FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XII
ISSN: 1695-6613

LA MATEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA DESDE LA PERSPECTIVA COMPETENCIAL. CONSECUENCIAS DIDÁCTICAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Martín M. Socas Robayna
Universidad de La Laguna

Con afecto y reconocimiento a Pepi y Cande, en su jubilación, por su colaboración y contribución al desarrollo de la Didáctica de la Matemática.

Resumen

En este trabajo se analiza la Matemática de la Educación Obligatoria desde la perspectiva competencial, tomando en consideración los tres referentes que permiten caracterizar las Matemáticas como disciplina; a saber: el Epistemológico, el Semiótico y el Fenomenológico. Este análisis nos facilitará la organización de las Matemáticas de la Educación Obligatoria desde la perspectiva competencial, en la que emergen los tres procesos específicos de esta disciplina: la sustitución formal, la generalización y la modelización, para analizar posteriormente las consecuencias didácticas que esta perspectiva competencial genera en la formación del profesorado de esta Etapa Educativa.

Abstract

In this paper the Mathematics of Compulsory Education is analysed from the competential perspective, taking into consideration three references: the Epistemological, the Semiotic and the Phenomenological, which allow us to characterize Mathematics as a discipline. This analysis facilitates the organization of Mathematics of Compulsory Education from the perspective of competence, in which the three specific processes of this discipline emerge: formal substitution, generalization and modelling, for the subsequent diagnosis of the didactic consequences that this competence perspective generates in the Teacher Training of this Educational Stage.

Introducción

A grandes rasgos, podemos señalar que, en la Educación Obligatoria, el desarrollo curricular en Matemática ha evolucionado desde el enfoque de la Matemática Básica o Común, caracterizado por enfatizar en los conceptos o estructuras matemáticas, en las técnicas operacionales asociadas a los conceptos matemáticos y en la resolución de problemas-tipo que involucran a estos conceptos, hasta el enfoque actual denominado como Enfoque Competencial.

Este enfoque competencial se caracteriza de forma general y en todas las materias curriculares y, en particular, en Matemáticas por:

- La consideración de las competencias matemáticas como elemento central del currículo de Matemáticas, lo que conlleva una manera determinada de orientar y definir las intenciones educativas en esta materia curricular. Implica, también, modificaciones significativas en los procesos educativos y en la evaluación en Matemáticas.

- La adquisición de las competencias matemáticas, que requiere la movilización conjunta e integrada de diferentes tipos de aprendizajes y de recursos personales, sociales y materiales, en Matemáticas, para resolver con eficacia diversas situaciones problemáticas en contextos reales.

En definitiva, el enfoque competencial pretende que el alumnado sea capaz de comprender y utilizar el conocimiento matemático, reorganizarlo y transferirlo.

Ante esta perspectiva se requiere necesariamente, por parte del profesorado de Matemática de esta etapa educativa, Reflexionar, Explorar y Entender la naturaleza del conocimiento matemático, es decir, analizar y comprender: La naturaleza de los objetos y los métodos matemáticos (EPISTEMOLOGÍA de la Matemática), la significación y funcionalidad de los objetos matemáticos a través de la denotación de los mismos, mediante el lenguaje natural y las representaciones analógicas, digitales y virtuales (SEMIÓTICA) y determinar lo que puede percibirse en una situación problemática de los objetos, métodos y representaciones (FENOMENOLOGÍA).

Es necesariamente, a partir de esta exploración y entendimiento previo de la Matemática, cómo el profesorado de esta etapa educativa puede usar este conocimiento para explorar y entender el Conocimiento Didáctico Matemático y hacer propuestas de enseñanza y aprendizaje coherentes con la perspectiva competencial.

Por ello en este trabajo, que analiza el enfoque competencial en Matemática y reflexiona sobre este, se desarrollará:

En primer lugar, una propuesta técnica que permita al profesorado de Matemática de la Educación Obligatoria, analizar y entender la Matemática de esta etapa educativa desde la perspectiva competencial.

En segundo lugar, se analizarán los conocimientos matemáticos y didácticos para desarrollar coherentemente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática desde la perspectiva competencial.

Se presentará, finalmente, a modo de conclusión, una serie de consideraciones entre los diferentes elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Educación Obligatoria desde la perspectiva competencial.

