Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(1): 1-23.

Singular integral operators, a brief historical overview of its evolution

Operadores integrales singulares, un breve panorama histórico de su evolución

Alejandro Ortiz Fernández

Agradecimiento a: Alberto Torchinsky por su amistad y por sus contribuciones al análisis de Fourier

Received, May. 03, 2022 *Accepted, Jul. 05, 2022*

How to cite this article:
Ortiz A. *Operadores integrales singulares, un breve panorama histórico de su evolución.* Selecciones Matemáticas. 2022;9(1):1–23. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.01

Abstract
In this work we give an analytical-historical view of the classical theory of singular integrals introduced by A.P. Calderón-A. Zygmund. Emphasis is given to their applications to PDEs and to some projections of the theory.
Keywords . Operators, transforms, kernel, integral, Cauchy, weighs.

Resumen
En este escrito damos una visión analítica-histórica de la teoría clásica de las integrales singulares introducidas por A.P. Calderón-A. Zygmund. Se da énfasis a sus aplicaciones a las EDP y a algunas proyecciones de la teoría.
Palabras clave. Operadores, transformadas, núcleo, integral, Cauchy, pesos.

1. Aspectos Generales. En 1972 salió nuestra publicación "Operadores Integrales Singulares", [17] con el objetivo de difundir en nuestro país una teoría central en el análisis real-armónico y que tiene importantes aplicaciones en las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y en otras áreas. De aquel entonces a la actualidad se ha logrado poco en tal objetivo. Esta situación nos compromete en seguir difundiendo, en sus aspectos históricos, la teoría de las integrales singulares creada por los profesores Alberto P. Calderón y Antoni Zygmund en la universidad de Chicago. Por otro lado, en [18] hemos presentado algunos episodios de la evolución del análisis funcional, en particular de la teoría de operadores que actuan sobre ciertos espacios abstractos; recordemos que una ecuación diferencial es el resultado de aplicar un operador diferencial a cierta función por determinar; así mismo sabemos que las ecuaciones diferenciales, en particular parciales, surgen frecuentemente al estudiar el mundo físico; así fue desde la época de Newton hasta la actualidad. Como sabemos, la derivada es una razón de cambio en un entorno muy pequeño y así lo es un operador diferencial pero es inestable pues la función puede tener grandes cambios cuando el cambio de la variable independiente es muy pequeña; esta inestabilidad motivó la investigación de los operadores diferenciales donde remarcamos a los operadores lineales por su utilidad; ellos aparecieron cuando se estudiaron aspectos del mundo físico que condujeron a una matemática donde es cierto el principio de superposición (series de Fourier, por ejemplo).

También vimos en [18], a las ecuaciones integrales y a los operadores integrales asociados, los que son obtenidos al integrar expresiones que contienen funciones que se integran; en este tipo de operadores, los lineales también son muy importantes; así, históricamente son los operadores que vienen de la física. Veamos algunos argumentos. Sea $f(s,t)$ una función integrable en $\mathbb{R}^2$; sea el semi-espacio superior $z > 0$.

*Sección Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. (jortiz@pucp.edu.pe).

Se define el potencial newtoniano $U(x,y,z)$, con densidad $f(s,t)$, siendo la integral $\int \frac{f(s,t)}{d}\,ds\,dt$, donde $d^2=(x-s)^2+(y-t)^2+z^2$. Derivando parcialmente a U, obtenemos:

$$\begin{aligned} U_z(x,y,z) &= -z\int \tfrac{f(s,t)}{d^3}\,ds\,dt,\\ U_x(x,y,z) &= -\int \tfrac{x-s}{d^3}f(s,t)\,ds\,dt,\\ U_y(x,y,z) &= -\int \tfrac{y-t}{d^3}f(s,t)\,ds\,dt. \end{aligned}$$

Si $z\to 0$ en U_x obtenemos

$$U_x(x,y,0)=-\int \frac{x-s}{[(x-s)^2+(y-t)^2]^{\frac{3}{2}}}f(s,t)\,ds\,dt.$$

Esto sugiere considerar el núcleo $k(x,y)=\frac{-x}{(x^2+y)^{3/2}}$ y así podemos escribir U_x como una integral tipo convolución $\int k(x-s,y-t)f(s,t)\,ds\,dt$, integral que es similar a la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)\,dy \tag{1.1}$$

la cual es una clásica integral singular, donde el núcleo satisface adecuadas condiciones para garantizar su existencia y la función f está en cierto espacio de funciones. Este tipo de integrales surgieron en ecuaciones diferenciales al estudiar situaciones del mundo físico.

Otra situación que condujo a una integral singular fue la siguiente. Sea $u\in L^p(\mathbb{R}^1)$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^p\,dx<\infty,\quad 1<p<\infty,$$

y sea la función

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{t-z}dt,\quad z=x+iy,$$

definida en el semi-espacio superior $y=\text{Im}(z)>0$. Vía la desigualdad de Hölder se tiene que $((t-z)^{-1}\in L^{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$ $f(z)$ está bien definida. Por otro lado se verifica que $f(z)$ es una función analítica en $\text{Im}(z)>0$. También se observa que:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2}=\frac{iy}{(t-x)^2+y^2}-\frac{x-t}{(t-x)^2+y^2}.$$

Luego se tiene:

$$\frac{1}{\pi i(t-z)}=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}+i\frac{1}{\pi}\frac{x-t}{(t-x)^2+y^2}.$$

Ahora consideramos al llamado núcleo de Poisson y a su conjugado,

$P_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ y $\bar{P}_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$, para obtener $\frac{1}{\pi i(t-z)}=P_y(x-t)+i\bar{P}_y(x-t)$. Entonces se puede escribir:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_y(x-t)u(t)\,dt+i\int_{-\infty}^{\infty}\bar{P}_y(x-t)u(t)\,dt=U(x,y)+iV(x,y)\,.$$

$U(x,y)$ es llamado la integral de Poisson de u, $V(x,y)$ la integral conjugada de Poisson de u. U y V son funciones armónicas en $\text{Im}(z)>0$; desde que $u\in L^p$, $1<p<\infty$, se tiene también $U(x,y)=(P_y*u)(x)\to u(x)$ a.e. si $y\to 0^+$.

Luego podríamos interpretar como que la integral de Poisson $U(x,y)$ es la solución del problema de Dirichlet en $\text{Im}(z)>0$; con dado de contorno $u\in L^p$ en la frontera $y=0$. Por otro lado, se tiene también $V(x,y)=(\bar{P}_y*u)(x)=(P_y*\bar{u})(x)\to\bar{u}(x)$ a.e. si $y\to 0^+$, donde

$$\bar{u}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{u(t)}{x-t}\,dt\,.$$

Así surge $\bar{u}(x)$, la que es llamada la "transformada de Hilbert" de $u(x)$. Observamos que esta transformada es del mismo tipo que la integral (1.1); además, el núcleo $(x-t)^{-1}$ presenta singularidad en la diagonal $k=t$ y hace divergente a la integral $\int\frac{u(t)}{x-t}\,dt$. Históricamente, la teoría de las integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ fue iniciada con los trabajos pioneros, en la década de los años 1950's, de Alberto P. Calderón y Antoni Zygmund motivados por extender a la transformada de Hilbert, entre otros proyectos. Clásicamente, Calderón-Zygmund estudiaron a la integral (1.1) (1952).

2. Algunos antecedentes históricos. En [18], hemos tenido la oportunidad de narrar algunos progresos del análisis matemático, sobre todo en los siglos XIX y XX, en particular sobre el surgimiento del análisis funcional. En esta ruta destacamos el aporte de Fourier y el desarrollo del análisis al resolver diversas "lagunas" existentes en su teoría, actividad que perduró todo el siglo XIX, y aún parte del XX. El análisis de Fourier y las teorías del anális real y complejo son el escenario de la teoría que vamos a tratar, las integrales singulares, creada por Calderón-Zygmund.

En tal contexto, la transformada de Fourier es muy útil en este tipo de análisis. Si $f \in L^1(R^1)$, $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$, $\xi \in \mathbb{R}$, es su transformada de Fourier, la que es continua y se anula en el infinito. Este tipo de análisis fue impulsado por Zygmund al llegar a la Universidad de Chicago en 1947; desarrolló una brillante labor científica, formando excelentes nuevos investigadores en el análisis armónico. En 1949 Zygmund visita la Universidad de Buenos Aires para dictar un curso de series trigonométricas; ahí conoce a Calderón y en mérito a su potenciual matemático, Zygmund lo invita a Chicago para estudiar y trabajar bajo su dirección. En Chicago, Calderón inicia una brillante carrera científica y con su maestro Zygmund forman una sociedad que en poco tiempo ganó fama por la originalidad, profundidad y belleza de sus resultados... y por sus aplicaciones a áreas centrales de la matemática. Estamos iniciando la década de los años 1950's y esta sociedad está trabajando en un proyecto maravilloso.

Por otro lado, sabemos que en las primeras décadas del siglo pasado, ver [18], se realizaron progresos en el desarrollo del análisis moderno, en particular en el análisis armónico-real con aportes de Hilbert y su escuela, de Hardy-Littlewood, Paley, N. Wiener, de los hermanos Frigges y Marcel Riesz donde el primero fue un gran impulsor del análisis funcional y Marcel cultivó el análisis real-armónico. Por los años 20's y 30's A. Zygmund investiga fuertemente a las series trigonométricas, primero en Polonia, luego en Chicago. En este escenario deben haber surgido las motivaciones para investigar a la transformada de Hilbert en contextos más generales dada la importancia que tenía esta transformada; ella era uno de los más importantes operadores en el análisis; ella es continua en los espacios Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$, y también sobre algunos espacios de Sobolev y de Lipschitz, sobre los BMO,..., esto y más, fueron motivaciones para el surgimiento de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund.

3. La Transformada de Hilbert. En 1908, Plemelj enfrenta la siguiente cuestión: "Sea D un recipiente acotado en el plano complejo, simplemente conexo, cuya frontera ∂D es una curva regular; D_c es su complemento. Encontrar F y G analíticas en D y D_c respectivamente, con $G \to 0$ en el infinito tal que $F - G = u$ en ∂D donde u es una función de valor complejo dada". Plemelj al resolver este problema ilustra como surgen integrales singulares. Informalmente tenemos; sea la integral sobre ∂D, $\frac{1}{2\pi}\int \frac{\phi(s)}{s-z}\, ds$ donde ϕ es una función sobre ∂D, $z \in D$ (ó a D_c), la que se usa para definir la función analítica F en D y G analítica en D_c que tiende a cero en el infinito. Si $\phi \in \bigwedge_\alpha$ (I un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, f definida en I; si $w(\delta, f) = \sup|f(x_2 - f(x_1))|$, $x_1, x_2 \in I$, tales que $|x_2 - x_1| < \delta$, se define la clase de Lipschitz $\bigwedge_\alpha = \{f/w(\delta, f) \le c\delta^\alpha, \;\; 0 < \alpha \le 1\}$, c una constante) se considera

$$F(t) = \frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{\partial D} \frac{\phi(s)}{s-t}\, ds,$$

$$G(t) = -\frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{\partial D} \frac{\phi(s)}{s-t}\, ds.$$

Tomando $\phi = u$, Plemelj resuelve el problema.
Si D es el semi-plano (superior), el operador $(Hu)(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\partial D} \frac{u(t)}{t-x}\, dt$ se llama la "transformada de Hilbert" de $u(x)$.

¿En qué clase de funciones está bien definido el operador H? Privaloff, en 1916, verifica que H es continuo sobre la clase $\bigwedge_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. En 1928, M. Riesz prueba que H está bien definido en L^p, $1 < p < \infty$; en 1926 A. Besicovitch y en 1929 E. C. Titchmarsh introdujeron métodos de variable real en la investigación del operador H. Así mismo, F. G. Tricomi en 1925 y en 1928 hace el primer intento de generalizar a varias variables reales al operador H al considerar operadores de la forma

$$(Tu)(x) = \text{v.p.}\int h(x-y)u(y)dy, \tag{3.1}$$

sobre funciones de dos variables en el plano y donde $h(x)$ es una función homogénea de grado 2 ($h(\lambda x) = \lambda^2 h(x)$); además da un método para construir el operador S, del mismo tipo, tal que $S.T = I$. Por otro lado, H. Poincaré, en 1910, atacó el siguiente problema donde también surgen integrales singulares: "Encontrar una función armónica u en D (como antes) tal que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f$ en ∂D, donde ν es un campo de vectores transversal a ∂D y f es una función definida sobre ∂D" Esta cuestión es llamada "problema de la derivada oblicua". G. Giraud también investiga este problema al tratar de generalizar el método de tratar las integrales al caso $n > 2$. Así mismo, en 1934, considera, operadores integrales singulares sobre variedades regulares cerradas de dimensión arbitraria; establece que estos operadores son continuos en los espacios de Lipschitz; reduce las ecuaciones singulares a ecuaciones del tipo Fredholm, pero Giraud aún no encuentra condiciones simples para lograr la reducción.

En 1936 el matemático S.G. Mihlin dio un gran paso en tal dirección al asociar al operador T, definido por (3.1), la función $\Sigma_m \lambda_m a_m e^{im\theta}$, a la que llamó "símbolo", donde las λ_m son constantes y $\Sigma a_m e^{im\theta}$, es la serie de Fourier asociada a $h(e^{im\theta})$, que es la restricción del núcleo h a la circunferencia unitaria. El símbolo es denotado con $\sigma_T(x; cos\theta, sen\theta)$. Se observó que entre los operadores y sus símbolos existe una relación lineal y biunívoca y así Mihlin pudo resolver el problema de la inversión de los operadores del tipo T(3,1), así como también la reducción de ecuaciones integrales singulares a ecuaciones de tipo Fredholm. Dando un paso más, Giraud lleva esta idea al caso $\mathbb{R}^n$ usando para ello armónicos esféricos; calcula los coeficientes λ_m usando al símbolo cuya naturaleza aún conserva cierto misterio.

