



COMMUNICATION

Qualitative analysis and simulations of a ratio-dependent May-Holling-Tanner predator-prey model with an alternative food source for the predator

Análisis cualitativo y simulaciones de un modelo depredador-presa tipo May-Holling-Tanner razón-dependiente con una fuente alternativa de alimento para el depredador

Marco Romero-Ordoñez[✉], Jhelly Pérez-Núñez[✉] and Luis Vásquez-Serpa[✉]

Received, Mar. 02, 2022

Accepted, Jun. 20, 2022



How to cite this article:

Romero-Ordoñez M. et al. *Análisis cualitativo y simulaciones de un modelo depredador-presa tipo May-Holling-Tanner razón-dependiente con una fuente alternativa de alimento para el depredador*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(1):196–209. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2022.01.17>

Abstract

In this work, a May-Holling-Tanner ratio-dependent predator-prey model is studied with an alternative food source for the predator, described by a two-dimensional system of ordinary differential equations. We study the existence and uniqueness of the solutions of the mentioned above system. In addition, the boundedness and positivity of these solutions are analyzed and we establish conditions for the local stability of a simplified model, through a differentiable equivalence. Likewise, the Python programming language is used to perform the simulations using the Runge-Kutta numerical method of order four with the aim of showing the different cases of qualitative analysis.

Keywords . May-Holling-Tanner model, ratio-dependent, alternative food, simulations.

Resumen

En el presente trabajo, se estudia un modelo depredador-presa tipo May-Holling-Tanner razón-dependiente con una fuente alternativa de alimento para el depredador, descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones del sistema antes mencionado. Además, se analiza la acotación y positividad de dichas soluciones y establecemos condiciones para la estabilidad local de un modelo simplificado, mediante una equivalencia diferenciable. Asimismo, se usa el lenguaje de programación Python para realizar las simulaciones haciendo uso del método numérico Runge-Kutta de orden cuatro con el objetivo de mostrar los diferentes casos del análisis cualitativo.

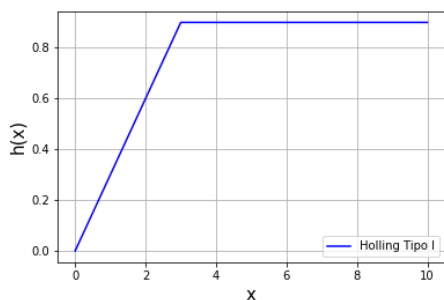
Palabras clave. Modelo May-Holling-Tanner, razón-dependiente, alimento alternativo, simulaciones.

1. Introducción. Los modelos depredador-presa pueden ser clasificados en los siguientes tres tipos, modelos dependientes de la presa [1] o también llamados modelos tradicionales, modelos dependientes del depredador y mixto. Esta clasificación depende de la respuesta funcional, el cual representa la rapidez con la cual los depredadores eliminan a sus presas o el número de presas consumidas por depredador en unidad de tiempo [5]. Holling propuso en [8], tres tipos de respuesta funcional, los cuales en su mayoría son aplicados a modelos dependientes de la presa. A continuación se presenta los tres tipos de respuesta funcional tipo Holling, con sus respectivas gráficas en la Figura (1.1).

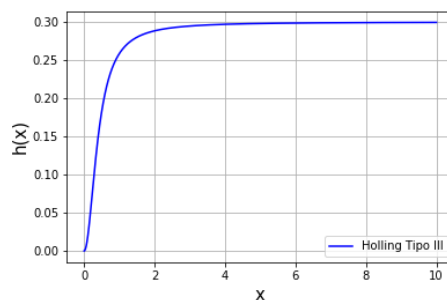
*UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú. (marco.romero7@unmsm.edu.pe).

†UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú. (jhelly.perez@unmsm.edu.pe).

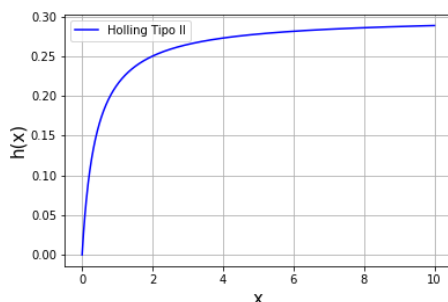
‡UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú. (luis.vasquez2@unmsm.edu.pe).



a: Respuesta Funcional Holling tipo I: Esta respuesta funcional se obtiene suponiendo que el cambio en la densidad de población de depredadores es proporcional a la densidad de la población de presas disponibles, es decir, existe un aumento lineal de la tasa de ataque de la población de depredadores respecto a la densidad de población de presas, hasta llegar a un punto a partir del cual la tasa máxima de ataque se hace constante.



b: Respuesta Funcional Holling tipo III: Esta respuesta expresa una curva de crecimiento sigmoidea, el número de presas consumidas por unidad de tiempo se acelera con el aumento de la densidad de presas, hasta que el tiempo de manipulación comienza a limitar su consumo.



c: Respuesta Funcional Holling tipo II: En esta respuesta funcional aparece el tiempo de manipulación, el cual trata del tiempo de perseguir, dominar y comer a cada presa, además del tiempo que el depredador toma para prepararse e ir a buscar más presas. en este caso, el tiempo de búsqueda disminuye y el tipo de respuesta resulta en un incremento desacelerado del consumo a medida que aumenta la población de presas consumidas hasta que la función se estabiliza puesto que el depredador se satura.

