Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(1): 167-172.

Bivariant K-theory of locally convex Z-graded algebras

K-teoría bivariante de álgebras localmente convexas Z-graduadas

Julio Gutierrez

Received, May. 30, 2022 *Accepted, Jul. 12, 2022*

How to cite this article:
Gutierrez J. *K-teoría bivariante de álgebras localmente convexas Z-graduadas*. Selecciones Matemáticas. 2022;9(1):167–172. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.14

Abstract

In the present work, we describe some results about the K-theory of $\mathbb{Z}$-graded algebras. First, in the context of $C^\star$ algebras, we begin with the Pimsner-Voiculescu sequence for crossed products and its generalizations. We will see that there are results analog to these in the context of locally convex algebras and we conclude with results for generalized Weyl algebras.

Keywords . K-theory, $\mathbb{Z}$-graded algebras, locally convex algebras, generalized Weyl algebras

Resumen

En este trabajo, describimos algunos resultados sobre la K-teoría de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas. Primero, en el contexto de álgebras $C^\star$, empezamos con la secuencia de Pimsner-Voiculescu para productos cruzados y sus generalizaciones. Veremos como estos resultados tienen análogos en contexto de álgebras localmente convexas y concluimos con resultados para álgebras de Weyl generalizadas.

Palabras clave. K-teoría, álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas, álgebras localmente convexas, álgebras de Weyl generalizadas.

1. Introducción. En este artículo, resumimos algunos resultados que han sido obtenidos para el cálculo de la K-teoría de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas en dos contextos: álgebras $C^\star$ y álgebras localmente convexas. Los resultados son secuencias de 6 términos que relacionan la K-teoría del álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con algunas de sus subálgebras. Veremos que los resultados obtenidos para álgebras $C^\star$ tienen análogos en el contexto de álgebras localmente convexas. Concluimos mencionando resultados obtenidos para K-teoría bivariante de álgebras de Weyl generalizadas.

2. Notación y preliminares.

2.1. K-teoría de álgebras $C^\star$. Denotamos por $K_*(A)$ a la K-teoría de álgebras $C^\star$. $K_*(A)$ es invariante por homotopías, satisface la periodicidad de Bott y tiene secuencias exactas de 6 términos asociadas a secuencias cortas exactas de álgebras $C^\star$. $\mathbb{K}$ representa el álgebra de operadores compactos y $\mathcal{T}_{C^\star}$ representa el álgebra de Toeplitz. Tenemos una secuencia exacta corta

$$0 \to \mathbb{K} \to \mathcal{T}_{C^\star} \to C(S^1) \to 0.$$

La K-teoría bivariante de Kasparov es denotada por $KK_*(A, B)$ y es una generalización de la K-teoría: $KK_*(\mathbb{C}, A) = K_*(A)$. Su utilidad proviene del producto asociativo

$$KK_m(A, B) \times KK_n(B, C) \to KK_{m+n}(A, C).$$

En vista de este producto podemos pensar en la K-teoría bivariante como una categoría KK con objetos álgebras $C^\star$ y con morfismos dados por los grupos $KK_*(A, B)$.

*Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. (*julio.gutierrez@pucp.edu.pe*).

2.2. Álgebras localmente convexas. Definimos la categoría de álgebras localmente convexas.

Definición 2.1. *Un álgebra localmente convexa es un espacio vectorial localmente convexo completo sobre $\mathbb{C}$ con multiplicación continua.*

La categoría de álgebras localmente convexas $\mathfrak{lca}$ tiene como objetos a las álgebras localmente convexas y como morfismos a los morfismos de álgebras continuos.

Pese a la naturaleza topológica de la definición, todas las álgebras con una base contable sobre $\mathbb{C}$ son álgebras localmente convexas cuando consideramos la topología dada por todas las seminormas (Proposition 2.1 en [5]). Con esta topología, las álgebras de Weyl generalizadas que estudiaremos en la Sección 5 son álgebras localmente convexas.

Definición 2.2. *El álgebra de operadores compactos suaves, $\mathcal{K}$, se define como el álgebra de matrices $a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ indexadas por $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tales que las seminormas $q_n(a) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}}(1+i+j)^n|a_{i,j}|$ son finitas para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta es un álgebra localmente convexa cuya topología está definida por las seminormas q_n.*

La noción de homotopía es reemplazada por la de difeotopía.