Veamos más de cerca a la transformada de Hilbert. Sean $u(x)$ y $h(x)$ dos funciones en $L^1(\mathbb{R})$ y sea la convolución $\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt$, absolutamente convergente para casi todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, si $h(x) = \frac{1}{x}$ se tiene $(Hu)(x) \equiv \bar{u}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{x-t}\,dt$, llamada la transformada de Hilbert (t.H.) de $u(x)$, la que existe en el sentido "valor principal"(v.p.), esto es,

$$\bar{u}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{u(t)}{x-t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t}\,dt\,.$$

.

En 1927, M. Riesz probó que la t.H. es continua en L^p, $1 < p < \infty$. Si $u \in \bigwedge_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, se tiene la existencia de $\bar{u}$. Veamos algunos aspectos de la teoría $L^2(\mathbb{R})$ y $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Sea $\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t}dt$ y $u \in L^p$; se observa que $\bar{u}_\varepsilon$ existe pues $\frac{1}{x} \in L^q(\mathbb{R})$ fuera de la bola de radio ε, $1 < q$, y por la desigualdad de Hölder. Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ y $0 < \varepsilon < w < \infty$, y tomamos $\bar{u}_{\varepsilon,w}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x-t|<w} \frac{u(t)}{x-t}\,dt$, se tiene el resultado:

(i) $\|\bar{u}_{\varepsilon,w}\|_2 \leq c\|u\|_2$, $c > 0$ es una constante.
(ii) Existe una función $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|\bar{u}_{\varepsilon,w} - \bar{u}\|_2 \to 0$, si $\varepsilon \to 0$.
(iii) $\|\bar{u}\|_2 = \|u\|_2$.
(iv) $\bar{\bar{u}} = -u$.
(v) $\bar{u}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{u}_\varepsilon(x)$ puntualmente c.t.p.

Se observa que $\bar{u}$ es la t.H.H. de u y que $H^2 = -I$, I operador identidad. Además, se tiene $H^{-1} = -H$ y se logra la fórmula de inversión $u(x) = \text{v.p.}\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}(t)}{x-t}\,dt$.

Entre otras interesantes propiedades la t.H. es una isometría para $L^2(\mathbb{R})$; se verifica que $\hat{\bar{u}}(x) = (-i\,\text{sgn}\,x)\hat{u}(x)$, donde $\hat{u}$ es la transformada de Fourier u y $\text{sgn}\,x$ es la función signo de x. El símbolo del operador H es definido vía: $\sigma(H) := -i\,\text{sgn}\,x$. Luego se tiene la representación $H = F^{-1}\sigma(H)F$, donde $Fu = \hat{u}$. Desde que $|\sigma(H)| = 1$, se tiene la isometría $\|\bar{u}\|_2 = \|u\|_2$; también se tiene $\sigma(H^2) = -1$, luego $\bar{\bar{u}} = -u$. Recordamos que

$$\text{sgn}\,x = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

Además, se verifica que H es un operador unitario en L^2, esto es, $H^* = H^{-1}$ donde H^* es el operador adjunto de H.

3.1. La teoría $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, de H. . El resultado principal, debido a M. Riesz, dice que la t.H.H es un operador acotado en L^p, $1 < p < \infty$, esto es, H es un operador continuo. Veamos: "Sea $u \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ y $\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\varepsilon} \frac{u(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t}\,dt$, la t. H. de u truncada, entonces se tiene:

(i) $\|\bar{u}_\varepsilon\|_p \leq C_p\|u\|_p$;
(ii) Existe $\bar{u} \in L^p$ tal que $\|\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}\|_p \to 0$, si $\varepsilon \to 0$;
(iii) $\|\bar{u}\|_p \leq C_p\|u\|_p$ donde $\bar{u}$ es la t.H. de u."

Nota 3.1. *En la prueba de este teorema Riesz usó argumentos del análisis real y contiene métodos que posiblemente motivaron las nuevas estrategias a ser usadas en la extensión de la teoría a $\mathbb{R}^n$. Así mismo, al igual que en $L^2(\mathbb{R})$, si $u \in L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$, entonces $\bar{\bar{u}} = -u$. Además, si $u \in L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$, y $v \in L^q(\mathbb{R})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene*

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}\bar{v}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} uv\,dx$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} v\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u \bar{v}\, dx$.

Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, ¿Cómo es $\bar{u}$?... Previamente veamos algunos argumentos. En la teoría L^2, que es un espacio de Hilbert, el estudio se hace con recursos del análisis funcional (transformada de Fourier, convoluciones, teorema de Pancherel,...) y la extensión a $\mathbb{R}^n$ es, de algún modo, natural. Por otro lado, en la teoría $L^p, 1 < p < \infty$, los recursos son las funciones analíticas de una variable compleja y de las funciones armónicas, y así la teoría no es factible extenderse al caso $n > 1$ como en el caso L^2 pues se necesitan nuevos métodos, nuevas ideas y esto se haría a partir de los años 1950's. Como sabemos el operador $H : L^p \to L^p, 1 < p < \infty$, es acotado, es decir, es un operador de tipo (p,p). En contraste, el operador H no preserva a la clase $L^1(\mathbb{R})$; sin embargo, se tiene que H es de tipo-débil (1,1) en el sentido que precisaremos. En efecto, veamos algunas ideas de la teoría L^1.

Diremos que un operador $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}, 1 \leq p, q < \infty)$, es de tipo fuerte (p, q) si existe una constante $C_{p,q} \equiv C$ tal que $\|Tu\|_q \leq C\|u\|_p$; así T es un operador continuo o acotado, con norma $\|T\| \leq C$. Por otro lado, sea la función distribución de T definida vía $W_T(\lambda) = |\{x \,/\, |Tu(x)| > \lambda\}|$, donde $|A|$ es la medida de Lebesgue de A y λ un número real mayor a cero, se verifica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Tu(x)|^q dx \geq \int_{E_{T,\lambda}} |Tu(x)|^q dx \geq \lambda^q W_T(\lambda),$$

donde $E_{T,\lambda} = \{x \in \mathbb{R}/|Tu(x)| > \lambda\}$. Luego, $W_T(\lambda) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\|Tu\|_q\right)^q$, que es la desigualdad de Tchebyshev. De esta manera, "si T es de tipo fuerte (p, q), entonces $W_T(\lambda) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|u\|_p\right)^q, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty$". Esto motiva la **definición**: "$T : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ es un operador de tipo débil $(p, q), 1 \leq q < \infty, 1 \leq q < \infty$, si existe una constante C tal que $W_T(\lambda) \leq \left(\frac{c}{\lambda}\|u\|_p\right)^q$, para todo real $\lambda > 0$". La mínima constante C es llamada la (p, q)-norma débil de T.

Se observa que si T es de tipo fuerte (p, q), entonces T es de tipo débil (p, q). El recíproco no es cierto; contraejemplo, la transformada de Hilbert. Es decir, la t.H.H. es de tipo débil $(1, 1)$ pues $\exists C > 0$ tal que

$$W_{Hu}(\lambda) \leq \frac{C}{\lambda}\|u\|_1, \quad \forall\lambda > 0. \tag{3.2}$$

Ahora, supongamos que $u_n \to u$ en $L^1(\mathbb{R})$, entonces:

$$|\{x \,/\, |Hu_n(x) - Hu(x)| > \varepsilon\}| \leq \frac{C}{\varepsilon}\|u_n - u\|_1 \to 0,$$

luego Hu_n converge en medida a Hu.

Terminamos esta sección enunciando un resultado general. Previamente precisamos la idea de variación acotada (v.a.). Sea $u(x)$ una función de valor real, definida y finita en $[a, b]$; sea $\Gamma = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ una partición de $[a, b]$. A cada partición Γ se le asocia la suma $S_\Gamma = S_\Gamma(u; a, b) = \Sigma_{i=1}^m |u(x_i) - u(x_{i-1})$. $V \equiv V[u; a, b] = \sup S_\Gamma$ es llamada la variación de u sobre $[a, b]$. Desde que $0 \leq S_\Gamma <^+ \infty$, tendremos $0 \leq V \leq^+ \infty$. Diremos que u es de v.a. sobre $[a, b]$ si $V <^+ \infty$.

El resultado mencionado es: "Sea F una función de v.a. sobre $\mathbb{R}$ (esto es, sobre $\forall[a, b] \subset \mathbb{R}$) y sea V su variación total, entonces, la función $g(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(t)}{x-t}$ existe c.t.p. Además, si $W_g(\lambda)$ es la función distribución de g, entonces

$$W_g(\lambda) \leq \frac{C}{\lambda} V \text{''} \tag{3.3}$$

(3.3) $\to$ (3.2). En efecto, sea $u \in L^1(\mathbb{R})$ y $F(t) = \int_0^t u(s)\, ds$, luego $dF(t) = u(t)\, dt$ c.t.p., $F(t)$ es una función de v.a. en $\mathbb{R}$ y su total variación es $V = \int_{-\infty}^{\infty} |u(s)|\, ds = \|u\|_1$; además, $W_g(\lambda) = W_{Hu}(\lambda)$. [Para mayores detalles de esta última parte, y otros aspectos de la t. H., ver [16], cap III,en donde se indica que el resultado (3.3) fue probado por Loomis en 1946].

4. Clásicas Integrales Singulares. Veamos un panorama de algunos aspectos clásicos de las integrales singulares según investigaciones de la EScuela de Calderón-Zygmund; la idea fue construir la teoría $\mathbb{R}^n$ de la transformada de Hilbert. El trabajo de partida fue la famosa contribución [6], de 1952, trabajo que abrió nuevos horizontes que habrían de conducir a profundos resultados, aplicaciones y muchas nuevas e importantes investigaciones en el área del análisis armónico. Además, se descubrió la conexión entre los operadores integrales singulares con los operadores diferenciales parciales, lo que abrió un nuevo y profundo dominio por investigar; se crearon nuevas teorías. Veamos algunos argumentos matemáticos.

Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ y $t \in \mathbb{R}^n$; $|x| = (x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Sea $h(x)$ una función homogénea de grado cero en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_\Sigma h(x) d\sigma = 0$, donde Σ es la esfera $|x| = 1$ y σ es su elemento de área (Recordamos que una función $u(x)$ es homogénea de grado α si para $\forall\lambda > 0$ real se tiene $u(\lambda x) = \lambda^\alpha u(x)$). Ahora, sea la transformada funcional

$$\bar{u}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{h(x-t)}{|x-t|^n} u(t)\,dt, \tag{4.1}$$

donde dt es el elemento del volumen en $\mathbb{R}^n$. Observemos que si $n = 1$ y $h(x) = \operatorname{sgn} x$ se obtiene la t.H. de $u(x)$.
Calderón-Zygmund estudian la existencia de $\bar{u}$; para ello además de la condición sobre $h(x)$, se asumen que

(a) $h(x)$ es continua para $x \neq 0$ y satisfaga una condición de Lipschitz, de orden positivo; o que

(b) $h_i(x) = \frac{1}{2}(h(x) - h(-x))$ y $|u_\rho(x)|log|h_\rho(x)|$ sean funciones absolutamente integrables sobre Σ, donde $h_\rho(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x))$.

Entonces se verifica que:

(i) Si tenemos (a) *entonces* $\bar{u}$, definida por (4.1), existe en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$ si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si tenemos (b) y $u \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, *entonces* $\bar{u}$ existe en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$.

(iii) Si tenemos (a) y $|u|\log(1 + |u|)$ es integrable, *entonces* $\bar{u}$ es localmente integrable.

(iv) Si se tiene (a), u acotada y nula fuera de un compacto, *entonces* $exp\lambda|\bar{u}|$ es localmente integrable si $\lambda > 0$ es suficientemente pequeño.

(v) Si tenemos (b) y $u \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, *entonces* $\bar{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|\bar{u}\|_p \leq C_p\|u\|_p$, $C_p = C_p(h, p)$.

(vi) Sea $\bar{u}_\varepsilon(x) = \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{h(x-t)}{|x-t|^n} u(t)dt$ y $\hat{u}(x) = \sup_\varepsilon |\bar{u}_\varepsilon(x)|$. Si tenemos (b) y $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, *entonces* $\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|\hat{u}\|_p \leq C_p\|u\|_p$.

(vii) Si se tiene (b), $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, *entonces* $\lim_{\varepsilon\to} u_\varepsilon - u\|_p = 0$.

Para los detalles y pruebas de los teoremas (i)-(vii) ver [6], trabajo fundamental que fue el punto de partida de la teoría de Calderón-Zygmund (1952), en donde se introdujeron nuevas y novedosas técnicas e ideas; muchas de ellas, profundas!

De esta manera está garantizada la existencia puntual de la integral singular $\tilde{u}(x)$, dada por (4.1); además ella es continua sobre los espacios de Lebuesgue L^p, $1 < p < \infty$; también lo es el operador maximal $\hat{u}(x)$. Calderón-Zygmund extienden algunos clásicos resultados, como es el lema de F. Riesz y obtienen también estimativas para conjuntos de la forma $\{x/|u_i(x)| > y\}$ y prueban (ii), (v) y (vii). También, los autores introducen métodos basados en la teoría $\mathbb{R}^1$ las que son usados para establecer estimativas para el caso h par y h impar bajo la hipótesis (b).

En el citado trabajo también se investiga la composición de operadores integrales singulares del tipo (4.1), escritos en la forma $\tilde{u} = L_h(u)$ donde h es el núcleo que aparece en la integral y ellos consideram operadores de la forma $\lambda I + L_h$, I es el operador identidad, λ es una constante; h satisface $\int_\Sigma |h(x)|^q d\sigma < \infty$, $1 < q$ fijo. Por la condición (a) tales operadores son continuos en $L^p, 1 < p < \infty$; además de formar un espacio vectorial, forman una álgebra (esto es, el producto de dos tales operadores es del mismo tipo). Ellos son un espacio de Banach y una álgebra conmutativa, completa y semi-simple con la norma $\|\lambda I + L_h\| = |\lambda| + (\int_\Sigma |h(X)|^q d\sigma)^{\frac{1}{q}}, q > 1$ fijo. ASí mismo Calderón - Zygmund investigan las integrales singulares iteradas. Veamos la idea; sea $u(x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, una función definida sobre $\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^m$, $h_1 y h_2$ tiene propiedades similares a h anterior. Sea el operador integral

$$\tilde{u}(x, y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\substack{|x-t|>\varepsilon\\ |y-s|>\varepsilon}} h_1(x-t)h_2(y-s)\frac{1}{|x-t|^n}\frac{1}{|y-s|^m}u(x, y)\,dt\,ds\ ;$$

este operador generaliza al operador (4.1).