Figura 1.1: Respuesta funcional de Holling tipo I, II y III, con sus respectivas gráficas.

Los tres tipos de respuesta funcional de tipo Holling han sido ampliamente estudiados por diferentes investigadores como en [10, 11], en especial la respuesta funcional Holling tipo II, como en [7], el cual tiene la siguiente forma.

$$h(x) = \frac{qx}{x+a},$$

donde $q > 0$ y $a > 0$.

- x : Representa la densidad poblacional de la presa.
- q : Tasa máxima de crecimiento del depredador.
- a : Medida de protección a la presa brindada por el medio ambiente.

En consecuencia, muchos biólogos han cuestionado los modelos depredador-presa dependientes de la presa, ya que consideran que las respuestas funcionales deberían depender de las densidades de la presa y del depredador. A lo largo del tiempo el respaldo a lo antes ya mencionado se hace mas fuerte debido a las evidencias biológicas, como en [1]. Arditi y Ginzburg en [1] propusieron una respuesta funcional mixta, es decir que dependa tanto de las presas como del depredador. Esta respuesta funcional es llamado razón-dependiente, el cual trata de modificar cualquier respuesta funcional $h(x)$ a $h\left(\frac{x}{y}\right)$. A modo de ejemplo se aplicará la razón-dependiente a la respuesta funcional Holling tipo II, el cual se usará a continuación.

$$h(x) = \frac{qx}{x + ay}.$$

Un típico modelo Holling-Tanner es representando por el siguiente par de ecuaciones diferenciales bidimensional autónomo.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - H(x)y \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right). \end{cases} \quad (1.1)$$

donde.

- r : Tasa de crecimiento intrínseco para la presa.
- s : Tasa de crecimiento intrínseco para el depredador.
- n : Medida de calidad de la presa como alimento para el depredador.
- k : Capacidad de carga ambiental de la presa.
- $H(x)$: Respuesta funcional que representa el impacto de la depredación sobre la especie presa.

Este modelo fue propuesto por J.T. Tanner en 1975 [15], el cual se basa de los modelos depredador-presa del tipo Leslie o modelo presa depredador logístico o modelos del tipo Leslie-Gower [4]. El modelo May-Holling-Tanner corresponde al modelo Holling-Tanner con respuesta funcional Holling tipo II, el cuál ha sido estudiado anteriormente en [13], con efecto Allee fuerte en [2], con retardo en [14], incluso perturbado por razón-dependiente [9]. Este trabajo se centra en este último caso, en el cual se agrega un alimento alternativo para el depredador, como en: [3, 12].

2. Modelo. En este trabajo se estudia el modelo May-Holling-Tanner razón dependiente con alimento alternativo para el depredador, el cual esta representado en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias bidimensional autónoma.

$$X_{\sigma}(x, y) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{qxy}{x + ay} \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right) y, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\sigma = (r, k, q, a, s, n, c)$, y las variables dependientes del tiempo t , son los siguientes.

Variable	Descripción	Dimensión
$x(t)$	Densidad poblacional de las presas	$\frac{\text{presa}}{\text{area}}$
$y(t)$	Densidad poblacional del depredador	$\frac{\text{depredador}}{\text{area}}$

Tabla 2.1: Descripción y dimensión de las variables del sistema (2.1).

Parámetro	Descripción	Dimensión
r	Tasa de crecimiento intrínseca para la presa	$\frac{1}{t}$
k	Capacidad de carga ambiental de la presa	$\frac{\text{presa}}{\text{area}}$
q	Tasa máxima de consumo per-capita del depredador	$\frac{\text{presa}}{\text{depredador}}$
a	Medida en que el medio ambiente brinda protección a la presa	$\frac{\text{presa}}{\text{depredador}}$
s	Tasa de crecimiento intrínseco del depredador	$\frac{1}{t}$
n	Medida de calidad de la presa como alimento para el depredador	$\frac{\text{depredador}}{\text{presa}}$
c	Tamaño de alimento alternativo para los depredadores	$\frac{\text{depredador}}{\text{area}}$

Tabla 2.2: Descripción y dimensión de los parámetros del sistema (2.1).

Además, los parámetros del cuadro (2.2) son positivos es decir $\sigma = (r, k, q, a, s, n, c) \in \mathbb{R}_+^7$. El sistema (2.1), está definido en la siguiente región.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Se presenta el P.V.I asociado al sistema (2.1).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{qxy}{x + ay}, \\ \frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right) s, \\ x(0) > 0, \\ y(0) > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

3. Existencia y Unicidad. Sean.

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{qxy}{x + ay}, \\ F_2(x, y) &= s \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right) y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Entonces, se tiene el siguiente campo vectorial.

$$\begin{aligned} F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)). \end{aligned}$$

Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (2.1), se usa el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sea $F = (F_1, F_2)$ un campo vectorial de clase C^1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, entonces el P.V.I asociado:

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Admite una única solución local.

Es fácil ver que las funciones componentes F_1, F_2 del campo vectorial F asociado al P.V.I (2.2) son de clase C^∞ , ya que $\frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y}$, donde $i = 1, 2$, son de clase C^∞ en $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Es decir; que el P.V.I. (2.2) admite una única solución $\psi : I \longrightarrow \Omega$ tal que satisface las condiciones de (2.2).

4. Positividad y acotación. Debido que el sistema (2.1) es un modelo depredador-presa, entonces debe cumplir con las siguientes condiciones: soluciones positivas y acotadas. En consecuencia, se presenta los siguientes teoremas.