La Matemática desde la perspectiva competencial

En el análisis de la Matemática desde la perspectiva competencial, se toma en consideración la organización de los objetos de la Matemática en Campos Conceptuales, así como los estadios de desarrollo de los objetos en el campo conceptual. Se concibe también la Matemática como un proceso de Culturización, es decir, se analiza la producción del conocimiento matemático en esta cultura; ello requiere, como hemos señalado con anterioridad, tomar como referencia los tres aspectos esenciales que caracterizan la producción del conocimiento en esta disciplina científica: la Epistemología, considerada desde la perspectiva de los objetos y de los métodos del campo conceptual tratado; la Semiótica, que supone la denotación de los objetos matemáticos por medio de las representaciones, en las que el lenguaje natural y las representaciones analógicas, digitales y virtuales, desempeñan un papel relevante en la significación y funcionalidad de los objetos matemáticos considerados, y la Fenomenología como lo que de los objetos, los métodos y las representaciones matemáticas pueden percibirse en una situación problemática. Tres aspectos que deben ser considerados en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo.

Describiremos a continuación una propuesta técnica que puede facilitar al profesorado de Matemática de la Educación Obligatoria el análisis y la comprensión del conocimiento matemático desde la perspectiva competencial y que se denomina la Competencia Matemática Formal (CMF) (Socas, 2010, 2012 y 2014).

La Competencia Matemática Formal (CMF)

La Competencia Matemática Formal (CMF), como hemos señalado, toma en consideración a la Matemática como una Disciplina Científica que tiene unas características y un orden lógico propio, y muestra la organización formal de su campo conceptual en relación con los conceptos, las funciones y los fenómenos implicados.

En este caso, tomaremos como referencia para caracterizar la Competencia Matemática Formal (CMF) los campos conceptuales: Numéricos, Algebraicos y Analíticos, con especial referencia a los contenidos matemáticos del currículo no universitario y, en particular, de la Educación Secundaria Obligatoria. Trataremos de explicitar, en primer lugar, la organización lógico-formal de los campos conceptuales considerados, es decir, los conceptos, relaciones y procedimientos que la caracterizan, así como las funciones, situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos matemáticos implicados.

El Modelo de Competencia Formal tiene como punto de partida la organización conceptual, funcional y fenomenológica de los objetos matemáticos, y éstos se van a organizar desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado, es decir, por la organización lógica-semiótica de los conceptos, fenómenos y funciones que concrete de forma eficiente (competente) sus diferentes procesos de significación (Socas, 2001 y 2007).

En este análisis vamos a considerar el campo conceptual algebraico y tomaremos ejemplos del Álgebra en ESO y, con el propósito de establecer esta organización lógica semiótica y describir los diferentes procesos de significación, identificaremos la cultura matemática de forma más concreta y con una referencia más explícita al sistema educativo, en términos de entender el conocimiento matemático.

Es conveniente señalar que debemos identificar los objetos matemáticos en dos procesos diferentes, que denominamos de "culturización matemática" (proceso de creación de esta cultura) y de "matematización de la cultura" (proceso de enseñanza y aprendizaje de esta cultura en los sistemas educativos), en el que el primero es parte de una conciencia colectiva (sentido histórico) y el segundo, es parte de una conciencia individual (sentido didáctico).

En este análisis, al intentar caracterizar la Competencia Matemática Formal (CMF), nos estamos refiriendo a los objetos matemáticos del proceso de "culturización matemática" y, por ello, a efectos de simplificar y concretar esta caracterización, tomamos como referencia el Álgebra en el nivel temático de la ESO. En consecuencia, es necesario explicitar y relacionar el campo conceptual algebraico, la fenomenología del conocimiento algebraico y la funcionalidad del lenguaje algebraico.

Campo conceptual del Álgebra

La caracterización del campo conceptual del Álgebra supone, por una parte, organizar la complejidad de los objetos del Álgebra y, por otra, tomar en consideración los diferentes procesos y procedimientos en los que está presente el conocimiento algebraico.

En relación con la complejidad de los objetos del Álgebra, observamos cómo esta opera en dos niveles: semántico -los signos algebraicos son dados con un significado claro y preciso-, y sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-, es decir, en general, los objetos de las Matemáticas (Números y lenguaje numérico, Álgebra y lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un procedimiento; y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que dichos objetos son vistos como una entidad conceptual (estructura). Ambos estatus constituyen, obviamente, dos aspectos integrantes e inseparables de los objetos de la Matemática.