5. Convergencia L^p, $1 < p < \infty$, y puntual de integrales singulares. En la primera parte del artículo de 1952, Calderón-Zygmund investigan la convergencia L^p de integrales singulares. Sean P y Q puntos en $\mathbb{R}^n$ (respetamos la notación usada por C-Z) y se consideran núcleos de la forma

$$k(P - Q) = \frac{1}{|P-Q|^n}\Omega\left(\frac{P-Q}{|P-Q|}\right),$$

donde $|P - Q|$ es la longitud de $(P - Q)$ y $\Omega(P)$ es una función definida sobre Σ, superficie de la esfera unitaria con centro en el origen, que satisface las condiciones:

$$\begin{cases} \int_\Sigma \Omega(P)d\sigma = 0 \\ |\Omega(P) - \Omega(Q)| \leq w(|P-Q|)\,, \end{cases}$$

donde $w(t)$ es una función creciente tal que $w(t) \geq t$ y

$$\int_0^1 w(t)\frac{dt}{t} = \int_1^\infty w(\frac{1}{t})t\,dt < \infty.$$

En particular, el caso $w(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, es de especial interés. Ahora, sea $f(Q) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, y el núcleo

$$K_\lambda(P-Q) = \begin{cases} k(P-Q) & \ldots \quad |P-Q| \geq \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \ldots \quad |P-Q| < \frac{1}{\lambda} \end{cases} ;$$

entonces Calderón-Zygmund investigan la convergencia de la integral

$$\tilde{f}_\lambda(p) = \int_{m^n} K_\lambda(P-Q)f(Q)dQ, \tag{5.1}$$

donde dQ es el elemento de volumen de $\mathbb{R}^n$.

Se observó que via las apropiadas (Hölder) hipótesis la integral $\tilde{f}_\lambda(P)$ es absolutamente convergente para $1 < p < \infty$; además, C-Z probaron que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $\tilde{f}_\lambda(P)$ converge en la media de orden 2 cuando $\lambda \to \infty$ (esto es, en la norma L^2).

En 1932 F.Riesz probó un famoso lema, muy útil em el análisis real-funcional. En el citado trabajo de 1952, los profesores Calderón-Zygmund probaron un lema de descomposición , el que está contenido en el de Riesz. Presentamos la versión dada por Zygmund ("Trigonometric Series" Dover. 1955. Pag.22).

Lema 1 ((C-Z)). *Sea $f(x)$ una función integrable en un cubo $I \subset \mathbb{R}^n$ e $y > 0$ un real suficientemente grande. Entonces existe una sucesión de cubos $I_1, I_2, \ldots$ contenidos en I, sin puntos interiores en común uno a otro y tales que*

$$y < \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} |f(x)|\,dx \leq 2^n y, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

Además, si $Q = U_k I_k, P = I - Q$, entonces $|f(x)| \leq y$ c.t.p. en P.

Demostración: Sea $y > 0$ tal que

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|dx \leq y\ .$$

La idea es descomponer I en 2^n cubos iguales (ver el caso $n = 2$) y colocar aparte aquellos cubos (I_1) sobre los cuales tenemos

$$\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1} |f(x)|dx > y.$$

Cada uno de los cubos restantes; donde el promedio es $\leq y$, es subdividido en 2^n partes iguales y colocamos aparte aquellos cubos (I_2) sobre los cuales tenemos

$$\frac{1}{|I_2|}\int_{I_2} |f(x)|dx > y.$$

Cada cubo restante se subdivide a su vez en 2^n cubos iguales y proceedemos como antes y así sucesivamente... Sea $I_1, I_2, I_3, \ldots$ la sucesión de todos los cubos que fueron apartados en el proceso. Vemos que cada I_k está contenido en I, que no tienen puntos interiores en común mutuamente y que se tiene

$$y < \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} |f(x)|dx.$$

Por otro lado, se observa que I_k tiene un cubo "padre" $\tilde{I}_k$ de donde proviene. Así tenemos

$$\int_{I_k} |f(x)|dx \leq \int_{\tilde{I}_k} |f(x)|dx \leq y|\tilde{I}_k| = 2^n y|I_k|,$$

de donde se obtiene (5.2).

Además, sea $x \in P$; entonces $x \in I_j$ para algún j tal que $|I_j| \to 0$ si $j \to \infty$. Por otro lado, $\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f(x)|dx \leq y$; entonces por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene:

$$|f(x)| = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(z)|dz \le y, \text{ c.t.p. } P$$

□

En el trabajo de 1952, [6], se considera a la función $\beta_f(x)$ la que posteriormente fue denotada $f^{**}(x)$ y llamada la función promediada. Por su importancia veamos algunos argumentos. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio-medida, el espacio de Banach $B = \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible; para todo real $\lambda > 0$ sea el conjunto $E_{\lambda,f} \equiv E_\lambda = \{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}$ un conjunto medible.

Por definición, la función distribución de f es:

$$\begin{aligned} w_f \;:\; \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \lambda &\longmapsto w_f(\lambda) = \mu(E_{\lambda,f}), \end{aligned}$$

w_f es una función no creciente de λ pues si $\lambda_1 \ge \lambda_2$ se tiene $E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_2}$; μ es positiva. Se tiene la desigualdad de Chebyshev: Para todo $f \in L^p(X)$, $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$ se tiene $w_f(\lambda) \le \frac{1}{\lambda^p} \int_{E_\lambda} |f(x)|^p \, d\mu$, pues $\int_{E_\lambda} |f(x)|^p \, d\mu \ge \lambda^p \mu(E_\lambda) = \lambda^p w_f(\lambda)$.

Luego, $\lambda^p w_f(\lambda) \le \|f\|_p{}^p, 1 \le p < \infty$. De esta manera $w_f(\lambda)$ es finito y aplicando la desigualdad de Chebyshev se verifica $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^p w_f(\lambda) = 0$. Se tiene también $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^p w_f(\lambda) = 0$.

Por otro lado, si $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable tal que $g(0) = 0$, entonces:

$$\int_X g(|f(x) - C|) d\mu = \int_0^\infty w_f(\lambda) dg(\lambda),$$

donde C es constante y f es definida sobre X.

Se observa que si $g(t) = t$ y $c = 0$ se tiene $\int_X |f(x)| d\mu = \int_0^\infty w_f(\lambda) d\lambda$; y si $g(t) = t^p, 1 \le p < \infty, c = 0$ se obtiene

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty w_f(\lambda) d\lambda^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} w_f(\lambda) d\lambda,$$

una interesante representación de $\|f\|_p$. Ahora definamos a la función reordenada (no-creciente) f^*. Sea f una función medible sobre (X, μ). [Remarcamos que en un espacio medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, X es un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$algebra en X; los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados conjuntos medibles. Si $(X, \mathcal{A})$ y $(X, \mathcal{B})$ son dos espacios medibles, $f : X \to Y$ es una función medible si para todo $Y \in \mathcal{B}$ se tiene $f^{-1}(Y) \in A$. $\mu : A \to [0, \infty]$ es una medida positiva]. La función f^* es definida vía:

$$\begin{aligned} f^* \;:\; \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto f^*(t) = \inf \{\lambda \mid w_f(\lambda) \le t\} \,. \end{aligned}$$

Se verifica que f y f^* son equimedibles, esto es, se tiene que $w_f = w_{f^*}$; si $f \in L^p$, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ [pues, $\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} w_f \, d\lambda = \int_0^\infty |f^*|^p \, d\mu = \|f^*\|_p^p$]. De esta manera se tiene la representación

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

la que es usada (por ejemplo) para definir a los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathcal{A}, \mu), 0 < p < \infty, 0 < q < \infty$, como la clase de las funciones $\mu-$medibles f tales que:

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty; \text{ si } q = \infty, \; \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty \,.$$

Estos espacios fueron introducidos por G.G. Lorentz en 1950 y están relacionados con la teoría de interpolación, área donde Calderón publicó su notable trabajo [2], en donde considera a la función promediada f^{**} asociada a la función $\mu-$medible f definida vía: Si $t \in (0, \infty)$, $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds$.

Continuemos con el trabajo de Calderón- Zygmund de 1952 [6]. Ellos prueban los siguientes resultados, entre otros.

Teorema 5.1. *"Sea $f \geq 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Pongamos $E_y = \{P \,/\, |\tilde{f}_\lambda(P)| > y\}$ donde, como sabemos, $\tilde{f}_\lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(P-Q)f(Q)\,dQ$. Entonces,*

$$|E_y| \leq \frac{c_1}{y^2}\int_{\mathbb{R}^n}[f(P)]_y^2\,dP + c_2 f^{**}(y)\,,$$

donde

$$[f(P)]_y = \begin{cases} f(P) & f(P) \leq y \\ y & f(P) > y \end{cases},$$

c_1 y c_2 son constantes independientes de λ". (Para la prueba ver [6], pag.93).

Teorema 5.2. *"Sea $f(P) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Entonces $\tilde{f}_\lambda(P) \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(P-Q)f(Q)\,dQ$ pertenece también a $L^p(\mathbb{R}^n)$ y se tiene*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\tilde{f}_\lambda(P)|^p\,dP\right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(P)|^p\,dP\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde A_p es independiente de λ y p". Así el operador integral singular $\tilde{f}_\lambda$ es continua en el espacio L^p, $1 < p < \infty$.

Teorema 5.3. *"Sea $f(P)$ una función tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(P)|(1+\log^+|f(P)|)\,dP < \infty,$$

entonces $\tilde{f}_\lambda$ es integrable sobre cualquier conjunto S, $|S| < \infty$, y se tiene

$$\int_S|\tilde{f}_\lambda(P)|\,dP \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(P)|\,dP + c\int_{\mathbb{R}^n}|f(P)|\log^+(|S|^{\frac{n+1}{n}}|f(P)|)\,dP + c|S|^{-\frac{1}{n}},$$

donde c es una constante independiente de S y λ".

Observación 1. *Remarcamos que*

$$\log^+|f| = \begin{cases} \log|f| & |f| \geq 1 \\ 0 & |f| < 1 \end{cases}.$$

Teorema 5.4. *"Sea f integrable em $\mathbb{R}^n$. Si S es un conjunto de medida finita, entonces*

$$\int_S|\tilde{f}_\lambda(P)|^{1-\varepsilon}\,dP \leq \frac{c}{\varepsilon}|S|^\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(P)|\,dP\right)^{1-\varepsilon},$$

donde c es una constante independiente de ε, S, λ y f."

Este resultado implica el siguiente teorema (ver [6]).

Teorema 5.5. *"Sea $u(P)$ una distribución de masa, que es una función completamente aditiva de conjunto de Borel en $\mathbb{R}^n$ y se supone que la variación total V de μ es finita. Entonces si*

$$\tilde{f}_\lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(P-Q)\,d\mu(Q)\,,$$

sobre todo conjunto S de medida finita, se tiene

$$\int_S|\tilde{f}_\lambda(P)|^{1-\varepsilon}\,dP \leq \frac{c}{\varepsilon}|S|^\varepsilon V^{1-\varepsilon}.$$

Nota 5.1. *Calderón-Zygmund, [6]), probaron otros resultados que son especiales y técnicos, todos ellos relacionado a la convergencia de integrales singulares en L^p.*

Veamos ahora la convergencia puntual de integrales singulares, capítulo II de [6], lo que es un complejo problema. Si $f \in L^p, p > 1$ Calderón-Zygmund prueban que tales integrales convergen casi en todo punto (c.t.p.) y que ellas son dominadas por una función en L^p; además verifican que el límite puntual existe c.t.p. aún sí la función $f(P)$ es reemplazada por una función completamente aditiva de conjuntos de Borel, con variación total finita. Este capítulo contiene tres lemas y dos teoremas.Veamos los teoremas:

Teorema 5.6.
(a) "Sea $f \in L^p$, $1 < p < \infty$; si

$$\tilde{f}_\lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(P-Q) f(Q)\, dQ$$

se tiene $\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{f}_\lambda(P) = \tilde{f}(P)$ *c.t.p. Además,* $\sup_\lambda |\tilde{f}_\lambda(P)| \in L^p$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_\lambda |\tilde{f}_\lambda(P)|^p\, dP \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(P)|^p\, dP$$

donde c es una constante que depende solo de p y del núcleo K_λ."

(b) Sea $\mu(P)$ una distribución de masa, la que es una función completamente aditiva sobre conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que la variación total V de $\mu(P)$ es finita en $\mathbb{R}^n$. Entonces la integral

$$\tilde{f}_\lambda(P) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(P-Q)\, d\mu(Q),$$

posee límite c.t.p. a $\tilde{f}$ cuando $\lambda \to \infty$, y sobre todo conjunto S de medida finita se tiene

$$\int_S |\tilde{f}|^{1-\varepsilon}\, dP \leq \frac{c}{\varepsilon}|S|^\varepsilon V^{1-\varepsilon}.$$

Nota 5.2. *El lector interesado en la prueba de estos resultados debe consultar [6], donde encontrará mayores detalles sobre este, y otros, tema.*

El famoso trabajo [6], termina con un capítulo (3) donde investigan problemas de existencia de la primera derivada del potencial newtoniano de una camada simple, así como de la segunda derivada del potencial logarítmico. En la investigación de estos problemas, y otros más generales, Calderón-Zygmund usan los resultados obtenidos sobre las integrales singulares.