Definición 2.3. *Sean $\phi_0, \phi_1\colon A \to B$ morfismos de álgebras localmente convexas. Una difeotopía entre ϕ_0 y ϕ_1 es un morfismo $\Phi\colon A \to \mathcal{C}^\infty([0,1], B)$ tal que $\mathrm{ev}_i \circ \Phi = \phi_i$.*

2.3. K-teoría bivariante de álgebras localmente convexas. La K-teoría bivariante, kk^{alg}, en la categoría $\mathfrak{lca}$ de álgebras localmente convexas asigna a cada par de dichas álgebras los grupos abelianos $kk_n^{\mathrm{alg}}(A,B)$, $n \in \mathbb{Z}$. Existen aplicaciones bilineales

$$kk_n^{\mathrm{alg}}(A,B) \times kk_m^{\mathrm{alg}}(B,C) \to kk_{n+m}^{\mathrm{alg}}(A,C),$$

para todo A, B y C álgebras localmente convexas y $m, n \in \mathbb{Z}$. Utilizando este producto podemos definir una categoría $\mathfrak{KK}^{\mathrm{alg}}$ cuyos objetos son álgebras localmente convexas y cuyos morfismos están dados por los grupos graduados $kk_*^{\mathrm{alg}}(A,B)$. Siendo así, kk^{alg} se puede ver como un funtor $kk^{\mathrm{alg}}\colon \mathfrak{lca} \to \mathfrak{KK}^{\mathrm{alg}}$. Este funtor es invariante por diffeotopía, $\mathcal{K}$-estable y exacto en el medio para secuencias *split* exactas. En particular, un isomorfismo en $\mathfrak{KK}^{\mathrm{alg}}$ induce un isomorfismo en homología cíclica periódica bivariante HP. Además $\mathfrak{KK}^{alg}$ es una categoría triangulada.

3. Resultados en el contexto de álgebras $C^\star$. Un resultado clásico para el cálculo de la K-teoría de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas en el contexto de álgebras $C^\star$ es la secuencia de Pimsner-Voiculescu para productos cruzados por un automorfismo.

Definición 3.1. *Sea A un álgebra $C^\star$ y $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$. El producto cruzado $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ es el álgebra $C^\star$ universal generada por A y por un elemento unitario u que satisface la relación*

$$ua = \alpha(a)u,$$

para todo $a \in A$.

El álgebra $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ contiene a

$$\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} a(i)u^i | a \in C_c(\mathbb{Z}, A)\},$$

como una subálgebra densa y existe una graduación natural que asigna grado 1 a u y grado 0 a los elementos de A.

La secuencia exacta del siguiente teorema es llamada la secuencia de Pimsner-Voiculescu.

Teorema 3.1 ([7]). *Existe una secuencia exacta*

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "1-\alpha_*"] & K_0(A) \arrow[r, "i_*"] & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l, "i_*"'] & K_1(A). \arrow[l, "1-\alpha_*"'] \end{tikzcd}$$

Notamos que esta secuencia relaciona la K-teoría del producto cruzado $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ con la de A. En términos de la graduación, relaciona la K-teoría del álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con la de su subálgebra de grado 0. Esta secuencia ha sido utilizada, por ejemplo, para calcular la K-teoría de las álgebras de rotación irracional A_θ.

Posteriormente, utilizando la K-teoría bivariante de Kasparov, Cuntz dio una prueba de esta secuencia en [4] la cual se basa en la extensión de Toeplitz asociada a un producto cruzado definido por un automorfismo

$$0 \to \mathbb{K} \otimes_\pi A \to \mathcal{T}_\alpha \to A \rtimes_\alpha \mathbb{Z},$$

donde $\mathcal{T}_\alpha$ es la subálgebra $C^\star$ de $(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T}_{C^\star}$ generada por $A \otimes 1$ y $u \otimes v$, donde v es la isometría que genera a $\mathcal{T}_{C^\star}$. El núcleo, $\mathbb{K} \otimes_\pi A$, es equivalente a A en K-teoría bivariante. El teorema queda probado luego de establecer la equivalencia entre $\mathcal{T}_\alpha$ y A en la K-teoría bivariante.