En el sentido anterior, los objetos matemáticos del Álgebra, como todos los objetos matemáticos, tienen un carácter dual que estará presente tanto en los fenómenos que organizan como en las funciones que desarrollan. Necesitamos, en consecuencia, caracterizar esta dualidad operacional/conceptual en el Álgebra, es decir, relacionar los signos con los objetos algebraicos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada de formas diferentes por distintos autores Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Sfard (1991), Socas (2001)…

En los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), esta dualidad se desarrolla bajo las nociones de conocimiento conceptual y procedimental:

“Conocimiento conceptual”, se caracteriza como un conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado y conforma una red de conocimiento. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado.

“Conocimiento procedimental”: se construye en dos partes. Una se compone del lenguaje formal o sistema de representación simbólico de las Matemáticas. La otra, consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una que consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos y otra, en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. Indican que el conocimiento conceptual es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado, mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los citados autores relaciones entre ambos conocimientos, de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas y, c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

Es, ciertamente, una forma sencilla de explicitar a nivel conceptual la dualidad operacional/conceptual, es decir, la convivencia de los tipos de conocimiento, conceptual y procedimental, en Matemáticas.

En Socas (2001), se analiza la dualidad operacional/conceptual en el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en términos de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado. Esquemáticamente se representa así:

SIGNO			OBJETO	SIGNIFICADO (conceptual)	PLANO DENOTATIVO
SIGNO	OBJETO	SIGNIFICADO (procedimental)			PLANO CONNOTATIVO

Fig.1. Triada signo-objeto-significado.

El punto de partida es la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación tríadica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está relacionado con tres instancias separables analíticamente: Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que lo conecta con el objeto), Objeto (es un signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta).

La tríada de Peirce se expresa en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) mediante la tríada: signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta triada en los dos planos de la función semiótica es el objetivo esencial para determinar conceptualmente el papel de los objetos y los signos en el lenguaje algebraico y una forma de expresar la dualidad operacional/conceptual. En ELOS esta dualidad se determina separando el significado en dos: significado conceptual y procedimental, y modelizando tales relaciones mediante el trapecio formado por los dos triángulos, signo-objeto-significado (conceptual) y signo-objeto-significado (procedimental), de la siguiente manera:

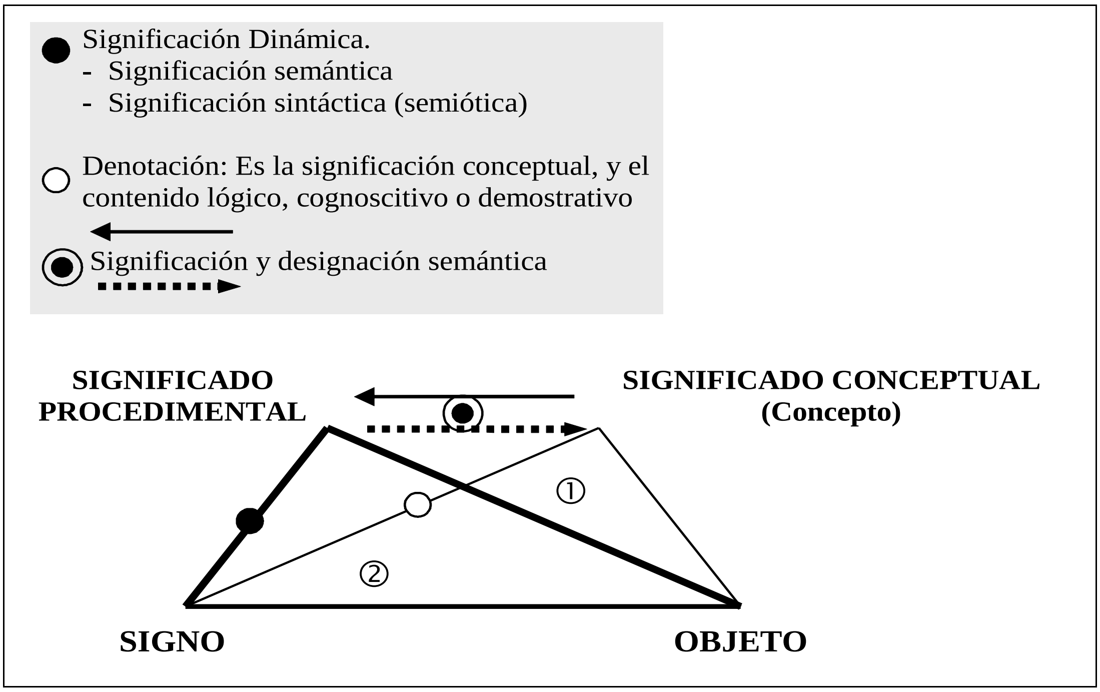

Fig.2. El trapecio de ELOS.