6. Un pequeño paseo a partir de 1952. Vamos a dar ua breve visión de esta importante área del análisis armónico, que tiene aplicaciones en las ecuaciones en derivadas parciales, entre otras áreas. A partir del trabajo de 1952 se produjo un gran interés por los operadores integrales singulares lo cual produjo un gran progreso en la matemática . El aporte de nuevas generaciones de analistas armónicos fue amplio y contribuyó a que la Escuela Calderón-Zygmund tuviera la difusión a nivel internacional y se reconociera el profundo trabajo de los mencionados profesores . Comencemos nuestro paseo.

6.1. 1954. Calderón-Zygmund extienden a funciones periódicas algunos resultados sobre integrales singulares válidas para funciones no periodicas. El lector interesado de este tema debe consultar [7], donde también se desarrollan otras cuestiones sobre el análisis de Fourier. Por otro lado, alrededor de aquel año, M. Cotlar había investigado a la transformada de Hilbert y algunos de sus resultados fueron usados por Calderón-Zygmund en el citado trabajo. Así mismo, J. Marcinkiewicz en 1938 contribuyó con trabajos sobre multiplicadores de series de Fourier múltiples y M. Riesz, en 1927, sobre las funciones conjugadas y en general, en los años 1920's , 30's y 40's hubieron avances en el análisis armónico que dieron el ambiente adecuado para el trabajo de Calderón-Zygmund de 1952.

6.2. 1956(a). En [8], Calderón-Zygmund dan una nueva presentación de las integrales singulares de 1952 vía el "método de rotaciones" el cual es aplicado a los núcleos $k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, que son asumidos sin regularidad sobre $\Omega(x)$. Así, vía este método el caso n-dimensional se reduce al caso 1-dimensional y se aplica un clásico resultado de M. Riesz. Veamos: sobre $\Omega(x)$ se asume que es una función impar sobre S^{n-1} tal que $\int_{S^{n-1}} |\Omega(r)|\, d\sigma(r) < \infty$, o que $\Omega(x)$ es una función par tal que $\int_{S^{n-1}} |\Omega(r)|\, d\sigma(r) = 0$

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(r)| \log^+ |\Omega(r)| d\sigma(r) < \infty\ ,$$

donde $d\sigma$ es la medida de superficie normalizada sobre la bola unitaria S^{n-1} y $\log^+(t) = \text{máx}(\log t, 1)$. Ver el citado trabajo de Calderón-Zygmund en donde usando el método de rotaciones se prueba que la respectiva integral singular usando tal $\Omega(x)$ es acotada sobre el espacio $L^p, 1 < p < \infty$. Remarcamos que la idea general es considerar los casos Ω impar y par en donde se introdujeron nuevas ideas y métodos; se estudiaron integrales singulares sobre curvas, como investigar la transformada de Hilbert sobre una parábola.

En el citado trabajo Calderón-Zygmund investigan la existencia de

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y) f(y)\, dy \ ;$$

para ello se asume que $f \in L^1(\Sigma)$, donde Σ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Ellos verifican:

"Si $f \in L^p, 1 \leq p < \infty, \Omega \in L^1(\Sigma)$, entonces $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ converge absolutamente c.t.p. para $\varepsilon > 0$ fijo".

También se verifica: "Sea $f \in L^p, 1 \leq p < \infty, \Omega \in L^1(\Sigma)$ y Ω es limitada, entonces para $\varepsilon > 0$ fijo se tiene que $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ existe en todas partes". Luego prueban que existe el límite $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{f}_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x)$. Estudian la relación de $\tilde{f}(x)$ con $f(x)$ y para ello impusieron al núcleo $K(x) = |x|^{-n}\Omega(x)$ las condiciones:

(i) $\Omega \in L^1(\Sigma)$,

(ii) $\int_\Sigma \Omega(x')\, d\sigma = 0$.

Esta clase de núcleos son llamados "núcleos de Calderón-Zygmund". Con estos núcleos prueban el siguiente teorema:

Teorema 6.1. *Sea $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ y $f \in \bigwedge_\alpha$, $\alpha > 0$. Entonces, si $K(x)$ es un núcleo de Calderón-Zygmund , existe $\tilde{f}(x) =$ v.p. $\int K(x-y) f(y)\, dy$ c.t.p. Si además $\Omega(x)$ es limitada, entonces $\tilde{f}$ existe en todas partes.*

Los autores estudian la necesidad de tener la condición (ii).

El siguiente objetivo es ver que el operador integral singular $\tilde{f}(x) = (f * K)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{f}_\varepsilon(x)$, donde $K(x)$ es un núcleo de Calderón-Zygmund, es continuo en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, esto es, se tiene $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$. Para lograr esto, ellos descomponen $K(x)$, $K(x) = K_p(x) + K_i(x)$, núcleos par e impar respectivamente; luego usan el método de las rotaciones. Veamos los resultados obtenidos:

Teorema 6.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$; $\Omega \in L^1(\Sigma)$ y asuma Ω impar. Entonces $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p \|f\|_p$; existe $\tilde{f} \in L^p$ tal que $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$; y además, $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$.*

Teorema 6.3. *Sea $K(x) = |x|^{-n}\Omega(x')$ un núcleo par donde $\int_\Sigma \Omega(x')\, d\sigma = 0$ y $\Omega \in L^q(\Sigma)$, $q > 1$. Sea $\tilde{f}_\varepsilon = K_\varepsilon * f$; entonces:*

(i) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q \|f\|_p$, $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

(ii) *existe* $\tilde{f} \in L^p$ *tal que* $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \to 0$ *si* $\varepsilon \to 0$.

(iii) $\|\tilde{f}\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q \|f\|_p$.

Ahora Calderón-Zygmund prueban el teorema fundamental de las integrales singulares.

Teorema 6.4 (C-Z). *Sea $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, el núcleo $K(x) = |x|^{-n}\Omega(x')$ tal que $\int_\Sigma \Omega(x')\, d\sigma = 0$, $\Omega \in L^q$, $q > 1$, y sea el operador $\tilde{f}_\varepsilon = K_\varepsilon * f$. Entonces,*

(i) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q \|f\|_p$, $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

(ii) *existe* $\tilde{f} \in L^p$ *tal que* $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \to 0$ *si* $\varepsilon \to 0$.

(iii) $\|\tilde{f}\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q \|f\|_p$.

Demostración: Probemos, como muestra, solo la parte (i). Para las partes (ii) y (iii) se usa un clásico resultado de M. Riesz, el cual es la versión del Teorema 6.2. Bien, K es descompuesto en sus partes par e impar, $K = K_1 + K_2$, donde $K_1(x) = \frac{1}{2}(K(x) + K(-x))$ y $K_2(x) = \frac{1}{2}(k(x) - k(-x))$. Además, $K_1(x) = |x|^{-n}\Omega_1(x')$ y $K_2(x) = |x|^{-n}\Omega_2(x')$; así K_1 y K_2 son funciones par e impar respectivamente; luego Ω_1 es par y Ω_2 impar. Además, siendo Ω_2 impar se tiene $\int_\Sigma \Omega_2(x')\, d\sigma = 0$, lo que implica (pues $\int_\Sigma \Omega(x')\, d\sigma = 0$) que $\int_\Sigma \Omega_1(x')\, d\sigma = 0$. Así mismo $\Omega_1 \in L^q(\Sigma)$, $q > 1$, y $\Omega_2 \in L^1(\Sigma)$. Entonces se tiene,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_\varepsilon\|_p &= \|K_\varepsilon * f\|_p \leq \|K_{1,\varepsilon} * f\|_p + \|K_{2,\varepsilon} * f\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega_1\|_q\|f\|_p + B_p\|\Omega_2\|_1\|f\|_p \\ &\leq A_{p,q}\|\Omega_1\|_q\|f\|_p + A_{p,q}\|\Omega_2\|_q\|f\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q\|f\|_p + A_{p,q}\|\Omega\|_q\|f\|_p; \end{aligned}$$

luego, $\|\tilde{f}_\varepsilon\| \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q\|f\|_p$. □

6.3. • 1956(b). En [9], Calderón-Zygmund consideran la composición de ciertos operadores integrales singulares y una cierta clase de operadores que forman una álgebra de Banach. En el citado trabajo aún $K(x)$ es un núcleo hmogéneo de grado n talque $\int_\Sigma K(x)\, d\sigma = 0$ y $\int_\Sigma |K(x)|^q\, d\sigma < \infty$, $q > 1$. Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y) f(y)\, dy$ converge puntualmente c.t.p. y en la norma L^p cuando $\varepsilon \to 0$. Si $\tilde{f}$ es tal límite se tiene $\|\tilde{f}\|_p \leq A_{p,q}\left(\int_\Sigma |K(x)|^q\, d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$.

Ahora Calderón-Zygmund consideran las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_q$, donde $\mathcal{A}$ es la clase de los operadores $Hf = af + \tilde{f}$, donde a es una constante compleja y $K(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para $|x| > 0$. $\mathcal{A}_q$, $q > 1$, es la clase de tales operadores H donde ahora $\|H\|_q \equiv |a| + \left(\int_\Sigma |K(x)|^q\, d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$. Se observó que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_q$ son cerradas bajo la adición y la multiplicación por escalares. Además se verificó que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo el operador composición, que $\mathcal{A}_q$ es una álgebra de Banach, es decir, un espacio de Banach que es una álgebra con identidad tal que $\|H_1H_2\|_q \leq \|H_1\|_q\|H_2\|_q, \forall H_1, H_2 \in \mathcal{A}_q$.

Remarcamos que el símbolo de $H \in \mathcal{A}_q$ es definido siendo $\sigma(H)(z) = a + \hat{K}(z)$. Se verifica que la aplicación $H \to \sigma(H)$ es lineal y que $H_1H_2 \to \sigma(H_1)\sigma(H_2)$, lo que da un isomorfismo de $\mathcal{A}_q$ con una álgebra, invertible, de funciones homogéneas de grado cero, continuas en $|z| > 0$. Así, la clase de los símbolos es una álgebra la que aún es denotada con $\mathcal{A}_q$ y se puso $\|\sigma(H)\| = \|H\|_q$: y, además, es una álgebra de Banach. Aún, $[Hf]^\wedge = a\hat{f} + (K * f)^\wedge = (a + \hat{K})\hat{f} = \sigma(H)\hat{f}$, de donde aún

$$Hf(x) = \int e^{2\pi ixz}\sigma(H)(z)\hat{f}(z)\,dz,$$

una interesante representación del operador H. Observemos que si $H \in \mathcal{A}_q$, su núcleo $K(x)$ se puede obtener conociendo el símbolo $\sigma(H)$. Para los detalles de todo esto, ver [9].

7. Integrales Singulares y Ecuaciones Diferenciales. Una de la más notables aplicaciones de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund es en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales. Es notable el trabajo realizado por A.P. Calderón en esta área,y que condujo a la teoría de los operadores pseudo-diferenciales, entre otras bellas aplicaciones. El tema es amplio, profundo y muy técnico; en esta sección solo buscamos motivar al lector e indicar la ruta a seguir.

7.1. El Problema de Cauchy: Un poco de historia. Sea $Lu = \Sigma_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha u$ un operador diferencial parcial sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Pongamos $D^\alpha u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$. Al operador diferencial Lu le está asociado su parte principal ó forma característica $P_k(\xi) = \Sigma_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dada una función ó distribución rápidamente decreciente f, una ecuación diferencial parcial, de orden k, es de la forma $Lu = f$.

Problema de Cauchy. "Dado f, encontrar una solución u de $Lu = f$ tal que sobre una hipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^n$ se tenga $u = \varphi_0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1, ..., \frac{\partial^{k-1}u}{\partial \nu^{k-1}} = \varphi_{k-1}$, donde ν es un vector normal unitario a S, y $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{k-1}$ son funciones dadas, llamadas los dados iniciales de Cauchy."

El problema de Cauchy es llamado no-característico si S es una superficie no-característica. Por ejemplo, en el plano la ecuación de la onda $u_{x_2x_2} - u_{x_1x_1} = 0$ está asociado a $\xi_2^2 - \xi_1^2 = 0$ y $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, de donde $\xi_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego, para la ecuación de la onda dada, las curvas características forman un ángulo de $45°$ con el eje x_2 y así la superficie $x_2 = 0$ es una superficie no-característica, y el problema de Cauchy respectivo es no-característico. Por otro lado, el problema es llamado analítico si $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{k-1}$, a_α y f son funciones analíticas.

Veamos algunos antecedentes en la dirección de la unicidad de la solución del problema de Cauchy, admitida que ella existe. En 1933, T. Carleman anunció que cualquier soluciones de un sistema elíptico de primer orden con dos ecuaciones para dos funciones con dos variables, la cual posee un cero de orden infinito entonces esta solución se anula identicamente. En 1956-57 N.Aronszajn extendió el resultado de Carleman a una ecuación elíptica de segundo orden con coeficientes que son funciones reales que están en $C^2_\alpha(\bar{\Omega})$, esto es, las funciones u que son extendibles a la clase C^2 sobre un dominio que contiene a $\bar{\Omega}$; u y sus derivadas de orden ≤ 2 satisfacen una condición de Hölder con exponente α, $0 < \alpha \leq 1$. En 1956, H.O. Cordes probó el resultado de Aronszajn en el caso de coeficientes en C^2. Para ciertas ecuaciones, los resultados de Aronszajn y de Cordes conducen a la unicidad de la solución del problema de Cauchy. Digamos que en sus orígenes, el clásico resultado de Cauchy-Kowalewski garantiza la existencia de soluciones analíticas de ecuaciones analíticas con dados de Cauchy analíticas. Además, se tiene la unicidad de la solución en la clase de las funciones analíticas.

En 1901 Holmgren prueba que el problema de Cauchy tiene a lo mas una solución continua, con derivadas continuas hasta la orden de las ecuaciones, siempre que éstas sean lineales y tengan coeficientes analíticas. Mas concretamente: "(Holmgren) Sea L un operador diferencial parcial líneal con coeficientes analíticos; si los dados iniciales de Cauchy se anulan sobre una hipersuperficie regular no-característica S_0, entonces cualquier solución u, no necesariamente analítica, $Lu = 0$, con esos dados iniciales, se anula en una pequeña vecindad de cualquier subconjunto cerrado de S_0.'"