Teorema 4.1. *La región Ω es invariante por el sistema (2.1), es decir,*

$$Si (x_0, y_0) \in \Omega, \text{ entonces } (x(t), y(t)) \in \Omega, \forall t \geq 0. \tag{4.1}$$

Demostración: Del P.V.I. (2.2) se tiene que $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$. Resolviendo el P.V.I. se tiene que:

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(r \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{qy}{x + ay} \right) dm \right\} > 0.$$

$$y(t) = y_0 \exp \left\{ \int_0^t s \left(1 - \frac{y}{nx + c} \right) dm \right\} > 0.$$

Entonces $(x(t), y(t)) \in \Omega \forall t \geq 0$. Por lo tanto, la región Ω es invariante por el sistema (2.1), es decir, toda solución que pasa por un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ esta contenida en Ω . □

Teorema 4.2. *Las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del sistema (2.1) son acotadas para todo $t \geq 0$.*

Demostración: Del sistema (2.1), se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{k} \right) x - \frac{qyx}{x + ay} \leq r \left(1 - \frac{x}{k} \right) x.$$

Integrando ambos miembros

$$\int_0^t r \left(1 - \frac{x}{k} \right) x - \frac{qyx}{x + ay} \leq \int_0^t r \left(1 - \frac{x}{k} \right) x.$$

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} \leq \frac{kx_0 e^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}.$$

$$x(t) \leq \frac{kx_0 e^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$x(t) \leq k. \tag{4.2}$$

Luego, de la segunda ecuación del sistema (2.1) se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{nx + c} \right) s < y \left(1 - \frac{y}{\rho} \right) s,$$

donde $\rho = nk + c$. De manera similar se tiene que

$$y(t) \leq \frac{\rho y_0 e^{st}}{\rho + y_0(e^{st} - 1)}.$$

De la desigualdad anterior, se deduce:

$$y(t) \leq \rho = nk + c. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, de (4.2) y (4.3), se tiene que $x(t)$ y $y(t)$, las soluciones del sistema (2.1) están acotadas para todo $t \geq 0$, por k y $nk + c$, respectivamente. □

5. Puntos críticos. Dado el sistema de EDO.

$$\begin{cases} x' = F_1(x, y), \\ y' = F_2(x, y), \end{cases}$$

un punto $(x^*, y^*) \in \Omega$ es llamado punto crítico si $F_1(x^*, y^*) = 0, F_2(x^*, y^*) = 0$. Es decir un punto crítico (x^*, y^*) es una solución constante: $\varphi(t) = (x^*, y^*), \forall t \geq 0$, donde.

$$\begin{cases} F_1(\varphi(t)) = 0. \\ F_2(\varphi(t)) = 0. \end{cases} \longrightarrow \varphi'(t) = F(\varphi(t)) = 0.$$

Un punto crítico, también llamado punto de equilibrio puede expresar varias situaciones. Por ejemplo el punto crítico que se encuentra en el eje de las presas como el punto $(1, 0)$, significa que solo la presa sobrevive, análogamente para el punto crítico $(0, 1)$, mientras que un punto que se encuentra en el primer cuadrante como. Por ejemplo $(1, 1)$ ecológicamente significa que ambas especies sobreviven, pero esto puede cambiar si se comporta de manera estable o inestable. Luego los puntos críticos del sistema (2.1), son los puntos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y^* &= nx + c, \\ y^* &= \frac{rx(k-x)}{kq - ar(k-x)}, \end{aligned}$$

como: $(k, 0)$, $(0, c)$ y (x^*, y^*) , el cual satisface el sistema de ecuaciones anteriores, dando origen al siguiente polinomio de grado dos.

$$-x^2(r + arn) + x(rk - kqn + arkn - arc) + arkc - kqc = 0, \tag{5.1}$$

como el polinomio (5.1) resulta complicado de analizar, se propone realizar el siguiente cambio de variables $x = uk$ y $y = vnk$, dando como resultado.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ur(1-u) - \frac{uk(vn)q}{uk + avkn}, \\ \frac{dv}{dt} = s \left(1 - \frac{vnk}{ukn + c} \right) v. \end{cases} \tag{5.2}$$

Reduciendo el sistema (5.2), resulta:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = r(1-u)u - \left(\frac{uv}{\frac{u}{nq} + \frac{va}{q}} \right), \\ \frac{dv}{dt} = s \left(1 - \frac{v}{u + \frac{c}{nk}} \right) v. \end{cases} \tag{5.3}$$

Luego de cambiar las variables dependientes, se cambia la variable temporal $t = \frac{\tau}{r}$. Por regla de la cadena $\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt} * \frac{dt}{d\tau}$, se tiene, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \left(\frac{uv}{\frac{r}{u} + \frac{ra}{v}} \right), \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{s}{r} \left(1 - \frac{v}{u + \frac{c}{nk}} \right) v. \end{cases} \tag{5.4}$$

Para simplificar el sistema anterior se realiza el cambio de parámetros: $C = \frac{c}{nk}$, $A = \frac{ra}{q}$, $B = \frac{r}{qn}$, $S = \frac{s}{r}$.

$$U_{\vartheta}(u, v) \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{uv}{Bu + Av}, \\ \frac{dv}{d\tau} = S \left(1 - \frac{v}{u + C} \right) v, \end{cases} \tag{5.5}$$

con $\vartheta = (A, B, C, S) \in \mathbb{R}_+^4$. Además, el sistema (5.5) está definido en: $\tilde{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0, v > 0\}$.