Secuencias similares han sido obtenidas para algebras $C^\star$ covariantes asociadas a automorfismos parciales (ver [10]), álgebras de Cuntz-Pimsner (ver [8]) y productos cruzados generalizados (ver [1]).

Todas estas álgebras son ejemplos de álgebras $C^\star$ graduadas cuya graduación satisface ciertas condiciones. Una $\mathbb{Z}$-graduación sobre el álgebra $C^\star$ B es equivalente a una acción circular $\alpha\colon S^1 \to \mathrm{End}(B)$ sobre B. Dada una graduación $B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n$, podemos definir la acción $\alpha_z(b_n) = z^n b_n$. Y dada una acción α definimos los subespacios espectrales $B_n = \{b \in B | \alpha_z(b) = z^n b, \forall z \in S^1\}$.

Definición 3.2. *Una acción circular $\alpha\colon S^1 \to \mathrm{End}(B)$ es llamada semisaturada si los espacios espectrales B_0 y B_1 generan a B como álgebra $C^\star$.*

En [1] (ver Teorema 3.1), queda establecido que las álgebras $C^\star$ $\mathbb{Z}$-graduadas cuya acción circular es semisaturada son exactamente los productos cruzados generalizados. Las álgebras de covarianza definidas por un automorfismo parcial son semisaturadas y además satisfacen una condición de regularidad (ver [10])

Teorema 3.2. *Sea B un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada semisaturada. Existe una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccc} K_0(B_1B_{-1}) & \longrightarrow & K_0(B_0) & \xrightarrow{i_*} & K_0(B) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(B) & \xleftarrow{i_*} & K_1(B_0) & \longleftarrow & K_1(B_1B_{-1}). \end{array}$$

El caso de álgebras semisaturadas regulares se obtiene en el Teorema 7.1 de [10]. La prueba del teorema se esboza en la Observación 3.4 de [1].

Este teorema generaliza la secuencia de Pimsner-Voiculescu pues los productos cruzados $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ corresponden a las álgebras $C^\star$ $\mathbb{Z}$-graduadas semisaturadas B tales que $B_1B_{-1} = B_0 = A$.

4. Resultados en el contexto de álgebras localmente convexas. En el contexto de álgebras localmente convexas se pueden definir productos cruzados suaves.

Definición 4.1 (Ver [5]). *Un producto cruzado suave $A \hat{\rtimes}_\alpha \mathbb{Z}$, donde A es un álgebra localmente convexa y $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$, es el álgebra localmente convexa completa generada por A y un elemento invertible u que satisface*

$$uxu^{-1} = \alpha(x),$$

para todo $x \in A$.

Tenemos el siguiente teorema para productos cruzados suaves.

Teorema 4.1 (Teorema 14.3 en [5]). *Para toda álgebra localmente convexa D, existe una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccc} kk_0^{\mathrm{alg}}(D,A) & \xrightarrow{\cdot(1-kk(\alpha))} & kk_0^{\mathrm{alg}}(D,A) & \xrightarrow{\cdot kk(i)} & kk_0^{\mathrm{alg}}(D,B) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ kk_1^{\mathrm{alg}}(D,B) & \xleftarrow{\cdot kk(i)} & kk_1^{\mathrm{alg}}(D,A) & \xleftarrow{\cdot(1-kk(\alpha))} & kk_1^{\mathrm{alg}}(D,A), \end{array}$$

donde $B = A \hat{\rtimes}_\alpha \mathbb{Z}$ e i es la inclusión de A en $A \hat{\rtimes}_\alpha \mathbb{Z}$.

En [6], Gabriel y Grensing definen productos cruzados generalizados suaves. Estas son álgebras localmente convexas $\mathbb{Z}$-graduadas análogas a los productos cruzados generalizados en el contexto de álgebras $C^\star$.

Definición 4.2. *Una acción de gauge γ en un álgebra localmente convexa B es una acción continua punto a punto de S^1 en B. Un elemento $b \in B$ es llamado gauge suave si la aplicación $t \mapsto \gamma_t(b)$ es suave.*

Si tenemos una acción gauge suave en B, entonces $B_n = \{b \in B | \gamma_z(b) = z^n b,\ \forall z \in S^1\}$ define una graduación de B sobre $\mathbb{Z}$.