Nota 7.1. *El teorema de Holgren garantiza la unicidad de la solución del problema para dados de Cauchy arbitrarios, no necesariamente analíticas sobre S_0.*

Carleman, en 1939, fue el primero en remover la hipótesis de analiticidad y probó la unicidad para el caso de dos variables independientes asumiendo que las características de las ecuaciones sean no-múltiples. Posteriormente, en 1954 A. Plis y en 1955 E. de Giorgi dieron un ejemplo de problema con característica múltiple para el cual el problema de Cauchy tiene más de una solución; así, la condición sobre las características en el trabajo de Carleman es fundamental y la restricción a dos variables es necesario para que funcione el método de su prueba. Por otro lado, en 1954 C. Müller consideró el caso de mas de dos variables en la investigación de una ecuación de segundo orden. En 1955 P. Hartman-A. Wintner y E. Heinz consideraron el caso de ecuaciones de segundo orden casi-lineales, donde la parte principal es el laplaciano; en 1956 Aronszajn extendió este resultado al considerar una ecuación elíptica de segundo orden. El resultado de Carleman fue extendido a varias variables por A. P. Calderón en 1958 haciendo uso de la teoría de los operadores integrales singulares, [3].

7.2. Integrales Singulares y EDP. Sea $f \in S$ una función rápidamente decreciente; se sabe que

$$\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}(x) = 2\pi i x_j \hat{f}(x),$$

y mas generalmente que $(\widehat{P(D)}f)(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x)$, donde

$$P(D) = \Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \text{ y}$$

$$P(x) = \Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) x^\alpha .$$

Si $P(x) = x_1^2 + ... + x_n^2$, $P(D)f = \Delta f$ y $\widehat{(\Delta f)}(x) = -4\pi^2|x|^2\hat{f}(x)$, esto motiva, en general, $\varphi(D)$ vía: $(\widehat{\varphi(D)f})(x) = \varphi(2\pi i x)\hat{f}(x)$, donde φ es una función arbitraria. Por ejemplo, si $\varphi(x) = |x|$, $\widehat{(|D|f)}(x) = 2\pi|x|\hat{f}(x)$. Se consideró al operador $\bigwedge = |D|$, esto es, $\widehat{(\bigwedge f)}(x) = 2\pi|x|\hat{f}(x)$. Se tiene que $\bigwedge f(x) = i\Sigma_{j=1}^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, donde R_j es la transformada de Riesz,

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)\, dt.$$

Se tiene la relación

$$R_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}},$$

la que fue usada por Calderón para establecer la unicidad de la solución del problema de Cauchy. Por otro lado, reiterando el argumento se tiene $\widehat{(\Delta^m f)}(x) = (2\pi|x|)^m\hat{f}(x)$; en particular, $\widehat{(\bigwedge^2 f)}(x) = (2\pi|x|)^2\hat{f}(x) = 4\pi^2|x|^2\hat{f}(x) = -\widehat{(\Delta f)}(x)$, de donde se tiene la relación $\bigwedge^2 = -\Delta$. De un modo similar se obtiene

$$\left(\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f}\right)(x) = (2\pi i x)^\alpha \hat{f}(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha i^{|\alpha|}(2\pi|x|)^\alpha \hat{f}(x) = i^{|\alpha|}(x')^\alpha \left(\widehat{\bigwedge^{|\alpha|} f}\right)(x). \qquad (*)$$

Desde que $(x')^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y es una función homogénea de grado cero, existe un operador integral singular T_α talque $(x')^\alpha = \sigma_{T_\alpha}$. Luego, antitransformando en $(*)$ se obtiene $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f = i^{|\alpha|}T_\alpha \bigwedge^{|\alpha|} f$, una bella representación!, donde $T_\alpha f(x) = a(x) + \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x, x-y)f(y)\,dy$.

En [10], 1957, Calderón-Zygmund introducen las anteriores ideas y mucho más, estableciendo un puente entre los operadores integrales singulares y los operadores diferenciales parciales. Así, si $L(u)$ es un operador diferencial parcial lineal, con coeficientes regulares, de homogeneidad de orden m, entonces se tiene, según los anteriores argumentos, $L = H\bigwedge^m$ donde $\bigwedge^2 = -\Delta$ y H es un operador integral singular. En la primera parte del citado trabajo, los autores dan un panorama de tales operadores. En la segunda parte se dan las notaciones y definiciones a ser consideradas (anteriores argumentos); en la tercera se usan los armónicos esféricos, útiles en este tipo de análisis clásico. Luego Calderón-Zygmund estudian los operadores integrales singulares de tipo C_β^∞; previo demos las definiciones a usar. C_β es la clase de las funciones limitadas cuyas derivadas, en el sentido de las distribuciones, menores o iguales que $[\beta]$ (β es real) son funciones limitadas y tal que las derivadas de orden $[\beta]$ satisfacen una condición de Hölder de orden $\beta - [\beta]$, esto es, existe una constante $M_\alpha > 0$ tal que,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha f(y)\right| \leq M_\alpha |x-y|^{\beta-[\beta]},$$

para $|\alpha| = [\beta]$.

Si $f \in C_\beta$ se considera la norma $\|f\|_\beta = \text{máx}\left[\sup_{|\alpha|<[\beta]}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)\right|, M_\beta\right]$.

La función $h(x,z)$, sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, es una función de tipo C_β^∞ si satisface:

(i) $h(x, \lambda z) = \lambda^k h(x, z)$ para todo x, todo $z \neq 0$ y todo $\lambda > 0$;
(ii) para cada x, $h(x, z) \in C^\infty$ si $|z| \geq 1$;
(iii) para cada α, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha h(x, z) \in C_\beta$ sobre $\mathbb{R}^n \times \Sigma$;
(iv) si $k = -n$ (n dimensión de $\mathbb{R}^n$), se tiene $\int_\Sigma h(x, z)\, d\sigma = 0$.

Teorema 7.1 ([8]). *"Sea $h(x, z)$ una función de tipo C_β^∞, $\beta \geq 0$, $x, z \in \mathbb{R}^n$, la cual es homogénea de grado-n en z (esto es, $h(x, \lambda z) = \lambda^{-n} h(x, z)$, $\forall \lambda > 0$); se asume $\int_\Sigma h(x, z)\, d\sigma = 0$, $\forall x, \Sigma$ es la esfera $|z| = 1$. Sea $a(x) \in C_\beta$ y sea el operador*

$$H_\varepsilon f(x) = a(x) f(x) + \int_{|x-y|>\varepsilon} h(x, x - y) f(y)\, dy$$

y su adjunto

$$H_\varepsilon^* f(x) = \bar{a}(x) f(x) + \int_{|x-y|>\varepsilon} \bar{h}(y, x - y) f(y)\, dy.$$

Entonces,

(i) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, H_ε y H_ε^* son operadores bien definidos y existen los límites $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f := Hf$ y $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^* f := H^* f$ en la topología de L^p. Se tiene además

$$\|Hf\|_p \leq A_p \sup_{|z|=1} \left(|a(x)| + |h(x, z)|\right) \|f\|_p,$$

y una desigualdad similar para $\|H^* f\|_p$, donde $A_p = A_p(p, n)$.

(ii) Si $f \in L_\gamma^p$ (γ número real, $1 \leq p \leq \infty. L_\gamma^p = J^\gamma(L^p)$, donde el operador J^γ es definido vía $(J^\gamma f)^\wedge(x) = \varphi^{-\gamma}(x) \hat{f}(x)$, siendo φ una adecuada función. Los L_γ^p's son los conocidos espacios de Sobolev generalizados), $1 < p < \infty$, $\gamma \leq \beta$, entonces Hf y $H^* f$ pertenecen también a L_γ^p.

(iii) Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, y es Hölder-continua de orden α, $0 < \alpha < \beta$, entonces Hf y $H^* f$ son también Hölder-continuas de orden α."

Nota 7.2. *Para probar este teorema Calderón-Zygmund usaron los armónicos esféricos.*

Definición 7.1. *Al operador H de este teorema, Calderón-Zygmund, le llaman un operador integral singular de tipo C_β^∞. El símbolo del operador H es definido siendo $\sigma(H) = a(x) + \Sigma a_{nm}(x) \gamma_m Y_{nm}(z')$, donde $a(x) \in C_\beta$, las funciones a_{nm} y las constantes γ_n son apropiadas; $Y_{n,m}$ son los armónicos esféricos.*

Los autores prueban que si H es operador integral singular de tipo C_β^∞, entonces su símbolo $\sigma(H)$ es una función homogénea de grado cero con respecto a z, y está en C_β^∞, $|z| \geq 1$. Y, *recíprocamente*: toda función de x, z la cual es homogénea de grado cero respecto a z, y está en C_β^∞ en $|z| \geq 1$, es el símbolo de un único operador de tipo C_β^∞. Además, si M es tal que $|\sigma(H)| \leq M$ y también cota de sus derivadas con respecto a z en $|z| \geq 1$ de orden $2n$, entonces $\|Hf\|_p \leq M A_p \|f\|_p$, donde $A_p = A_p(p, n)$.

Estos resultados permitieron a Calderón-Zygmund definir los operadores $H^\#$ y $H_1 \circ H_2$ donde H, H_1 y H_2 son operadores integrales singulares de tipo C_β^∞ vía $\sigma(H^\#) = \bar{\sigma}(H)$ y $\sigma(H_1 \circ H_2) = \sigma(H_1)\sigma(H_2)$, siendo $\bar{\sigma}(H)$ el complejo conjugado de $\sigma(H)$. $H^\#$ es llamado 'pseudo adjunto" y $H_1 \circ H_2$ "pseudo producto".

Calderón-Zygmund prueban que si los símbolos de H, H_1 y H_2 son independientes de x, entonces se tiene $H^\# = H^*$, $H_1 \circ H_2 = H_1 H_2 = H_2 H_1$ (producto composición de H_1 y H_2). Además, si el símbolo no se anula, entonces H tiene un inverso, el cual es tambiém un operador integral singular. Asi mismo, el operador H_1 definido vía $\sigma(H_1) = \sigma(H)^{-1}$, es el operador inverso de H. Los citados profesores establecen relaciones entre H, H^*, $H_1 H_2$ y $H_1 \circ H_2$. Se tiene:

Teorema 7.2. *Sea H un operador de tipo C_β^∞, $\beta > 1$ y M una cota para $\sigma(H)(x, z)$, de sus derivadas de orden $2n$ con respecto a z, de las primeras derivadas de $\sigma(H)$ con respecto a x, y de las constantes de Hölder de estas derivadas. Entonces, para todo $f \in L_1^p$, $1 < p < \infty$, se tiene*

$$\begin{cases} \|(H \bigwedge - \bigwedge H) f\|_p \leq A_p M \|f\|_p \\ \|(H^* - H^\#) \bigwedge f\|_p \leq A_p M \|f\|_p \\ \|(H^* \bigwedge - \bigwedge H^*) f\|_p \leq A_p M \|f\|_p \\ \| \bigwedge (H^* - H^\#) f\|_p \leq A_p M \|f\|_p \end{cases},$$

donde $A_p = A_p(p, n, \beta)$. Además, si H_1 y H_2 son operadores en C_β^∞ y $f \in L_1^p$ entonces,

$$\begin{cases} \|(H_1 \circ H_2 - H_1 H_2) \bigwedge f\|_p \leq A_p M_1 M_2 \|f\|_p \\ \| \bigwedge (H_1 \circ H_2 - H_1 H_2) f\|_p \leq A_p M_1 M_2 \|f\|_p \end{cases},$$

donde $A_p = A_p(p, n, \beta)$; M_1 y M_2 son como antes.

Luego Calderón-Zygmund pasan a estudiar el álgebra $\mathcal{A}_p$ de los operadores acotados sobre L^p, $1 < p < \infty$, los que son generados por todos los operadores integrales singulares H de tipo C^∞_β $(\beta > 1)$ y por sus adjuntos. Ellos prueban que existe un homomorfismo h_p de $\mathcal{A}_p$ sobre el álgebra de todas las funciones $F(x, z)$ en C^∞_β, homogéneas de grado cero respecto a z, tal que para todo operador integral singular H se tienen las identidades $h_p(H) = \sigma(H)$ y $h_p(H^*) = \bar{\sigma}(H)$. Para los detalles de estos, y otros argumentos ver C-Z [8] ó también [17], pag.150 y otras, donde se reproducen las demostraciones de los anteriores resultados, y otros.

7.3. Calderón y la Unicidad de la Solución del Problema de Cauchy. Una de las razones por las cuales A.P. Calderón alcanzó alto prestigio como matemático se debe a las profundas aplicaciones que realizó de los operadores integrales singulares al campo de las ecuaciones en derivadas parciales, en particular en las ecuaciones elípticas y en las parabólicas; sus investigaciones impulsaron otras, por ejemplo motivaron el estudio de los operadores pseudo-diferenciales. De esta manera la Escuela C-Z de análisis de la universidad de Chicago adquirió fama internacional. Veamos algo en esta dirección. Como es conocido, la teoría general de los operadores diferenciales parciales se inicia en 1955 con la tesis de Lars Hörmander, trabajo que motivó muchos otros en las EDP's. Por ejemplo se prueba la existencia de soluciones débiles de la ecuación $Pu = f$, donde P es un operador diferencial parcial lineal, u es definida sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in L^2(\Omega)$; luego existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $(u, P^*v) = (f, v)$, donde $v \in C^\infty_0$ y P^* es operador adjunto de P. Remarcamos que Hörmander considera el caso de operadores P con coeficientes constantes y luego operadores con coeficientes variables pero de caracter local, es decir, P es definido en una vecindad de la esfera $|x| \leq \gamma$ en $\mathbb{R}^n$, y tiene ciertas condiciones sobre sus coeficientes y sobre P^*. Si P es un adecuado operador, Hörmander prueba que existe una vecindad abierta Ω del origen tal que $Pu = f$, $f \in L^2(\Omega)$, siempre tiene una solución débil en el espacio $L^2(\Omega)$.