En este esquema, se modelizan las siete relaciones que caracterizan la dualidad operacional/conceptual. Al menos tres de ellas pueden ser descritas en relación con el conocimiento conceptual y procedimental desarrollado en Hiebert y Lefevre (1986). La primera es la relación entre el signo y el conocimiento conceptual, que denominamos "denotación" del signo y se caracteriza como la significación conceptual. La segunda, es la relación entre el signo y el significado procedimental, que denominamos "significación dinámica" y está caracterizada por las dos clases de información que engloba el conocimiento procedimental y que llamamos "significación semántica" y "significación sintáctica", respectivamente. La tercera es la relación entre el significado conceptual y el procedimental, que también se describe someramente por los citados autores, y que relacionan el significado conceptual con el procedimental ("designación semántica") y el significado procedimental con el conceptual (significación semántica"). Las restantes relaciones, por ejemplo, la relación signo-objeto o las relaciones objeto-significado conceptual o procedimental, son aún cuestiones abiertas.

Funciones del Lenguaje Algebraico

Si analizamos las diferentes funciones del Lenguaje Algebraico (y en general del Lenguaje Matemático, en sus diferentes Campos Conceptuales), podemos decir que este se concreta en las cuatro funciones básicas de los lenguajes: “expresiva” (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), “señalizadora” (que evoca, desencadena, estimula..., una reacción en el receptor), además de las “descriptivas” y “argumentadoras”.

Las dos funciones, “expresiva” y “señalizadora”, son consideradas como funciones inferiores de todo lenguaje; no así en el lenguaje matemático (algebraico, por ejemplo). A la función expresiva se le asocia una “percepción primaria” y a la función señalizadora se le atribuye el poder de desencadenar una “actividad perceptual”; ambos procesos deben entenderse como complementarios. Pero el lenguaje algebraico (matemático), al igual que el lenguaje humano, es mucho más rico pues posee dos funciones superiores que son de vital importancia para la evolución del razonamiento matemático y para la racionalidad de los objetos matemáticos; éstas son las funciones “descriptivas” y “argumentadoras”.

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos “las situaciones problemáticas” o “fenómenos” de naturaleza didáctico-matemática, podemos caracterizar los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: “Expresiones semióticas”, “Descripciones algebraicas” y “Argumentaciones algebraicas”.

Las “expresiones semióticas” se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras..., y, en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico.

Las “descripciones algebraicas” se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procesos, algoritmos, operaciones...

Las “argumentaciones algebraicas” son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra, como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien, desde el punto de vista de la Teoría Semiótica, tenemos que suponer que una “expresión de signos matemáticos” no designa un objeto matemático del mundo real sino que transmite un contenido de la cultura matemática. En nuestro caso, aunque el significado del objeto algebraico corresponda con un objeto del mundo cultural (culturización matemática), el contenido algebraico se identifica con el referente, es decir, lo identificamos como objeto cultural y no como unidad cultural. Esta es la posición del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001, 2007).

El conocimiento algebraico y su fenomenología

En el nivel temático considerado, el conocimiento algebraico se entiende como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes y, también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas por medio de relaciones bien definidas. Usiskin (1988), al considerar el Álgebra escolar, entiende que esta es esencialmente la comprensión del significado de las letras y las operaciones con ellas. Este autor propone la siguiente relación: aritmética generalizada (generalizar patrones: traducir, generalizar), medio para resolver ciertos problemas (incógnitas, constantes, resolver, simplificar), estudio de relaciones (argumentos, parámetros, relacionar, hacer gráficas), estructura (signos arbitrarios, manipular, justificar).

Por su parte, Freudenthal (1983) insiste en los aspectos esenciales del Álgebra y trata de presentarla como un lenguaje para ser aprendido y utilizado, con el inconveniente de que en la vida diaria no se emplea con frecuencia y en el contexto escolar no se adquiere de forma natural.

En este marco debemos considerar las diferentes categorías de interpretación y uso de las letras (interesan, más que la notación formal en sí misma, las ideas representadas por esas expresiones), que para Küchemann (1981) son: letras evaluadas (a las que se les asigna un valor numérico desde el principio), letras ignoradas (a las que se les reconoce su existencia, pero no se les asigna ningún significado), las letras como objeto (objeto concreto: frutas, lados de un polígono, etc.), letras como incógnitas específicas (como un número desconocido, pero específico sobre el que se puede operar directamente), letras que generalizan números (como una representación de varios valores numéricos, antes que de uno exactamente) y letras como variables (consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados en el que se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores).