Así mismo, el cambio de variable dado en el sistema (5.2) de clase C^∞ en $\tilde{\Omega}$ provoca un difeomorfismo $\Psi(u, v, \tau) = (uk, vnk, \frac{\tau}{r}) = (x, y, t)$; ya que la matriz jacobiana es:

$$J_0 = J\Psi(u, v, \tau) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & nk & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}, \text{ con } Det(J_0) = \frac{n}{r}k^2 > 0.$$

Por lo tanto, el difeomorfismo Ψ provoca que el campo vectorial (2.1) es C^∞ -conjugado al campo vectorial (5.5), como en [6]. Ahora los puntos críticos son: $(1, 0)$, $(0, C)$, (u^*, v^*) , donde este último satisface las ecuaciones:

$$v^* = u + C, \tag{5.6}$$

$$v^* = \frac{u(1-u)B}{1+A(u-1)}, \tag{5.7}$$

Igualando (5.6) y (5.7), se obtiene el siguiente polinomio de grado 2.

$$u^2(A+B) + u(1-A+AC-B) + C - AC = 0, \tag{5.8}$$

cuyas raíces dependen del valor de M , donde $M = (1 - A - B + AC)^2 + 4C(A + B)(A - 1)$, el cual representa la discriminante del polinomio (5.8). Entonces, se tiene dos casos:

Caso 1. Cuando $M > 0$:

$$u_1 = \frac{A+B-AC-1+\sqrt{M}}{2(A+B)}, \tag{5.9}$$

$$u_2 = \frac{A+B-AC-1-\sqrt{M}}{2(A+B)}. \tag{5.10}$$

Caso 2. Cuando $M = 0$

$$u_3 = \frac{A+B-AC-1}{2(A+B)}. \tag{5.11}$$

Luego, al reemplazar (5.9), (5.10) y (5.11) en (5.6) se obtiene los siguientes puntos críticos:

Caso 1. Cuando $M > 0$, puntos críticos: (u_1, v_1) , (u_2, v_2) .

$$u_1 = \frac{A+B+\sqrt{M}-AC-1}{2(A+B)}, \quad v_1 = \frac{A+B+AC+2BC+\sqrt{M}-1}{2(A+B)}, \tag{5.12}$$

$$u_2 = \frac{A+B-\sqrt{M}-AC-1}{2(A+B)}, \quad v_2 = \frac{A+B+AC+2BC-\sqrt{M}-1}{2(A+B)}. \tag{5.13}$$

Caso 2. Cuando $M = 0$, se tiene un punto crítico: (u_3, v_3) .

$$u_3 = \frac{A+B-AC-1}{2(A+B)}, \quad v_3 = \frac{A+B+AC+2BC-1}{2(A+B)}. \tag{5.14}$$

Luego de analizar los puntos críticos, se tienen los siguientes subcasos:

Caso 1.1 $M > 0$ si $A > 1$.

Caso 2.1 $M = 0$ si $A = 1$ y $B = C$.

En el caso 2.1, se tiene que: $(u_3, v_3) = (0, B)$.

En el caso 1.1,

1. en (u_1, v_1)

$$u_1 = \frac{\overbrace{A-1}^{>0} + \overbrace{\sqrt{M}}^{>0} + B - AC}{\underbrace{2(A+B)}_{>0}}, \quad v_1 = \frac{\overbrace{A-1}^{>0} + \overbrace{\sqrt{M}}^{>0} + \overbrace{B+AC+2BC}^{>0}}{\underbrace{2(A+B)}_{>0}}.$$

Entonces para que $(u_1, v_1) \in \tilde{\Omega}$ es suficiente que $\frac{B}{C} > A$.

2. En (u_2, v_2)

$$u_2 = \frac{\overbrace{A-1}^{>0} + \underbrace{B - \sqrt{M} - AC}_{>0}}{2(A+B)}, \quad v_2 = \frac{\overbrace{A-1}^{>0} + \overbrace{AC + 2BC}^{>0} + B - \sqrt{M}}{2(A+B)}.$$

Por ende para que $u_2 > 0$, debe de cumplir que $\frac{B - \sqrt{M}}{C} > A$, mientras que para que $v_2 > 0$ es suficiente que $B > \sqrt{M}$. Por lo tanto para que $(u_2, v_2) \in \tilde{\Omega}$ es suficiente que $\frac{B - \sqrt{M}}{C} > A$.

En resumen, los puntos críticos que no pertenecen a la región $\tilde{\Omega}$, son los siguientes.

- i $(1, 0)$.
- ii $(0, C)$.
- iii $(0, B)$, con $M = 0, A = 1, B = C$.

Luego, los puntos de equilibrio que pertenecen a la región $\tilde{\Omega}$, son.

- 1. (u_1, v_1) , con $M > 0, A > 1, \frac{B}{C} > A$.
- 2. (u_2, v_2) , con $M > 0, A > 1, \frac{B - \sqrt{M}}{C} > A$.

6. Análisis cualitativo. En esta sección se analiza los puntos críticos que pertenecen y que no pertenecen a la región $\tilde{\Omega}$ usando la linealización, el cual es un método para estudiar la estabilidad local de un punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello se usa los siguiente resultado, ver [5].