En esta dirección el trabajo [3], 1958, es de fundamental importancia en el estudio del problema de Cauchy. Calderón orientó algunas tesis de doctorado sobre EDP usando la maquinaria de los operadores integrales singulares; así I. Norman Katz ("On the existence of weak solutions to linear partial differential equations" J. of Math. Anal. and Applications. Vol.1 N°4. 1961) prueba la existencia de una solución débil de la ecuación $Pu = f$ sobre una "faja" infinita en $\mathbb{R}^n$, donde P es un operador diferencial parcial lineal con coeficientes variables y los coeficientes de la parte principal de P y de P^* son reales. Katz usa la metodología de representar a los operadores diferenciales parciales en términos de operadores integrales singulares. Así mismo, Irwin S. Bernstein ("On the unique continuation problem of elliptic partial differential equations". J. of Math. and Mechanics. Vol.10 N°4. 1961) discute la cuestión: Se sabe que la solución u de una EDP lineal homogénea ellíptica con coeficientes analíticos, es así misma una función analítica. Luego si por ejemplo en el origen la solución tiende a cero más rápido que cualquier potencia de $|x|$, entonces se tiene que $u \equiv 0$, por la analiticidad de u.

Cuestión: ¿Vale esta propiedad para una solución u si los coeficientes de la ecuación no son necesariamente analíticos?.

Bernstein da una respuesta parcial a tal cuestión usando la teoría de Calderón-Zygmund sobre variedades diferenciales (las que fueron investigadas por R.T. Seeley en 1958). Así mismo hubieron muchos aportes a las EDP usando los métodos de Calderón-Zygmund y del propio Calderón (ver [17, 19], para mayores referencias). Veamos algunos argumentos [3]. Este trabajo comienza dando algunos hechos históricos sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy. Luego Calderón revisa los operadores integrales singulares y su relación con los operadores diferenciales parciales lineales. Luego pasa a discutir la unicidad para una ecuación lineal: si $u \in C^m$ es una solución de una ecuación diferencial parcial homogénea lineal $A(u) = 0$ de orden m donde u y sus derivadas de orden $\leq m$ anúlanse sobre una variedad no-característica M, entonces u debe anularse en una vecindad de M. Calderón remarca que esta cuestión es de carácter local y que es suficiente ver que pasa en una vecindad arbitraria de un punto dado en M.

Como hemos dicho antes, Calderón [3], generaliza el trabajo de Carleman sobre el problema de Cauchy considerando funciones de cualquier número de variables, salvo para el caso de 3 variables. Para sistemas el método no considera los casos de 3 o 4 variables. Estas dificultades de carácter topológico fueron superadas por él mismo en 1961 en donde da, además, teoremas de existencia para clases amplias de ecuaciones. Como es natural la herramienta fundamental usada es la representación de los operadores diferenciales parciales como la composición de una potencia del operador $\bigwedge$ con un operador integral singular para los cuales se tiene un cálculo funcional lo que permite reducir el problema de la unicidad a una forma más simple.

Remarcamos que el trabajo de Calderón abrió la posibilidad de usar tales operadores integrales para el tratamiento de problemas de contorno para ecuaciones elípticas. En este aspecto debemos mencionar los trabajos de R.T. Seeley [22] quien extiende a variedades diferenciales compactas la teoría de los operadores integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ y es en este contexto que se aclara el concepto de símbolo de un operador en su forma más general. Además, via este camino, se dieron los recursos para probar el teorema del índice de Atiyah-Singer (1963). Para algunos detalles de las integrales singulares sobre variedades ver, por ejemplo [20].

Terminamos esta sección enunciando el famoso teorema de Calderón sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy, cuya demostración es bastante profunda y técnica. Ver [3, 19].

Teorema 7.3 (A.P.C.). *Sea $P(D)f(x)$ un operador diferencial parcial lineal de orden m, con $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde los coeficientes de las derivadas de orden m son reales y están en $C_\beta, \beta > 1$; los otros coeficientes son medibles y limitados. Asumamos que las características del operador son no-múltiples. Si f es una solución de $P(D)f = 0$ tal que ella y sus derivadas de orden $< m$ se anulan sobre una superficie no característica $S \in C_m$, entonces $f(t) = 0$ en una vecindad de S, siempre que $n \neq 3$ ó $m \leq 3$.*

8. Operadores Pseudo-diferenciales. Los operadores pseudo-diferenciales surgieron como un proceso de evolución de áreas como son las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis funcional, las distribuciones y los operadores integrales singulares. En efecto, las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales son expresadas en términos de operadores integrales todo lo cual motivó el interés por formular una teoría general más amplia que incluya las áreas mencionadas y otras. Así, en [10], Calderón-Zygmund establecieron relaciones entre los operadores diferenciales con los operadores integrales singulares; ya hemos mencionado que un operador diferencial parcial es representado como la composición de una potencia del operador laplaciano con un operador integral singular y ellos dieron un cálculo básico para tales representaciones.

En los citados trabajos de Calderón, y otros, estuvo el germen de los llamados operadores pseudo-diferenciales y que fueron desarrollados por otros analistas, como veremos enseguida.

Motivación. Sean $\lambda < 0$ y u definida sobre $\mathbb{R}^n$; sea la ecuación de Poisson $\Delta u - \lambda u = f$, donde f es una apropiada función dada. Tomando transformada de Fourier se obtiene $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) - \lambda \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$, de donde

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2 - \lambda}$$

y antitransformando se obtiene

$$u(x) = \int e^{2\pi i x y} \frac{1}{|\xi|^2 - \lambda} \hat{f}(\xi)\, d\xi\ .$$

Observemos bien el tipo de representación de la solución $u(x)$: ella presenta una singularidad en $\lambda = |\xi|^2$. En el caso de la ecuación $\Delta u = f$, u tendría la representación

$$u(x) = \int e^{2\pi i x\xi} |\xi|^{-2} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

la que tiene "peligro" en $\xi = 0$. Para salvar la situación se considera una función "cortante" $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, llamada función "parche", tal que $\theta(\xi) = 0$ en una vecindad del origen y $\theta(\xi) = 1$ en una vecindad del infinito. Multiplicando el núcleo de la integral por θ se obtiene un operador integral mas conveniente de la forma

$$Kf(x) = \int e^{2\pi i x\xi} \theta(\xi) |\xi|^{-2} \hat{f}(\xi) d\xi\ .$$

Ahora bien, se considera el operador diferencial parcial más general:

$$P(D)u = \Sigma_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\ .$$

Vía argumentos con la transformada de Fourier, se obtiene formalmente:

$$\begin{aligned} P(D)u &= \Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi i x z} ((\frac{\partial}{\partial z})^\alpha u)^\wedge(z)\, dz \\ &= \Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi i x z} (2\pi i z)^\alpha \hat{u}(z)\, dz \\ &= \int (\Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (2\pi i z)^\alpha)) e^{-2\pi i x z} \hat{u}(z)\, dz\ . \end{aligned}$$

Poniendo

$$p(x,z) = \Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(2\pi iz)^\alpha$$

se obtiene la representación

$$P(D)u(x) = \int e^{-2\pi ixz} p(x,z)\hat{u}(z)dz\ , \tag{8.1}$$

la que es una interesante representación del operador diferencial parcial P(D) como una integral cuyo integrando es de una forma sugestiva. En efecto, observando la parte homogénea de grado k, $p_k(x,z)$ del pólinomio $p(x,z)$ se tiene:

$$p_k(x,z) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(2\pi iz)^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{a_\alpha(x)(iz)^\alpha}{|z|^k}(2\pi)^{|\alpha|}|z|^k = (2\pi)^k|z|^k h_k(x,z),$$

donde

$$h_k(x,z) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{a_\alpha(x)(iz)^\alpha}{|z|^k}\ .$$

Desde que

$$p(x,z) = \sum_{|\alpha|=k=0}^{m} p_k(x,z),$$

se obtiene la representación

$$P(D)u(x) = \int \sum_{k=0}^{m} p_k(x,z)e^{-2\pi ixz}\hat{u}(z)\,dz\ .$$

Así mismo, si $I = \int p_k(x,z)e^{-2\pi ixz}\hat{u}(z)dz$, se tiene $I = \int h_k(x,z)e^{-2\pi ixz}(2\pi)^k|z|^k\hat{u}(z)\,dz =$ (definición de $\bigwedge^*) = \int h_k(x,z)e^{-2\pi ixz}(\bigwedge^{*k} u)^\wedge(z)\,dz$.

En general, si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define el operador H_k via $H_k g(x) = \int h_k(x,z)e^{-2\pi ixz}\hat{g}(z)\,dz$. De esta manera, $I = H_k(\bigwedge^{*k} u)$, y así finalmente se tiene $P(D)u = \sum_{k=0}^m H_k(\bigwedge^{*k} u)$, una conveniente representación del operador diferencial parcial $P(D)$.

$p(x,z)$ es llamado el símbolo o polinomio característico del operador diferencial. Se observa que las integrales que surgen son integrales singulares y esto fue un impulso a seguir investigando por el camino Calderón-Zygmund. Y... así también se llega a los operadores pseudo-diferenciales.

Definición 8.1. *Un operador pseudo-diferencial K es definido via:*

$$(Kf)(x) = \int a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi,$$

donde la integral es sobre $\mathbb{R}^n$, $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi ix\xi}f(x)dx$. $a(x,\xi)$ es llamado el símbolo de K, el cual es de orden m si $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n)$ y satisface $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \forall\alpha,\beta$. S^m es la clase de los símbolos $a(x,\xi)$ de orden m. Un símbolo $a(x,\xi)$ de orden m es llamado elíptico si $|a(x,\xi)| \geq C|\xi|^m$, para ξ grande y donde la acotación es uniforme en x.

Cuestión: Construir el inverso de K, si lo tuviera. Una estrategia fue construir una ïnversa aproximada"de K. En esta tarea la naturaleza del símbolo $a(x,\xi)$ fue vital; así, se construyó un cálculo simbólico para la inversión de operadores elípticos.

Todo esto fue un proceso que se remota a los años 1930's y tuvo su culminación en los años 1960's; los trabajos de Calderón-Zygmund y Calderón jugaron un vital rol en este proceso pues ellos construyeron una álgebra de operadores integrales singulares y llegaron muy cerca de una nueva teoría, un nuevo cálculo, los operadores pseudo-diferenciales y además, ellos cambiaron esencialmente a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. En este escenario debemos rescatar las contribuciones del matemático ruso S.G.Milhlin, así como de otros analistas.

8.1. La contribución de Kohn - Nirenberg [15]. El objetivo de esta corriente de investigación fue construir un apropiado "cálculo" de operadores en el campo de las EDP. En forma independiente pero casi paralelamente tenemos las contribuciones de los profesores J.J. Kohn - L. Nirenberg y L. Hörmander en el año 1965. Kohn-Nirenberg comienza su trabajo reconociendo el valor de las contribuciones de Mihlin y de Calderón-Zygmund por el rol fundamental que tuvieron en el desarrollo de las EDP; en particular, los resultados profundos de Calderón sobre la existencia y unicidad de soluciones.

K-N consideran al espacio de Hilbert H^s, s real, con la norma

$$||u||^2{}_s = \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \, ,$$

H^s es el espacio de Sobolev generalizado. Un operador $L : H^s \to H^s$ es de orden r si para cada real s existe una constante C_s tal que $\|Lu\|_s \leq C_s \|u\|_{s+r}, \forall u \in H^s$. Se verifica que el producto de dos de tales operadores tiene orden igual a la suma de sus órdenes. ¿Cómo es el símbolo de un tal operador...? Veamos, sea $a(x,\xi) \in C^\infty, \forall x, \xi \neq 0$, positivamente homogénea de grado cero en ξ; se asume que sobre $|\xi| = 1$ existe $\lim_{x\to\infty} a(x,\xi) = a(\infty,\xi)$; además se asume también $(a(x,\xi) - a(\infty,\xi)) \in S$ (funciones regulares rápidamente decrecientes) uniformemente en ξ. Más generalmente, $\forall p, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ se asume que $(1+|x|^p)D^\alpha D^\beta(a(x,\xi) - a(\infty,\xi)) \to 0$, si $|x| \to \infty$ (derivadas con respecto a ξ).

Tal a (x,ξ) es llamado un símbolo. La idea ahora es asociar a $a(x,\xi)$ un operador $a(x,D) : S \to S$ que se llama el operador canónico asociado con $a(x,\xi)$. Poniendo $a(x,D) = A$, se le define vía

$$(Au)^\wedge(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi} a(x,\xi) u(x) \, dx \, .$$

Kohn-Nirenberg prueban que A es un operador de orden cero, esto es, $||Au||_s < C_s||u||_s$. Por otro lado, a $a(x,\xi)$ también se le asocia el operador $\mathcal{A}u(x) = \int e^{2\pi i x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$. Se verifica que:

$$||(A - \mathcal{A})u||_s \leq C||u||_{s-1}$$

esto es, $A - \mathcal{A}$, es un operador de orden -1.

Definición 8.2. *Los operadores* $a(x,D) \equiv A$ *son los operadores pseudo-diferenciales de Kohn-Nirenberg.*

8.2. La contribución de L. Hörmander [12, 13, 14]. Lars Hörmander hizo importantes contribuciones en el campo de las EDP; su tratado [14], en cuatro gruesos volúmenes es una enciclopedia en ese campo. En [12] introduce los operadores pseudo-diferenciales los cuales los motiva con la siguiente caracterización.

"Sea P un operador diferencial parcial con coeficientes $-C^\infty$, de orden m, sobre una variedad diferenciable Ω; si f y g están en $C^\infty(\Omega)$, entonces $e^{-i\lambda g}P(fe^{i\lambda g})$ es un polinomio de grado m en λ esto es

$$e^{-i\lambda g}P(fe^{i\lambda g}) = \sum_{j=0}^{m} P_j(f,g)\lambda^j. \tag{8.2}$$

Recíprocamente, si $P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es un operador lineal continuo que tiene tal representación, entonces P es un operador diferencial".