Actualmente, encontramos un cierto acuerdo cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria: “ocuparse del estudio de las "letras" o "variables" y de las propiedades que las relacionan”.

Existen diferentes interpretaciones a la afirmación anterior (Socas et al. 1989): Álgebra como Aritmética generalizada (las letras forman parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas), Álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos (las ecuaciones), Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y Álgebra como modelo estructural.

Encontramos también otras propuestas de organización de los contenidos del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria, en la que estos deben organizarse en torno a la generalización, la resolución de problemas, la modelización y las funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

Se señalan propuestas de organización y fenomenología asociadas a los objetos algebraicos, relacionadas con la generalización y la resolución de problemas entre las que destacan:

(1) Capacidades algebraicas que se deben desarrollar: usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones, trabajar y hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas, sustituir formalmente, generalizar y particularizar, hacer transformaciones en expresiones algebraicas, leer, interpretar y hacer transformaciones en funciones y fórmulas dadas, plantear y resolver ecuaciones por métodos algebraicos y otros.

(2) Usar las letras con significados algebraicos en entornos numéricos y de magnitudes (álgebra de las cantidades) y en entornos geométricos (Álgebra geométrica).

(3) Usar diferentes sistemas de representación semióticos y fuentes de significado: contextual, numérico, visual/geométrico, esquema y formal.

El análisis de los diferentes aspectos del Álgebra: conceptual, funcional y fenomenológico, nos permite describir la Competencia Matemática Formal (CMF) y cómo esta se puede expresar como un modelo de competencia organizado en relación con las tres características de las Matemáticas como disciplina: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, elementos que caracterizan a la disciplina Matemática.

En este caso, vamos a describir la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos: numérico, algebraico y analítico (Socas, 2010). Esta queda caracterizada por la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje (expresivo y descriptivo) y los argumentos.

El campo conceptual de forma esquemática quedaría así:

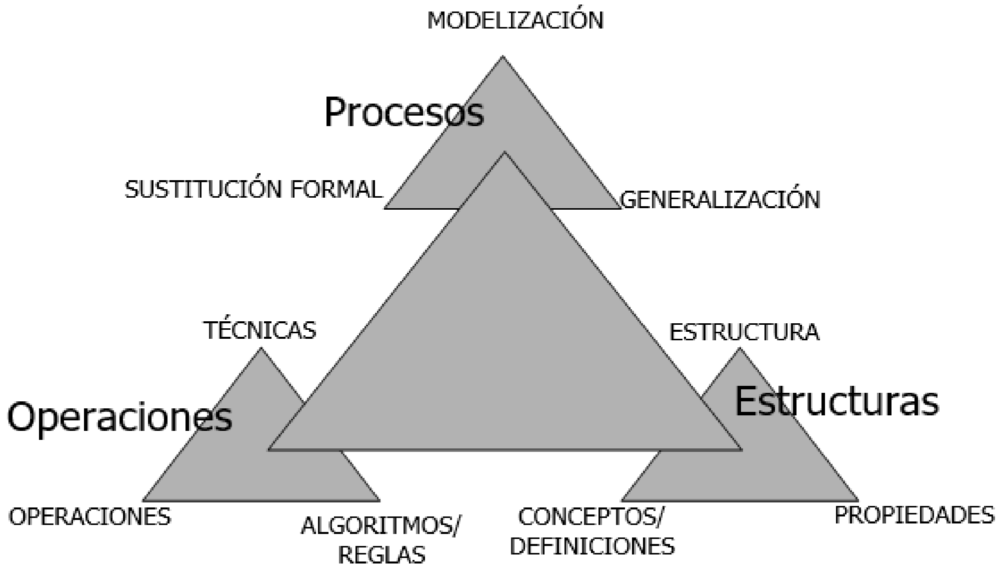

Fig.3. El campo conceptual.

En él se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual desde la perspectiva formal y sus diferentes relaciones, es decir, se amplía la dualidad de los objetos matemáticos en relación con la dualidad conceptual/procedimental, utilizada en el conocimiento de los objetos matemático del campo tratado. Se incorpora, de manera esencial a esta dualidad una tercera componente caracterizada y descrita como procesos, en la que, necesariamente, están involucradas las operaciones y las estructuras (conceptos y propiedades). De manera concreta, si nos situamos en una actividad algebraica relacionada con el Álgebra de la ESO, esta puede y debe ser descrita en relación con las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones, y no únicamente, en la dualidad: Operacional- Conceptual, que, como hemos considerado anteriormente, deja lagunas sin resolver. Se observa igualmente que, a su vez, cada componente está determinado por otros tres componentes que describen una nueva semiosis. La componente "Operaciones" queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente "Estructuras" por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente "Procesos" por: la Sustitución formal, la

Generalización y la Modelización.