Teorema 6.1. Sea (u^*, v^*) es un punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = G(u, v) \end{cases}. \quad (6.1)$$

Con matriz Jacobiana:

$$A(u^*, v^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial F}{\partial v}(u^*, v^*) \\ \frac{\partial G}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial G}{\partial v}(u^*, v^*) \end{bmatrix}$$

y de valores propios $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4Det(A)}}{2}$; distingue los siguientes casos:

- (a) Los valores propios λ_1, λ_2 de $A(u^*, v^*)$ son reales y distintos, con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.
 - Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, entonces el punto crítico es un nodo asintóticamente estable.
 - Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, entonces el punto crítico es un nodo inestable.
 - Si $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$, entonces el punto crítico es un punto silla.
- (b) Los valores propios λ_1, λ_2 de $A(u^*, v^*)$ son complejos conjugados: $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$.
 - Si $\alpha < 0$, entonces el punto crítico es un foco asintóticamente estable.
 - Si $\alpha > 0$, entonces el punto crítico es inestable.
- (c) Los valores propios son reales e iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.
 - Si $\lambda < 0$, entonces el punto crítico es un nodo asintóticamente estable.
 - Si $\lambda > 0$, entonces el punto crítico es inestable.

Teorema 6.2. Si (u^*, v^*) es un punto crítico del sistema (6.1) en términos de la matriz Jacobiana $A(u^*, v^*)$, se tiene los siguientes casos:

1. Si $Det(A(u^*, v^*)) < 0$, el punto crítico es un punto silla (inestable).
2. Si $Det(A(u^*, v^*)) > 0$ y $Tr(A(u^*, v^*)) < 0$, el punto crítico es asintóticamente estable, un nodo si $\Delta(A(u^*, v^*)) \geq 0$ y un punto espiral si $\Delta(A(u^*, v^*)) < 0$.
3. Si $Det(A(u^*, v^*)) > 0$ y $Tr(A(u^*, v^*)) > 0$, el punto crítico es inestable, un nodo si $\Delta(A(u^*, v^*)) \geq 0$ y un punto espiral si $\Delta(A(u^*, v^*)) < 0$.

Del sistema (5.5) se tiene la matriz Jacobiana:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - 2u - \frac{Av^2}{(Bu + Av)^2} & \frac{-Bu^2}{(Bu + Av)^2} \\ \frac{Sv^2}{(u + C)^2} & S \left(1 - \frac{2v}{u + C}\right) \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

A continuación se realiza el análisis cualitativo de los puntos críticos obtenidos en la sección 5.

6.1. Análisis cualitativo del punto crítico (1, 0). La matriz jacobiana en este caso es:

$$J_1 = J(1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{B} \\ 0 & S \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

donde $\lambda_1 = -1 < 0$ y $\lambda_2 = S > 0$. Luego, por el Teorema (6.1) el punto crítico (1, 0) es un punto silla.

6.2. Análisis cualitativo del punto de equilibrio (0, C). La matriz jacobiana en este caso es:

$$J_2 = J(0, C) = \begin{bmatrix} \frac{A - 1}{A} & 0 \\ S & -S \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

donde $\lambda_1 = \frac{A - 1}{A}$ y $\lambda_2 = -S < 0$. Luego, por el Teorema (6.1), se tiene.

- a) Si $A > 1$, entonces el punto crítico (0, C) es un punto silla.
- b) Si $A < 1$, entonces el punto crítico (0, C) es un nodo asintóticamente estable.

6.3. Análisis cualitativo del punto crítico (0, B). La matriz jacobiana en este caso es:

$$J_3 = J(0, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & -S \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

donde, $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -S$. Resulta obvio que no hay solución según el Teorema (6.1).

Además,

- a) $Tr(J_3) = -S$.
- b) $Det(J_3) = 0$.
- c) $\Delta(J_3) = Tr(J_3)^2 - 4Det(J_3) = S^2$.

Luego, por el Teorema (6.2), no hay solución. Por lo tanto, no hay suficiente información para determinar la estabilidad del punto crítico (0, B).

6.4. Análisis cualitativo del punto de equilibrio (u₁, v₁). La matriz jacobiana en este caso es:

$$J_4 = J(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} \left(\frac{AC + 1 - \sqrt{M}}{A + B} - \frac{AW_1}{W_2}\right) & -\frac{BW_3}{W_2} \\ S & -S \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

donde.

- a) $W_1 = (A + B + AC + 2BC + \sqrt{M} - 1)^2 > 0$.
 b) $W_2 = (A + B)^2(A + B + \sqrt{M} + AC - 1)^2 > 0$.
 c) $W_3 = (A + B + \sqrt{M} - AC - 1)^2 > 0$.
 d) $Tr(J_4) = \frac{AC + 1 - \sqrt{M}}{A + B} - \frac{AW_1}{W_2} - S$.
 e) $Det(J_4) = \frac{S(AW_1 + BW_3)}{W_2} + \frac{S(\sqrt{M} - AC - 1)}{A + B}$.

Por lo tanto.

Lema 6.1. El punto crítico (u_1, v_1) es.

- i) Asintóticamente estable si $(\sqrt{M} - AC - 1) \geq 0$.
 ii) Punto silla si $\frac{4ABC^2}{(A + B + AC + \sqrt{M} - 1)^2} + \sqrt{M} - AC < 0$.