Luego Hörmander da la definición y la representación integral de Fourier de los operadores pseudo-diferenciables. Veamos. Sea Ω una variedad diferenciable y $P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ un operador lineal continuo. Hörmander da la siguiente definición de operador pseudo-diferencial:

"P es un operador pseudo-diferencial si existe una sucesión $s_0 > s_1 > s_2 > ...$ de números reales tal que para todo $f \in C_0^\infty(\Omega) y g \in C^\infty(\Omega)$, con g una función de valor real y $dg \neq 0$ en el sop$f$, existe una expansión (asintótica)

$$e^{-i\lambda g}P(fe^{i\lambda g}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j(f,g)\lambda^{s_j}, \;\; (\lambda \to +\infty)$$

tal que: para todo entero $N > 0$ y todo conjunto compacto K de funciones de valor real $g \in C^\infty(\Omega)$ con $dg \neq 0$ en $sopf$, el error

$$\lambda^{-S_N}(e^{-i\lambda g}P(fe^{i\lambda g}) - \sum_{j=0}^{N-1} P_j(f,g)\lambda^{sj})$$

pertenece a un conjunto acotado en $C^\infty(\Omega)$ cuando $g \in K$ y $\lambda \geq 1$".

Esta definición es un tanto elaborada y su motivación proviene de la teoría de operadores elípticos $P(D)$, con coeficientes constantes cuya parametrix E tiene la forma $Ef(x) = \int e^{2\pi i x\xi} a(\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi$, donde $f \in S$ y $a(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$ para $|\xi|$ grande. En el caso de un operador elíptico con coeficientes variables $P(x, D)$ y su solución fundamental local E, los argumentos para describir sus singularidades llevan a considerar una primera aproximación $\mathcal{A}$ para E de la forma

$$\mathcal{A}f(x) = \int e^{2\pi i x\xi} a(x,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi, f \in S\,, \tag{8.3}$$

donde $a(x,\xi) = \frac{1}{P(x,\xi)}$ para $|\xi|$ grande. Se observó que todo operador elíptico tiene una parametrix de la forma [8.3], donde se verifica que $a(x,\xi)$ tiene una expasión asintótica de la forma

$$a(x,\xi) \sim a_{-m}(x,\xi) + a_{-m-1}(x,\xi) + \dots\,, \quad \xi \to \infty,$$

donde $a(x,\xi)$ es homogénea de grado k. En el estudio de los operadores $\mathcal{A}$ de la forma [8.3], la cuestión fue precisar las condiciones que debe satisfacer su símbolo $a(x,\xi)$ para obtener una buena clase de operadores $\mathcal{A}$. Sabemos que en la teoría de Calderón-Zygmund de los operadores integrales singulares, los símbolos $a(x,\xi)$ deben ser homogéneos en ξ, para $|\xi|$ grande. Siguiendo a Hörmander veamos los siguientes argumentos.

“Sea m un número real; $S^m(R^n \times R^n) \equiv S^m$ es el conjunto de todas las funciones $a(x,\xi) \in C^\infty(R^n \times R^n)$ tal que para todo α, β, las derivadas $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)$ satisfacen

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, x,\xi \in \mathbb{R}^n \text{”},$$

$a(x,\xi)$ es llamado un símbolo de orden m.

Notación: $S^{-\infty} = \cap_m S^m$, $S^\infty = \cup_m S^m$.

La menor de las constantes $C_{\alpha,\beta}$ en tal desigualdad se llama semi-norma de $a(x,\xi)$, con la cual S^m es un espacio de Frechet, esto es, un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable completo.

“Sea $a \in S^m$ y $u \in S$, entonces se verifica que

$$a(x,D)u(x) = \int e^{2\pi i x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

está en el espacio S”.

Según Hörmander: $\mathcal{A} = a(x, D)$ es llamado un operador pseudo-diferencial de orden m.

Los trabajos de Kohn-Nirenbergy de Hörmander fueron dos trabajos fundamentales en la génesis de la teoría de los operadores pseudo-diferenciales pero existieron otras contribuciones precursoras como las de L. Boutet de Mouvel (1968), R. Seeley (1965), R. Palais (1965), ...; Hörmander [13], 1968 introduce una clase de operadores de la forma

$$P(D)f(X) = \int e^{-2\pi i x\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi\,,$$

donde $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $x \in \Omega$ (un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$) y el núcleo $p(x,\xi)$ está en la clase $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ de los símbolos $p(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que para todo compacto $K \subset \Omega$ y todos los multi índices α, β, existe una constante $C = C(\alpha, \beta, K)$ tal que

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \le C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\,,$$

donde m, ρ y δ son números reales, $\rho > 0$, $\delta \ge 0$, $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Hörmander enfatiza que esta clase de operadores contienen como casos particulares a los anteriormente considerados. Esta presentación, tanto en notación como en ideas, es como la teoría de los operadores pseudodiferenciales fueron desarrollados posteriormente.

8.3. La teoría de Calderón [5] (1968). Remarcarmos que la génesis de la teoría de los operadores pseudo-diferenciales estuvo en las investigaciones de las integrales singulares y de sus conexiones con problemas en la teoría de las ecuaciones elípticas, con contribuciones de Calderón-Zygmund, Calderón, Seeley,... a fines de los años 1950's y 1960's. En [5] se desarrolla la teoría de operadores integrales singulares con símbolos infinitamente diferenciables y se introducen los operadores peudo-diferenciables como composiciones de operadores integrables singulares con potencias del operador $\bigwedge$. Según Calderón este punto de vista permite tener un álgebra de operadores lo que es esencial frente a otros enfoques de la teoría.

Veamos algunos argumentos. Sea el entero $m > 0$; un operador integral singular $\mathcal{A}$ es de clase $\mathscr{S}_m$ si $\mathcal{A}$ es de la forma

$$(\mathcal{A}f)(x) = \Sigma_{j=1}^{\varrho} p_j(x,z) e^{-2\pi i x z} \hat{f}(z)\, dz + Sf \ ,$$

donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f, fumción que está en el espacio de las funciones infinitamente diferenciables, rápidamente decrecientes, tal que:

1. $p_j(x,z)$ es una función acotada;
2. para $|z| > C$, $p_j(x,z)$ coincide, para cada x, con una función homogénea de z de grado-d, $0 \leq d_j < d_{j+1} < m$;
3. $\partial_x^{\alpha} \partial_z^{\beta} p_j(x,z)$ es una función continua acotada para $|\alpha| \leq 2m - [d]$, todo β.
4. S es el operador $S : \mathscr{S} \to L_m^2$ (sabemos que $g \in \mathscr{S}$ si g es infinitamente diferenciable, rápidamente decreciente) tal que S, $S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$ y $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} S$ son operadores acotados, lineales, con respecto a la norma de L^2 para todo α con $|\alpha| = m$.

Esta clase de operadores S, que satisface (iv), es denotada con I_m. Como $\mathscr{S}$ es denso en L^p, $1 < p < \infty$, un operador S en I_m puede ser extendido a un operador en el álgebra de todos los operadores limitados sobre L^p, $1 < p < \infty$, la que puede ser identificada con I_0.

Calderón verifica que $\mathscr{S}_m$ es una álgebra auto-adjunta, esto es, si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ están en $\mathscr{S}_m$, entonces $\mathcal{A}^*$ y $\mathcal{A}\mathcal{B}$ están también en $\mathscr{S}_m$. Luego pasa a definir sus operadores pseudo-diferenciales. Veamos. Sea $\varphi(z)$ una función real infinitamente diferenciable tal que $\varphi(z) \geq 1$, $\varphi(z) = |z|$ para $|z| > 2$. Si s es un número real, el operador $\bigwedge^s$ es definido vía $(\bigwedge^s f)^{\wedge} = \varphi(z)^s \hat{f}(z)$.

En el citado trabajo de Calderón se verifica que $\bigwedge^{s_1+s_2} = \bigwedge^{s_1} \bigwedge^{s_2}$, $\bigwedge^s : L_{r+s}^2 \to L_r^2$ es continua; si $s < 0$ entonces $\bigwedge^s \in \mathscr{S}_m$, $\forall m$. Por otro lado, hemos visto la representación para un operador diferencial parcial, $P(D) = i^m K \bigwedge^m$, donde K es un operador integral singular.

Definición 8.3. *P es un operador pseudo-diferencial (derecho), de clase m y orden real s si P tiene la represntación $P = \bigwedge^s \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} \in \mathscr{S}_m(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, P es un operador pseudo-diferencial (izquierdo) si $P = \mathcal{A} \bigwedge^s$.*

Calderón observa que si $\bar{P}_d(\bar{P}_i)$ es la familia de los operadores pseudo-diferenciales derechos (izquierdos) entonces se tiene:

- Si $\mathcal{A} \in \mathscr{S}_m(\mathbb{R}^n)$ y $P \in \bar{P}_d$, entonces $P\mathcal{A} \in \bar{P}_d$.
- Si $P \in \bar{P}_i$, entonces $\mathcal{A}P \in \bar{P}_i$.
- Si $P \in \bar{P}_d$, entonces se puede componer P por la derecha con un $Q \in \bar{P}_i$ obteniéndose $PQ = \bigwedge^s \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \bigwedge^s = \bigwedge^s \mathcal{A} \bigwedge^s$, donde $\mathcal{A} \in \mathscr{S}_m(\mathbb{R}^n)$. PQ es llamado un operador pseudo-diferencial mixto.

Nota 8.1. *Las propiedades de continuidad para los operadores pseudo-diferenciales seguirán de las propiedades de $\bigwedge^s$ y de las de $\mathcal{A} \in \mathscr{S}_m$. Una propiedad es que si $\mathcal{A} \in \mathscr{S}_m$ entonces $\mathcal{A}$ es un operador pseudo-diferencial mixto.*

En su trabajo citado Calderón estudia el problema de la existencia de soluciones de ecuaciones de la forma $\mathcal{A}f = g$, donde $\mathcal{A}$ es un operador pseudo-diferencial y $g \in L_r^2$.

Nota 8.2. *En posteriores trabajos, Calderón y sus colaboradores investigaron los operadores pseudo-diferenciales vía este enfoque.*

9. Integrales Singulares y áreas relacionadas. Desde 1952 en que Calderón-Zygmund comunicaron su teoría de las integrales singulares mucho se ha progresado en diferentes direcciones, enriqueciendo cada área estudiada y confirmando lo poderoso y útil que fueron las ideas que encierra los operadores integrales singulares. El universo es muy amplio, por ello solo mencionaremos algunas áreas donde las integrales singulares tienen presencia, daremos algunas ideas y las referencias básicas. Así tenemos:

9.1. Integrales Singulares sobre Variedades. Mucho de lo hecho en $\mathbb{R}^n$ fue puesto en el contexto de las variedades diferenciables C^{∞}, M, de dimensión n. R.T. Seeley [22], 1959, investigó las integrales singulares sobre variedades compactas siendo la idea la siguiente. "Un operador T definido sobre $L^p(M)$, $1 < p < \infty$, es un operador integral singular de tipo C_{β}^{∞}, con $\beta < n - 1$, si satisface:

- para cada $\varnothing$ y Ψ en C^k sobre M, con soportes compactos disjuntos, $\varnothing T \Psi$ es un operador compacto, regular de orden $[\beta]$ sobre todo $L^p(M)$;
- para cada $\varnothing$ y Ψ en C^k con soporte en un común dominio coordenado, con coordenadas x, tenemos $\varnothing T \Psi = \varnothing H \Psi + R$, donde H es un operador integral singular $C_{\beta}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y R es un operador compacto, regular de orden $[\beta]$ sobre $L^p(M)$, $1 < p < \infty$.

Se puede decir que los operadores integrales singulares sobre M son dados esencialmente trasplantando operadores integrales singulares sobre el espacio $\mathbb{R}^n$. Algunas áreas del análisis han sido estudiadas en el contexto general de las variedades; así, por ejemplo, Strichartz en 1972 define los espacios H^1 sobre variedades y la acción de operadores pseudo-diferenciales sobre estos espacios.

9.2. Integrales Singulares Vectoriales [1]. En 1962, trabajando con espacios de Banach, Benedek-Calderón-Panzone consideraron las integrales singulares vectoriales. La idea es como sigue. Sea B un espacio de Banach, $M(B)$ es el espacio de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to B$ fuertemente medibles ($f : X \to B$, X un conjunto no vacío, es llamado fuertemente medible si existe $\{f_n\}$ de funciones simples tal que $||f_n(x) - f(x)||_B \to 0$, $n \to \infty$ ctp). $L_0^\infty(B)$ es el espacio de las funciones en $M(B)$, limitadas con soporte compacto. Además, $L^p(B) = \{f \in M(B) \,/\, |f(x)| \in L^p\}$. Sea A un espacio de Banach y el núcleo $k : \mathbb{R}^n \to L(A, B)$ (espacio de operadores lineales acotados), que se asume medible y localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Ahora se define al operador integral singular en la forma: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,dy$, operador que es bien definido para $f \in L_0^\infty$, con valores en A, con soporte compacto, $x \notin \text{sop}f$. Sea el espacio $L_E^p(\mathbb{R}^n) = \{f$ medible, E-valorada $/||f||_{p,E} = (\int_{\mathbb{R}^n} ||f(x)||_E^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$. Se verifica que $L_E^p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

También, bajo ciertas condiciones para el núcleo $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se verifica que $T : L^\infty \to$ BMO es un operador continuo, esto es, $\|Tf\|_{\text{BMO}} \leq C\|f\|_{L^\infty}$ donde BMO es el espacio de las funciones de variación media acotada, introducidas por F. John - L. Nirenberg en 1961. Este resultado tiene su versión vectorial:

"Sea el operador $T : L_A^r(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_B^r(\mathbb{R}^n)$ lineal acotado, con r fijo, $1 \leq r < \infty$. Si $f \in L_o^\infty$ y $Tf(x) = (k * f)(x)$, con $x \notin \text{sop}f$ y k satisface la condición de Hörmander $\int_{|x|>2|y|} \|k(x-y) - k(x)\|_{L(A,B)}\, dx \leq C$, para $y \neq 0$, entonces se tiene $T : L_A^\infty \to \text{BMO}(B)$ es un operador lineal acotado, esto es $\|Tf\|_{\text{BMO}(B)} \leq C_1\|f\|_{L_A^\infty}$, para $f \in L_A^r \cap L_A^\infty$."