A su vez, esta organización de los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico está contextualizada en las Situaciones problemáticas (Problemas) que se abordan en el campo conceptual, en el Lenguaje (Representaciones) y en Razonamientos (Argumentos) que se utilizan en el desarrollo de la Situación problemática (Resolución de problemas)

La contextualización del campo conceptual se expresa de forma esquemática así:

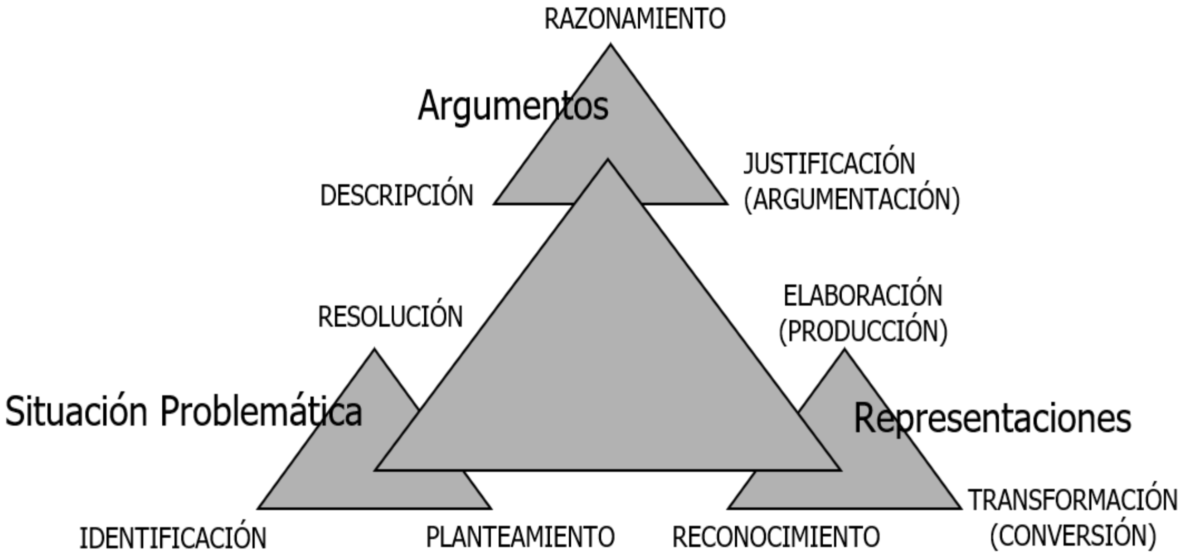

Fig.4. Contextualización del campo conceptual.

Análogamente, en la contextualización del campo conceptual, se observan las tres componentes del contexto, y que estas quedan determinadas por sus respectivas semiosis. En el caso de Situaciones problemáticas (Problemas), por la identificación, el planteamiento y la resolución de la Situación problemática; en el caso de las Representaciones (Lenguaje), por el reconocimiento, la transformación (conversión) y la elaboración (producción) de la representación o representaciones utilizadas y, por último, los Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

El modelo CMF permite describir el campo conceptual del objeto matemático en el nivel temático en el que lo estamos considerando, además de sus funciones y su fenomenología. Es, en consecuencia, un instrumento técnico de gran utilidad, por ejemplo, para analizar significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional, currículo, libros de textos, o para analizar los significados implícitos en situaciones de aprendizaje o tareas matemáticas que queramos proponer al alumnado. Este análisis se realiza mediante la elaboración de "mapas competenciales" de los contenidos tratados y de la situación de aprendizaje o tareas consideradas.

Se proponen a continuación, a modo de ejemplo, dos "Mapas Competenciales". Uno, sobre contenidos matemáticos que queremos analizar para organizar y desarrollar una propuesta de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva competencial y, otro, el Mapa competencial de una situación de aprendizaje (Tarea) que queremos y debemos analizar desde la perspectiva competencial para organizar y facilitar la realización de la situación de aprendizaje (tarea) a nuestro alumnado desde esta perspectiva.