Demostración:

- i) Según el Teorema (6.2), el punto crítico (u_1, v_1) es asintóticamente estable cuando $Det(J_4) > 0$ y $Tr(J_4) < 0$.

$$Det(J_4) = \frac{\overbrace{S(AW_1 + BW_3)}^{>0}}{W_2} + \frac{\overbrace{S(\sqrt{M} - AC - 1)}^{\geq 0}}{A + B} > 0.$$

$$Tr(J_4) = \frac{1}{A + B} \left(\underbrace{\overbrace{(AC + 1 - \sqrt{M} - S(A + B))}^{\leq 0}}_{<0} - \underbrace{\frac{AW_1}{(A + B)(A + B + \sqrt{M} + AC - 1)^2}}_{>0} \right) < 0.$$

- ii) Según el Teorema (6.2), el punto crítico (u_1, v_1) es punto silla cuando $Det(J_4) < 0$.

$$Det(J_4) = \frac{S}{A + B} \left[\frac{AW_1 + BW_3}{(A + B)(A + B + \sqrt{M} + AC - 1)^2} - 1 + \sqrt{M} - AC \right].$$

$$Det(J_4) = \frac{S}{A + B} \left[\underbrace{\frac{4ABC^2}{(A + B + \sqrt{M} + AC - 1)^2} + \sqrt{M} - AC}_{<0} \right].$$

□

6.5. Análisis cualitativo del punto crítico (u_2, v_2) . La matriz jacobiana en este caso es:

$$J_5 = J(u_2, v_2) = \begin{bmatrix} \left(\frac{AC + 1 + \sqrt{M}}{A + B} - \frac{AP_1}{P_2} \right) & -\frac{BP_3}{P_2} \\ S & -S \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

donde.

- a) $P_1 = (A + B + AC + 2BC - \sqrt{M} - 1)^2 > 0$.
 b) $P_2 = (A + B)^2(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2 > 0$.
 c) $P_3 = (A + B - AC - \sqrt{M} - 1)^2 > 0$.
 d) $Tr(J_5) = \frac{AC + 1 + \sqrt{M}}{A + B} - \frac{AP_1}{P_2} - S$.

$$e) \text{Det}(J_5) = \frac{S(AP_1 + BP_3)}{P_2} - \frac{S(AC + 1 + \sqrt{M})}{A + B}.$$

Por lo tanto.

Lema 6.2. El punto crítico (u_2, v_2) es.

i) Asintóticamente estable si $(AC + 1 + \sqrt{M}) \leq 0$.

ii) Punto silla si $\frac{4ABC^2}{(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2} - \sqrt{M} - AC < 0$.

Demostración:

i) Según el Teorema (6.2), el punto crítico (u_2, v_2) es asintóticamente estable cuando $\text{Det}(J_5) > 0$ y $\text{Tr}(J_5) < 0$.

$$\text{Det}(J_5) = \frac{\overbrace{S(AP_1 + BP_3)}^{>0}}{P_2} - \frac{\overbrace{S(AC + 1 + \sqrt{M})}^{\leq 0}}{A + B} > 0.$$

$$\text{Tr}(J_5) = \frac{1}{A + B} \left(\underbrace{\overbrace{(AC + 1 + \sqrt{M} - S(A + B))}^{\leq 0}}_{<0} - \frac{AP_1}{\underbrace{(A + B)(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2}_{>0}} \right) < 0.$$

ii) Según el Teorema (6.2), el punto crítico (u_2, v_2) es punto silla cuando $\text{Det}(J_5) < 0$.

$$\text{Det}(J_5) = \frac{S}{A + B} \left[\frac{AP_1 + BP_3}{(A + B)(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2} - 1 - \sqrt{M} - AC \right].$$

$$\text{Det}(J_5) = \frac{S}{A + B} \left[\underbrace{\frac{4ABC^2}{(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2} - \sqrt{M} - AC}_{<0} \right].$$

□

Se presenta un resumen de todo el análisis de esta sección.

1. El punto crítico $(1, 0)$ se comporta como un punto silla.
2. El punto crítico $(0, C)$ se comporta como.
 - (a) Un punto silla si $A > 1$.
 - (b) Un nodo asintóticamente estable cuando $A < 1$.
3. El punto crítico $(0, B)$ con $A = 1$ y $B = C$ no presenta la suficiente información para determinar su estabilidad.
4. El punto crítico (u_1, v_1) con $M > 0$, $A > 1$ y $\frac{B}{C} > A$ se comporta como.
 - (a) Un nodo asintóticamente estable si $(\sqrt{M} - AC - 1) \geq 0$.
 - (b) Un punto silla si $\frac{4ABC^2}{(A + B + AC + \sqrt{M} - 1)^2} + \sqrt{M} - AC < 0$.
5. El punto crítico (u_2, v_2) con $M > 0$, $A > 1$ y $\frac{B - \sqrt{M}}{C} > A$ se comporta como.
 - (a) Un nodo asintóticamente estable cuando $(AC + 1 + \sqrt{M}) \leq 0$.
 - (b) Un punto silla si $\frac{4ABC^2}{(A + B + AC - \sqrt{M} - 1)^2} - \sqrt{M} - AC < 0$.

7. Simulaciones. En esta sección se mostrara gráficamente los diferentes casos obtenidos por el análisis cualitativo en la sección (6), haciendo uso del método numérico Runge-Kutta de orden cuatro, programado en Python. Específicamente, a los puntos críticos: $(0, C)$ y (u_1, v_1) se realiza dos simulaciones por cada caso de estabilidad o inestabilidad, excepto el punto crítico (u_2, v_2) , al cual solo se simula el caso de inestabilidad, ya que la condición de estabilidad no puede darse.