Benedek-Calderón-Panzone, bajo la misma hipótesis del anterior resultado probaron, que se tiene:

- "T es un operador de tipo débil (1,1), esto es,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n / \|Tf(x)\|_B > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_A^1};$$

- Si $1 < p < \infty$, T es de tipo fuerte (p, p), esto es, $\|Tf\|_{L_B^p} \leq C_p\|f\|_{L_A^p}$."

Nota 9.1. *El lector interesado en este enfoque de las integrales singulares puede ver también las lecturas de José L. Torrea, 'Integrales Singulares Vectoriales". Univ.Nac. del Sur. Bahía Blanca.Argentina. 1984.*

9.3. Pesos e Integrales Singulares. En problemas del análisis armónico y de las ecuaciones en derivadas parciales aparecen ciertas desigualdades con peso. Motivemos esta situación. Sea la transformada de Hilbert $Hf(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$.

Sabemos que M.Riesz probó que H es un operador lineal de tipo fuerte (p, p), $1 < p < \infty$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^p\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx$, donde dx es la medida de Lebesgue. **Cuestión:** si se considera otras medidas, ¿se podrá tener desigualdades similares?... Veamos algunos hechos históricos. Se considera medidas de la forma $w(x)\,dx$, donde $w(x)$ es una función medible definida sobre un espacio medida y con valores en $[0, \infty]$; $w(x)$ es llamado peso si es localmente integrable, $x \in \mathbb{R}^n$, en general. Los pesos tienen sus antecedentes en trabajos de E.M.Stein, Muckenhoup, Ch.Fefferman-E.M.Stein, entre otros. ¿Cómo caracterizar $w(x)$ para obtener estimativas similares a la anterior para operadores como los operadores integrales singulares, y otros operadores?. A_p, $1 < p < \infty$, es la clase de pesos.

Así, en relación a la transformada de Hilbert, ¿cómo caracterizar al peso $w(x)$ en $\mathbb{R}^1$ tal que el operador $H : L^p(w(x)\,dx) \to L^p(w(x)\,dx)$, $1 < p < \infty$, sea continuo?, esto es, que tengamos

$$\int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^p w(x)\, dx \leq A_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)\, dx \qquad (*)$$

Si $w(x) = 1$ se tiene la desigualdad de Riesz. Sea T un operador integral singular, bajo ciertas condiciones, ¿Qué condiciones debemos imponer al peso $w(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y a p, $1 < p < \infty$, para tener

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq A_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx\ ?$$

Por otro lado, en 1936, Hardy-Littlewood consideraron la medida $d\mu = |x|^\alpha\, dx$, con $-1 < \alpha < p-1$; y obtuvieron una desigualdad similar a $(*)$. En 1960, Helson-Szego verifican que para $p = 2$, $(*)$ se satisface si y solo si $w(x) = e^{\theta_1(x)+H\theta_2(x)}$, donde $\theta_1.\theta_2 \in L^\infty$, con $\|\theta_2\|_{L^\infty} < \frac{\pi}{2}$.

Luego de muchos esfuerzos, en 1972, B. Muckenhoupt encontró la idea fundamental de la teoría de pesos iniciando una etapa de intensas investigaciones en la teoría. Él introduce la clase A_p, $1 < p < \infty$. Por definición, $w \in A_p$ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\right) \leq C.$$

El ínfimo de tales constantes C se llama "la constante A_p". Si $p_1 < p_2$, entonces $A_{p_1} \subset A_{p_2}$. Asi mismo, si $p = 2$ se tiene $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-1}\right) \le A_2$. Si $p = 1$, se dice que $w \in A_1$ si existe una constante A_1 tal que $Mw(x) \le A_1 w(x)$ donde Mw es la función maximal de Hardy-Littlewood de w, definida vía $Mw(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |w(y)|\,dy$, siendo $Q = Q(x,r)$ un cubo de centro x y radio r. Si $p = \infty$, se dice que $w \in A_\infty$ si existen constantes C_1 y C_2, $0 < C_1, C_2 < 1$ tal que para todo cubo Q y todo subconjunto medible $E \subset Q$, si $|E| < C_1|Q|$, entonces $\int_E w(x)\,dx < C_1\int_Q w(x)\,dx$.

En 1974 R. Coifman-Ch.Fefferman consideran el operador convolución $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,dy$, donde el núcleo $k(x)$ satisface:

- $\|\hat{k}(x)\|_{L^\infty} \le C$;
- $|k(x)| \le \frac{1}{|x|^n}$ y
- $|k(x)-k(x-y)| \le \frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$, si $2|y| < |x|$. Si $w \in A_p \cap A_\infty$, $1 < p < \infty$, se tiene $\int |Tf(x)|^p w(x)\,dx \le A_p\int |f(x)|^p w(x)\,dx$.

Los resultados obtenidos en la teoría estimularon las investigaciones para obtener desigualdades con peso donde los operadores pueden ser de distintas naturalezas. La idea general es: dados los pesos w y v, los espacios normados E_w y E_v y $T : E_w \to E_v$ un operador lineal, ¿qué condiciones debemos imponer a w y v para tener $\|Tf\|_{E_v} \le C\|f\|_{E_w}$?

El lector interesado en la teoría de pesos puede consultar, por ejemplo, Torchinsky [25] capítulo IX donde hay relaciones de A_p con los espacios BMO, la factorización de pesos, la función maximal de Hardy-Littlewood y abundante información en la sección Notas. Los dos primeros capítulos de J-O Stromberg-A.Torchinsky [23] están dedicados a la teoría de pesos con información mas reciente y se sugiere para estudiantes avanzados de maestría o doctorado; es útil también para profesores investigadores en el campo del análisis armónico. Así mismo, en A.Ortiz [21] capítulos 2 y 3 hay un material básico sobre pesos relacionados con las integrales singulares. Remarcamos que existe una abundante literatura sobre este tema que el lector interesado puede encontrar.

9.4. Integrales Singulares y Espacios $\bigwedge(B, X)$. En 1964 A.P. Calderón publicó un extenso trabajo sobre interpolación usando el método complejo. La sección 14 de dicho trabajo fue el punto de partida del trabajo de A.Torchinsky, [24], del cual damos una sucinta visión. Bien, sea V un espacio de Banach complejo y $B = V^*$; si $y \in \mathbb{R}^n$, τ_y es una representación de $\mathbb{R}^n$ en un grupo de operadores lineales uniformemente acotados de B en si mismos, esto es $\|\tau u\|_B \le C\|u\|_B$, $u \in B$. Por otro lado, una red de Banach X de funciones localmente integrables $f(t)$, $0 < t < 1$, es una clase lineal de funciones tal que existe una norma en X con la cual X es completo y si $f \in X$ y $|g| \le |f|$, entonces $g \in X$ y $\|g\|_X \le \|f\|_X$. Sean $B = V^*$ y X una red y pongamos $X(B) = \{F(t)/F(t)$ es débilmente medible con valores en B y $\|F\|_B \in X\}$. ($F(t)$ es débilmente medible si $\ell(F(t))$ es medible para cada $\ell \in B^*$).

Veamos la *definición* de $\bigwedge(B, X)$. Sea ν una medida de Borel finitamente valorada, $u \in B$. Por definición: $\int \tau_y u\,d\nu(y)$ es el elemento $w \in B$ tal que $(w, v) = \int(\tau_y u, v)\,d\nu(y)$, $\forall v \in V$, esto es

$$\left(\int \tau_y u\,d\nu(y), v\right) = \int (\tau_y u, v)\ d\nu(y).$$

Definición 9.1. $\bigwedge_\nu(B, X) = \left\{u \in B / \int \tau_y u\,d\nu_t(y) \in X(B)\right\}$, *donde* ν_t *es una medida asociada a* ν. $\bigwedge_\nu(B, X)$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|u\|_{\bigwedge_y} = \|u\|_B - \left\|\int \tau_y u\,d\nu_t(y)\right\|_{X(B)}$. *Torchinsky prueba que* $\bigwedge_\nu(B, X)$ *es independiente de la medida* ν*, por esto escribe simplemente* $\bigwedge(B, X)$.

Ahora considera una apropiada clase de integrales singulares las que actúan sobre $\bigwedge(B, X)$. Veamos. El escenario es el grupo de transformaciones lineales $\{A_t\} \equiv \{t^P\}$ de $\mathbb{R}^n$, donde P es el generador infinitesimal del grupo. Si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces existe un único t_x tal que $t_x^{-P}x \in S^{n-1}$, cáscara de la bola unitaria. Sea:

$$\rho(x) = \begin{cases} t_x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

entonces $\rho(x)$ se comporta como una métrica parabólica. Ver [21] para mayores detalles sobre este grupo.

Sea ahora $k(x)$ una distribución temperada en $\mathbb{R}^n$, definida vía $< k, \varphi >=$ v.p. $\int k(x)\varphi(x)\,dx$, donde $\varphi \in C^\infty$ rápidamente decreciente, $k(x)$ coincide con una función localmente integrable fuera del origen y satisface:

- Si $0 < r < R$, se tiene $\left|\int_{r<\rho(x)<R} k(x)\, dx\right| \leq C$, y la integral $\int_{r<\rho(x)<R} k(x)\, dx$ converge cuando $r \to 0$;
- Si $R > 0$, $\frac{1}{R}\int_{\rho(x)<R} \rho(x)|k(x)|\, dx \leq C$;
- $\int_{\rho(x)\geq 4\rho(y)} |k(x-y)-k(x)|\, dx \leq C$, $y \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, Torchinsky verifica que $Kf(x) = (k * f)(x)$ es un operador acotado, el que se puede extender continuamente a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definición 9.2. *Para cada $u \in \bigwedge(B, X)$ se define la integral singular Ku vía*

$$(Ku, v) = \text{ v.p.} \int (\tau_y u, v)k(y)\, dy = \lim_{\varepsilon->0^+} \int_{\varepsilon<\rho(y)<\frac{1}{\varepsilon}} (\tau_y u, v)k(y)\, dy,\ v \in V.$$

Con estas y otras definiciones, en [24] se obtienen unos resultados que amplian el universo de las integrales singulares cuando actúan sobre estos espacios generalizados $\bigwedge(B, X)$.

La teoría de las integrales singulares, introducida por Calderón-Zygmund en 1952, ha progresado mucho a partir de entonces; se hicieron variadas aplicaciones, sobre todo a las EDP, todo lo cual contribuyó al progreso del análisis armónico. El lector interesado en la teoría o en sus aplicaciones, consultar las bibliografías dadas en la referencias de este artículo.

ORCID and License

Alejandro Ortiz Fernández https://orcid.org/0000-0002-9380-4301

Referencias

[1] Benedek A, Calderón AP, Panzone R. Convolution Operators on Banach Space Valued Functions. Proc.Nat.Ac.Sci.USA. 356-365. 1962.
[2] Calderón AP. Intermediate Spaces and Interpolation. The Complex Method. Studia Math. 1964; 24:113.
[3] Calderón AP. Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equations. Am. J. Math. 1958; 80:16-36.
[4] Calderón AP. Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations. Symp. Fluid Dyn. U. Marylands. Md. 1961.
[5] Calderón AP. A Priori Estimates for Singular Integral Operators. C.I.M.E. Conf. Stresa. 1968.
[6] Calderón AP, Zygmund A. On the Existence of Certain Singular Integrals. Acta Math. 1952; 88:85-139.
[7] Calderón AP, Zygmund A. Singular Integrals and Periodic Functions. Studia Math. 1954; 14:249-271.
[8] Calderón AP, Zygmund A. On Singular Integrals. Am. J. Math. 1956; 78:289-309.
[9] Calderón AP, Zygmund A. Algebras of Certain Singular Integral Operators. Amer. J. Math. 1956; 78:310-320.
[10] Calderón AP, Zygmund A. Singular Integral Operators and Differential Equations. Amer. J. Math. 1957; 74:901-921.
[11] Calderón AP, Zygmund A. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. Studia Math. 1961; 20:171-225.
[12] Hörmander L. Pseudo-Differential Operators. Comm. Pure Appl. Math. 1965; 18:501-517.
[13] Hörmander L. Pseudo-Differential Operator and Hypoelliptic Equations. Proc. Sym. on Singular Integrals. A.M.S. 1968.
[14] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2da editon, Sweden: Springer Verlag. 1990.
[15] Kohn JJ, Nirenberg L. An Algebra of Pseudo-Differential Operators. Comm. Pure Appl. Math. 1965; 18:269-305.
[16] Neri U. Singular Integrals. Springer-Verlag. 200, 1971.
[17] Ortiz A. Operadores Integrales Singulares. Dpto. Matem. Univ. Nac. Trujillo. Perú. 1972.
[18] Ortiz A. Algunos aspectos históricos-anáiliticos del análisis funcional. Selecciones Matemáticas. 2021. Vol. 8(2):386-40.
[19] Ortiz A. Integrales Singulares. La Escuela de Chicago. Sec. Mat. PUCP. (virtual). Lima. 2011.
[20] Ortiz A. Integrales Singulares y temas Afines. Pro Mathem. PUCP. 1991; V: 9-10.
[21] Ortiz A. Tópicos sobre Análisis Armónico. Notas de Mat. 4. Dpto. Mat. UNT. 1988.
[22] Seeley RT. Singular integrals on compact manifolds. Amer. J. Math. 1959; 81:658-690.
[23] Strömberg J-O, Torchinsky A. Weighted Hardy Spaces. Lect. Notes in Math. 1381. Springer-Verlag. 1989.
[24] Torchinsky A. Singular Integrals in the Spaces $\bigwedge(B, X)$. Studia Math. 1973; 47.
[25] Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic Press, INC. 1986, 462p.