Ejemplo1: Mapa Competencial de fracciones y números decimales (1º ESO)

El Mapa competencial del contenido matemático curricular se completa explicitando el **campo conceptual** y **el contexto** en el que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual numérico, en este caso, en el nivel temático considerado, 1º de la ESO. Se puede expresar de diferentes maneras, una forma apropiada es mediante cuadros que describen y relacionan las dos partes que caracterizan el Mapa Competencial: el Campo conceptual y el Contexto.

En el Currículo o en un Texto de 1º de la ESO, encontramos la descripción de los siguientes contenidos para dicho curso:

> *"Fracciones y números decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Fracción generatriz de un número decimal. Ordenación de fracciones y de números decimales".*

Mapa Competencial de fracciones y números decimales (1º ESO)

En relación con el **Campo Conceptual**, analizamos los contenidos curriculares desde sus tres referentes: Procesos, Estructuras y Operaciones.

PROCESOS

Sustitución formal: Conversión de la representación decimal a la fraccionaria y viceversa, Representación en la recta numérica y Representación discreta y continua.

Generalización: Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica, Fracción decimal y sistema de numeración decimal ampliado.

Modelización: Situaciones problemáticas que involucren fracciones números decimales (porcentajes de cantidades…)

OPERACIONES

- Operaciones aditivas y multiplicativas con fracciones y números decimales
- Ordenar fracciones y números decimales

Algoritmos

- Reducir fracciones a común denominador
- Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador
- Multiplicar y dividir números decimales y fracciones

Técnicas

- Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica
- Representación en la recta de los números racionales en escritura fraccionaria y decimal

Currículo

- *Fracciones y números decimales en entornos cotidianos*
- *Diferentes significados y usos de las fracciones*
- *Fracciones equivalentes*
- *Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente*
- *Fracción generatriz de un número decimal.*
- *Ordenación de fracciones y números decimales*

ESTRUCTURAS

- Fracción: parte-todo, medida, cociente, razón, y operador
- Numerador y denominador
- Fracciones equivalentes
- Fracciones irreducibles
- Fracción y número racional
- Fracción decimal y no decimal
- Fracción decimal y número decimal
- Expresión decimal de un número racional
- Fracción generatriz
- Operaciones con fracciones y decimales. Propiedades

En relación con el **Contexto**, analizamos los contenidos curriculares desde sus tres referentes: Situaciones de aprendizaje (Tareas), Representaciones y Razonamientos.

Contexto de fracciones y números decimales (1º ESO)

ESCRITURAS (representaciones)
- Escritura fraccionaria, decimal y mixta
- Representaciones analógicas discretas y continuas (colecciones, recta numérica y áreas)

RAZONAMIENTOS
- Esquemas: partes-todo, operativos (+, x) y (- , /), y semánticos
- Usos de la fracción: parte-todo, cociente, razón, medida, operador y porcentaje
- Sentido numérico (estimación: fraccionaria, decimal)
- Agrupar y desagrupar en el sistema de numeración decimal ampliado
- Heurísticos
- Deductivos: Esquemas e Inclusión numérica
- Inductivos (relaciones de igualdad)

SITUACIONES DE APRENDIZAJE (Tareas)
- Situaciones de parte-todo, de unión de partes, de transformación (operador), de comparación, de partición de un todo
- Situaciones de partición y reparto
- Situaciones de medida
- Situaciones de representaciones y cambios
- Situaciones de porcentajes de cantidades discretas y continuas

El Mapa del Contenido Matemático desde la perspectiva competencial permite, en consecuencia, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la Competencia Matemática Formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan al alumnado, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

Ejemplo 2: Mapa de una situación de aprendizaje desde el punto de vista competencial

Consideramos, en este apartado, una situación de aprendizaje o situación problemática que se analiza desde la perspectiva competencial. En concreto, se propone un problema verbal de estructura numérica-algebraica en un entorno geométrico.

Situación problemática: Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo? (Ruano, Socas y Palarea, 2014).

El Mapa de esta situación de aprendizaje (tarea) se puede realizar de manera análoga al mapa de un contenido matemático, con la salvedad de que ahora lo conocido es el enunciado de la situación de aprendizaje (tarea), en consecuencia lo que tenemos descrito es el contexto y, a partir de su análisis previo, completamos los diferentes aspectos del campo o campos conceptuales involucrados. De esta manera, podemos caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la Competencia Matemática Formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan al alumnado, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

No desarrollamos de manera explícita el Mapa competencial, en el formato del ejemplo anterior sobre el contenido, sino que analizamos la situación problemática (tarea) desde la perspectiva competencial, partiendo del Contexto.