Definición 4.3. *Un producto cruzado generalizado suave es un álgebra localmente convexa B con una involución y una acción de gauge tal que*

- *B_0 y B_1 generan B como álgebra localmente convexa involutiva.*
- *todo b es gauge suave y la aplicación $B \to C^\infty(S^1, B)$ es continua.*

También en [6], se construyen secuencias exactas de 6 términos para productos cruzados generalizados suaves B que satisfacen la condición de ser *tame smooth* (ver la Definición 18 del artículo). Estas secuencias relacionan los invariantes kk^{alg} de B con los de su subálgebra de grado 0, B_0.

Teorema 4.2 (Teorema 36 en [6]). *Sea B un producto cruzado generalizado suave* tame smooth*. Para toda álgebra localmente convexa D tenemos una secuencia exacta*

$$\begin{tikzcd}
kk_0^{\mathrm{alg}}(D,B_0) \arrow[r] & kk_0^{\mathrm{alg}}(D,B_0) \arrow[r] & kk_0^{\mathrm{alg}}(D,B) \arrow[d] \\
kk_1^{\mathrm{alg}}(D,B) \arrow[u] & kk_1^{\mathrm{alg}}(D,B_0) \arrow[l] & kk_1^{\mathrm{alg}}(D,B_0), \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

y una secuencia similar en la otra variable.

Equivalentemente, el resultado del Teorema 4.2 puede verse como la existencia de un triángulo exacto

$$SB \to B_0 \to B_0 \to B,$$

en la categoria triangulada $\mathfrak{KK}^{\mathrm{alg}}$.

5. Álgebras de Weyl Generalizadas. Las álgebras de Weyl generalizadas son ejemplos de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas que son localmente convexas (con la topología fina) y que engloban a una gran cantidad de ejemplos relevantes de álgebras no conmutativas. En [11], se calculan los invariantes kk^{alg} de una gran familia de álgebras de Weyl generalizadas sobre el anillo de polinomios en una variable.

Definición 5.1. *Sea D un anillo, $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ y a un elemento central de D. El álgebra de Weyl generalizada $D(\sigma,a)$ es el álgebra generada por x e y sobre D que satisface las relaciones*

$$xd = \sigma(d)x,\ yd = \sigma^{-1}(d)y,\ yx = a \text{ y } xy = \sigma(a).$$

para todo $d \in D$.

Ejemplos 1. *Los siguientes son ejemplos de álgebras de Weyl generalizadas.*

1. *El álgebra de Weyl*

$$A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle x, y | xy - yx = 1\rangle,$$

es isomorfa a $\mathbb{C}[h](\sigma,h)$, con $\sigma(h) = h-1$.

2. *El álgebra de Weyl cuántica*

$$A_q(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle x, y | xy - qyx = 1\rangle,$$

es isomorfa a $\mathbb{C}[h](\sigma,h-1)$, con $\sigma(h) = qh$.

3. *El plano cuántico*

$$\mathbb{C}\langle x, y | xy = qyx\rangle,$$

es isomorfo a $\mathbb{C}[h](\sigma,h)$, con $\sigma(h) = qh$.

4. *Los cocientes primitivos de $U(\mathfrak{sl}_2)$ (ver Ejemplo 3.2 en [2]),*

$$B_\lambda = U(\mathfrak{sl}_2)/\langle c-\lambda\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

son isomorfos a $\mathbb{C}[h](\sigma,P)$, con $\sigma(h) = h-1$ y $P(h) = -h(h+1) - \lambda/4$.

5. *Las rectas proyectivas cuánticas con pesos $\mathcal{O}(\mathbb{WP}_{k,l})$ (ver Ejemplo 3.8 en [3]) son isomorfas a $\mathbb{C}[h](\sigma,P)$ con $P(h) = h^k \prod_{i=0}^{l-1}(1-q^{-2i}h)$ y $\sigma(h) = q^{2l}h$.*

6. *Los ejemplos anteriores son álgebras de Weyl generalizadas sobre $\mathbb{C}[h]$. El álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}_2$,*

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{C}\langle E, F, H | &[E,H] = 2E, [F,H] = -2F, \\ &[E,F] = 2H\rangle, \end{aligned}$$

es isomorfa a $\mathbb{C}[h,c](\sigma,a)$ donde $\sigma(h) = h-1$, $\sigma(c) = c$ y $a = c - h(h+1)$.