7.1. Simulaciones del punto crítico $(0, C)$. Se presenta simulaciones del punto crítico $(0, C)$, realizados mediante el método numérico Runge-Kutta de orden cuatro.

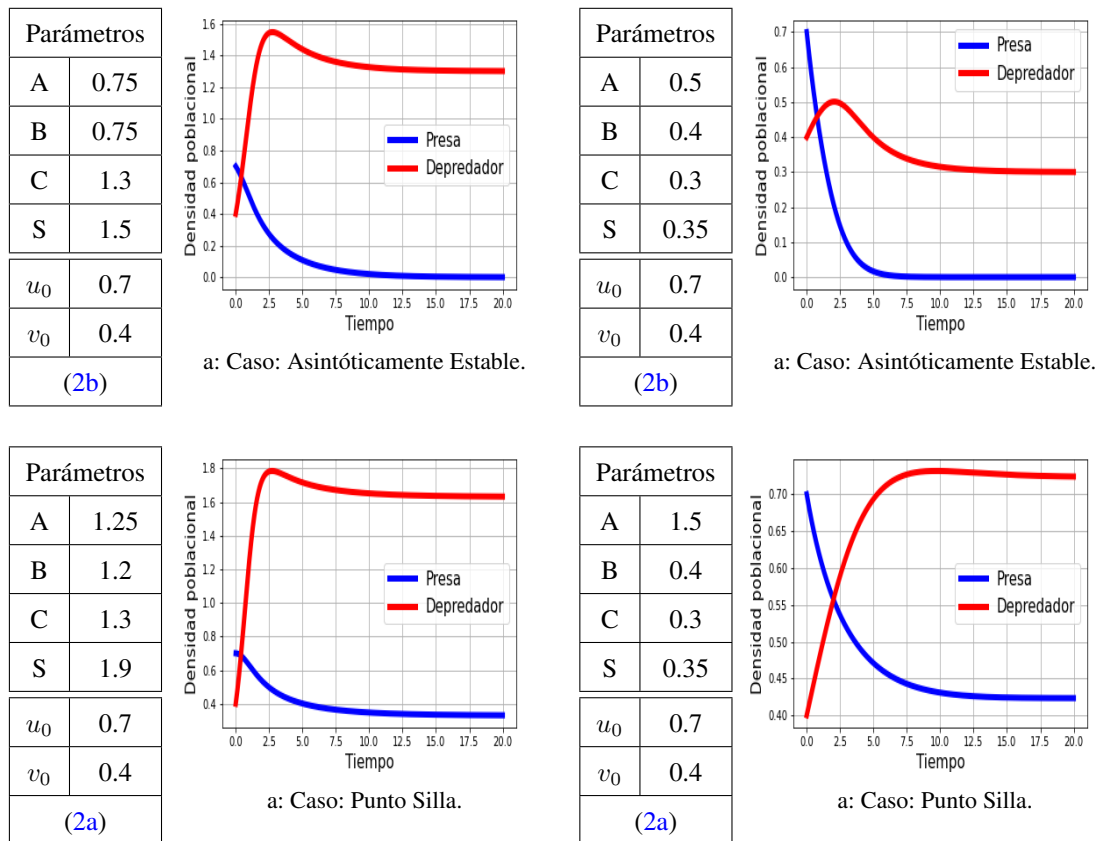


Figura 7.4: Simulaciones del punto critico $(0, C)$

- i) De las Figuras 7.1a y 7.3a, se visualiza que las densidad poblacional de la especie depredadora, crecen abruptamente hasta llegar a su máximo posible, para luego, gradualmente estabilizarse. Mientras que, las densidad poblacional de la especie presa decrecen, hasta la desaparición de la especie. Por lo tanto, la especie depredadora sobrevive, mientras que la especie presa se extingue.
- ii) De la Figura 7.2a, se observa que la población de la especie depredadora, crece en un corto periodo de tiempo y luego decrece hasta llegar a estabilizarse. Mientras que la densidad poblacional de la especie presa disminuye a medida que alcanza su mínimo poblacional. Por lo tanto, ambas especies sobreviven y coexisten, es decir, alcanzan el equilibrio ecológico.
- iii) De la Figura 7.4a, vemos que la densidad poblacional de la especie depredadora, crece rápidamente y luego se estabiliza. Mientras que la densidad poblacional de la especie presa, disminuye a medida que alcanza su mínimo poblacional. Por lo tanto, ambas especies sobreviven y coexisten, es decir, alcanzan el equilibrio ecológico.

7.2. Simulaciones del punto crítico (u_1, v_1) . Se presenta simulaciones del punto crítico (u_1, v_1) , realizados mediante el método numérico Runge-Kutta de orden cuatro.

