J, Vásquez L. Modelo Huésped-Vector: Análisis de estabilidad y simulaciones. *Selecciones Matemáticas*[Internet]. 2018; 5(2):175-192. Disponible en <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.02.05>
- [10] Pino N, Soto P, Quispe. Un Modelo Matemático SIR-D Segmentado para la Dinámica de Propagación del Coronavirus (COVID-19) en el Perú. *Selecciones Matemáticas*[Internet]. 2020; 7(1):162-171. Disponible en <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.14>

- [11] Pino Romero N. Análisis y simulación numérica de un modelo matemático SI con retardo discreto para las enfermedades de transmisión sexual[Magister Tesis],[Lima]: Universidad Nacional Mayor de San Marcos; 2017. 170p. Disponible en http://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/5735/Pino_rn.pdf?sequence=1.
- [12] Sesterhenn JL. Adjoint-based data assimilation of an epidemiology model for the covid-19 pandemic in 2020[Internet][Accesado: 27 de agosto 2021]. arXiv 2020. Disponible en <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.13071>