Un álgebra de Weyl generalizada $A = D(\sigma,a)$ tiene una graduación sobre $\mathbb{Z}$, $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, donde $A_0 = D$ y

$$A_n = \begin{cases} Dy^n & n > 0 \\ Dx^n & n < 0. \end{cases}$$

En el caso de álgebras de Weyl generalizadas sobre $\mathbb{C}[h]$, se tiene una base contable sobre $\mathbb{C}$.

Existen muchas expresiones equivalentes para denotar a la misma álgebra de Weyl generalizada. Ver [9].

Proposición 5.1. *Sea $A = \mathbb{C}[h](\sigma,P)$, con $P \in \mathbb{C}[h]$ y $\sigma(h) = qh + h_0$ con $q, h_0 \in \mathbb{C}$ y $q \neq 0$. Se cumple lo siguiente.*

1. *Si $\sigma = \mathrm{id}$, entonces $A \cong \mathbb{C}[h,x,y]/\langle xy - P\rangle$.*

2. *Si* $q = 1$ *y* $h_0 \neq 0$ *entonces* $A \cong \mathbb{C}[h](\sigma_1, P_1)$ *con* $\sigma_1(h) = h - 1$ *y* $P_1(h) = P(-h_0 h)$.
3. *Si* $q \neq 1$ *entonces* $A \cong \mathbb{C}[h](\sigma_1, P_1)$ *con* $\sigma_1(h) = qh$ *y* $P_1(h) = P\left(h + \frac{h_0}{1-q}\right)$.

Por la Proposición 5.1, podemos asumir que $\sigma = \mathrm{id}$, $\sigma(h) = h - 1$ o $\sigma(h) = qh$ para algún $q \neq 0$.

Proposición 5.2. *Sea* $A = \mathbb{C}[h](\sigma, P)$, *con* $P \in \mathbb{C}[h]$. *Tenemos*

1. *Si* $\sigma(h) = h - 1$ *y* P *es un polinomio no constante, entonces* $A \cong \mathbb{C}[h](\sigma, P_1)$ *con* $P_1(0) = 0$,
2. *Si* $\sigma(h) = qh$ *y* P *tiene una raíz distinta de* 0, *entonces* $A \cong \mathbb{C}[h](\sigma, P_1)$ *con* $P_1(1) = 0$.

Las álgebras de Weyl generalizadas $A = \mathbb{C}[h](\sigma, P)$ son álgebras localmente convexas cuando se considera la topología dada por todas las seminormas. Cuando $P \in \mathbb{R}[h]$, q y h_0 son reales, tienen una involución definida por $y^* = x$, $x^* = y$ y d^* se obtiene conjugando los coeficientes de $d \in \mathbb{C}[h]$. Existe una acción de S^1 sobre A definida por $\gamma_t(\omega_n) = t^n \omega_n$ para $\omega_n \in A_n$. En este caso, las álgebras de Weyl generalizadas sobre $\mathbb{C}[h]$ son productos cruzados generalizados suaves.

En el caso en que $P \in \mathbb{R}[h]$, q y h_0 son reales, las álgebras $A = \mathbb{C}[h](\sigma, P)$ son *tame smooth* cuando P es un polinomio constante distinto de 0. (ver Definición 18 en [6]). Si P no es constante, entonces tenemos $A_1 A_{-1} = \langle P \rangle \subsetneq A_0 = \mathbb{C}[h]$. Esto implica que A no es *tame smooth* pues debería cumplirse $A_1 A_{-1} = A_0$.

6. K-teoría bivariante de álgebras de Weyl generalizadas. En [11], se construyen secuencias exactas de 6 términos para una familia de álgebras de Weyl generalizadas

Teorema 6.1 ([11]). *Sea* $A = \mathbb{C}[h](\sigma, P(h))$ *un álgebra de Weyl generalizada con* $\sigma(h) = qh + h_0$ *y* P *un polinomio no constante de modo que se cumple una de las siguientes condiciones.*

- $q = 1$ *y* $h_0 \neq 0$.
- q *no es una raíz de la unidad y* P *tiene raíces distintas de* $\frac{h_0}{1-q}$.