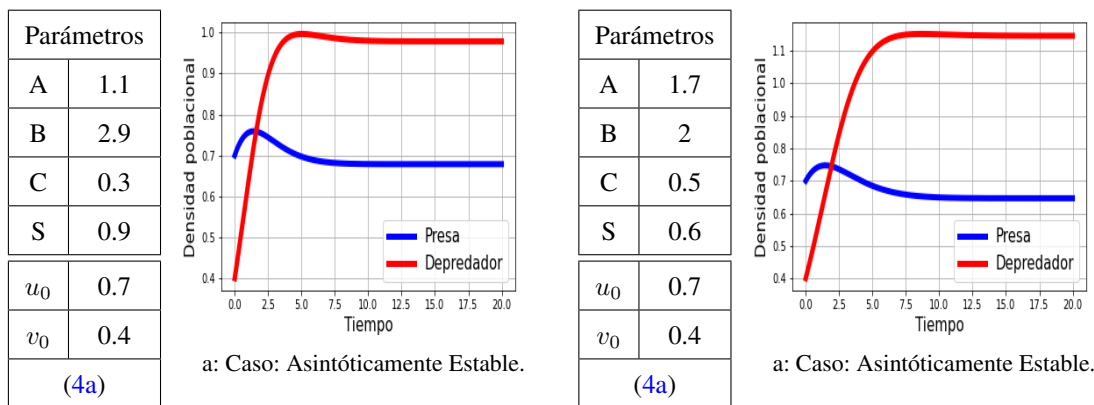


Figura 7.6: Simulaciones del punto critico (u_1, v_1)

i) De las Figuras 7.5a y 7.6a, se observa que la densidad poblacional de la especie depredador crecen abruptamente hasta llegar a un máximo posible, para luego, gradualmente estabilizarse. Mientras tanto, la densidad poblacional de la especie presa tienden a crecer en un corto periodo de tiempo, para luego, estabilizarse. Por lo tanto, ambas especies alcanzan el equilibrio ecológico, es decir, sobreviven con el paso del tiempo.

8. Conclusiones. De acuerdo a un cambio de variable, apropiado, el modelo depredador-presa tipo May-Holling-Tanner razón-dependiente con una fuente alternativa de alimento se transforma a un modelo simplificado, obteniendo así los puntos críticos para su respectivo análisis. De los cuales, dos puntos críticos están en la frontera de la región de análisis, siendo uno de ellos asintóticamente estable cuando $A < 1$, caso contrario es punto silla; mientras que el otro punto es inestable en cualquier caso. Por otro lado, se realizó un análisis cualitativo en los puntos críticos dentro de la región de análisis mediante una conjugación diferenciable dado por la matriz jacobiana asociada al sistema. Teniendo puntos críticos asintóticamente estables e inestables de acuerdo a las condiciones dado por los valores propios. Asimismo, de las simulaciones de acuerdo a diferentes escenarios, se concluye que el modelo estudiado en este trabajo presenta resultados de coexistencia y de extinción de alguno de las especies, ya sea presa o depredador. Cabe mencionar que las simulaciones se realizaron mediante el método de Runge-Kutta de orden cuatro, programado en Python. Finalmente, para una investigación futura se propone analizar el caso $A > 1$ en M ; así como también el análisis de una perturbación del modelo original mediante un retardo a la variable temporal.

ORCID and License

Marco Romero-Ordoñez <https://orcid.org/0000-0002-7383-4837>
 Jhelly Pérez-Núñez <https://orcid.org/0000-0003-0717-8277>
 Luis Vásquez-Serpa <https://orcid.org/0000-0002-5414-6764>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Arditi R, Ginzburg LR. Coupling in predator-prey dynamics:Ratio-Dependence. J. of theoretical biology. 1989; 139(3):311-326.
- [2] Arancibia-Ibarra C, Flores JD, Pettet G, Van Heijster P. A Holling–Tanner predator–prey model with strong Allee effect. Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2019; 29(11):1930032.
- [3] Arancibia-Ibarra C, González-Olivares E. The Holling-Tanner model considering an alternative food for predator. In Proceedings of the 2015 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2015 (Vol. 1, No. 2015, pp. 130-141).
- [4] Aziz-Alaoui MA, Okiye MD. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes. App. Math. Letters. 2003; 16(7):1069-75.
- [5] Brauer F, Castillo-Chavez C, Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemiology. New York: Springer; 2012.
- [6] Dumortier F, Llibre J, Artés JC. Qualitative theory of planar differential systems. Berlin: Springer; 2006.
- [7] Fernández-Arhex V, Corley JC. La respuesta funcional: una revisión y guía experimental. Ecología austral. 2004; 14(1):83-93.
- [8] Holling CS. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European Pine Sawfly1. The Canadian Entomologist. 1959; 91(5):293-320.
- [9] Liang Z, Pan H. Qualitative analysis of a ratio-dependent Holling–Tanner model. J. of Math. Analysis and Applications. 2007; 334(2):954-64.

- [10] Morales J, Gallardo JS, Vásques C, Rios Y. Respuesta funcional de *Telenomus remus* (Hymenoptera: Scelionidae) *Spodoptera frugiperda* (Lepidoptera: Noctuidae). *Bioagro*. 2001; 13(2):49-55.
- [11] González-Olivares E, Valenzuela-Figueroa S, Rojas-Palma A. Influencia del efecto Allee débil en las presas en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea. *Rev. de Matemática: Teoría y Aplicaciones*. 2022; 29(1):105-138.
- [12] Ruiz PC, Berrío LM, González E. Una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y alimento alternativo para los depredadores. *Selecciones Matemáticas*. 2019; 6(2):204-16.
- [13] Sáez E, González-Olivares E. Dynamics of a predator-prey model. *SIAM J. on Applied Mathematics*. 1999; 59(5):1867-78.
- [14] Saha T, Chakrabarti C. Dynamical analysis of a delayed ratio-dependet Holling-Tanner predator-prey model. *J. of Mathematical Analysis and Applications*. 2009; 358(2):389-402.
- [15] Tanner JT. The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations. *Ecology*. 1975; 56(4):855-67.