Entonces para toda álgebra localmente convexa D *tenemos una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccc} kk_0^{\mathrm{alg}}(D, A_1A_{-1}) & \longrightarrow & kk_0^{\mathrm{alg}}(D, A_0) & \longrightarrow & kk_0^{\mathrm{alg}}(D, A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ kk_1^{\mathrm{alg}}(D, A) & \longleftarrow & kk_1^{\mathrm{alg}}(D, A_0) & \longleftarrow & kk_1^{\mathrm{alg}}(D, A_1A_{-1}), \end{array}$$

y una secuencia similar en la otra variable.

Debido a que estas álgebras de Weyl generalizadas no siempre son productos cruzados generalizados suaves, o en caso de serlo no siempre son *tame smooth*, este resultado cae fuera del contexto estudiado en [6].

Con este resultado es posible calcular la clase de isomorfismo de estas álgebras en la categoría $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}$.

Corolario 6.1 ([11]). *Sea* $A = \mathbb{C}[h](\sigma, P(h))$ *un álgebra de Weyl generalizada que cumple las condiciones del teorema anterior, entonces* $A \cong_{\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}} \mathbb{C}^r$.

Ejemplos 2 ([11]). *Se tienen los siguientes resultados.*

1. *El álgebra de Weyl cuántica* A_q, *con* $q \neq 1$ *y tal que no una raíz de la unidad, es isomorfa a* $\mathbb{C}$ *en* $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}$.
2. *Para los factores primitivos* B_λ *de* $U(\mathfrak{sl}_2)$, *si* $\lambda = 1$, *entonces* $B_\lambda \cong \mathbb{C}$ *en* $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}$; *si* $\lambda \neq 1$, *entonces* $B_\lambda \cong \mathbb{C}^2$ *en* $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}$.
3. *En el caso de las rectas proyectivas cuánticas con pesos* $\mathcal{O}(\mathbb{WP}_q(k,l))$, *si* $q \neq 1$ *no es una raíz de la unidad, tenemos* $\mathcal{O}(\mathbb{WP}_q(k,l)) \cong \mathbb{C}^{l+1}$ *en* $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{alg}}$.

7. Agradecimientos. Este artículo contó con el soporte del proyecto Cienciactiva CG 217-2014. El autor quiere agradecer a Clímaco Ccolque por sus sugerencias en la redacción del texto.

ORCID and License

Julio Gutierrez https://orcid.org/0000-0002-2536-6055

Referencias

[1] Abadie B, Eilers S, Exel R. Morita equivalence for crossed products by Hilbert $C^\star$-bimodules. Trans. Amer. Math. Soc. 1998; 350(8):3043-3054.

[2] Bavula V, Jordan D. Isomorphism problems and groups of automorphisms for generalized Weyl algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 2001; 353(2):769-794.

[3] Brzeziński T. Circle and line bundles over generalized Weyl algebras, Algebr. Represent. Theory. 2016; 19(1):57-69.

[4] Cuntz J. K-theory and $C^\star$-algebras, Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis. in: Lecture Notes in Math., vol. 1046. Berlin: Springer; 1984; pp. 55-79.

[5] Cuntz J. Bivariant K-theory and the Weyl algebra, K-Theory. 2005; 35(1-2):93-137.

[6] Gabriel O, Grensing M. Six-term exact sequences for smooth generalized crossed products. J. Noncommut. Geom. 2013; 7(2):499-524.

[7] Pimsner M, Voiculescu D. Exact Sequences for K-groups and Ext-groups for Certain Cross-product $C^\star$-algebras. J. of Operator Theory. 1980; 4(1):93-118.

[8] Pimsner M. A class of $C^\star$-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$. In: Free probability theory (Waterloo, ON, 1995), Fields Inst. Commun., vol. 12: Providence, RI Amer.Math. Soc. 1997; pp. 189-212.

[9] Richard L, Solotar A. Isomorphisms between quantum generalized Weyl algebras, J. Algebra Appl. 2006; 5(3):271-285.

[10] Ruy E. Circle actions on $C^\star$-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence, J. Funct. Anal. 1994; 122(2):361-401.

[11] Valqui C, Gutierrez J. Bivariant K-theory of generalized Weyl algebras. J. of Noncommutative Geometry. 2020; 14(2):639-66.