En este caso, se trata de una situación problemática en la que figuran enunciados verbales, dados en lenguaje natural, que involucran objetos: numérico, geométrico, medida y algebraico y en la que la estructura lingüística no debe presentar, en principio, dificultades. No así los conocimientos semánticos, es decir, el significado de los términos: rectangular, superficie, área, lados, dimensiones, largo, ancho…Sin embargo, sí pueden presentar dificultades, la comprensión global del texto y la estructura del problema: numérico, geométrico, medida, algebraico.

Las representaciones son diversas: lenguaje habitual, numérico, geométrico, medida, algebraico, presentes en la situación problemática y en las necesarias transformaciones en estas representaciones y en la conversión a una nueva representación, y que esta sea operacional.

Los argumentos o razonamientos considerados están relacionados con los esquemas partes–todo, las inducciones o las deducciones realizadas. Los resolutores tienen que construir una totalidad a partir de dos partes conocidas y relacionarla con una totalidad desconocida, para construir la igualdad numérica, algebraica o analítica. En estas relaciones se pueden generar razonamientos inductivos y deductivos.

Considerado el contexto, analizamos el campo conceptual, en el que, en relación con los fenómenos que se pueden dar, podemos distinguir, cuatro situaciones. Como hemos analizado, cualquier situación problemática se sitúa en el conocimiento procesual, en el que se observan, según la propuesta fenomenológica, los procesos de Sustitución Formal; Sustitución Formal y Generalización; Sustitución Formal y Modelización o Sustitución Formal, Generalización y Modelización.

Es decir, podemos distinguir cuatro situaciones:

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una situación operatoria de naturaleza multiplicativa en la que conoce el resultado y uno de los factores del producto, previa conversión de la situación problemática verbal al lenguaje numérico, teniendo en consideración las estructuras geométricas y de medida implícitas en el enunciado del problema.
- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una modelización geométrica-numérica en la que, realizando una sustitución formal (conversión de registro al lenguaje gráfico o numérico), y considerando las estructuras geométricas implícitas en el enunciado de la tarea (área, longitud,…), utilizan una técnica para determinar el resultado mediante operaciones.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una generalización algebraica, para lo cual deben ser capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, y plantear de todos los rectángulos de área $8 \cdot x$, la ecuación adecuada para el que tiene 64 m^2 de superficie, esto es: $160 = 8 \cdot x$, siendo x la medida de la longitud del frente del nuevo terreno. En este caso, atenderemos a las estrategias utilizadas para la resolución de la ecuación (tanteo, procedimientos aritméticos, algebraicos o la combinación de varios) y a la comprobación (validación) de que el resultado satisface las condiciones del problema.
- Los resolutores pueden dar un paso más allá e interpretar la situación planteada como una modelización funcional en la que realizan una generalización, entendiendo que la situación planteada es una particularización del caso general $f(x) = 8x$, que relaciona el área de todos los rectángulos de ancho 8 metros y largo desconocido.

En resumen, se trata de una situación problemática que puede presentar dificultades para el alumnado, ya que su resolución exige el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, en el que se relacionan diferentes campos de la Matemática, como el geométrico, que requiere el dominio de conceptos asociados a la Geometría: superficie, área, dimensiones, longitud, largo, ancho y, por lo tanto, el reconocimiento de la estructura geométrica implícita en el problema, además de las estructuras numéricas, algebraicas y de medida, dependiendo de la conversión de la situación problemática a otra representación en las que hay que hacer transformaciones.

Como hemos señalado, análogamente, el Mapa competencial de una situación de aprendizaje, también lo podemos describir explicitando, en los respectivos cuadros, el contexto y el campo conceptual. En este caso, el punto de partida es el contexto, para elaborar después el campo conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la Situación de Aprendizaje, en términos de operaciones, estructuras y procesos.

Consideraciones finales

En primer lugar, debemos resaltar que hemos tratado de fundamentar una propuesta técnica y operativa que nos permita VER y ANALIZAR la Matemática desde la Perspectiva Competencial y que caracterizamos como CMF (Competencia Matemática Formal).

Esta propuesta considera la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y tiene en cuenta el estadio de desarrollo de los objetos en el campo considerado. En su desarrollo la CMF se fundamenta y analiza considerando los campos conceptuales: Numérico, Algebraico y Analítico, desde el punto de vista disciplinar, aunque las referencias concretas se dan para el campo conceptual algebraico, que nos permite conectar con el numérico y con el analítico.

También queremos señalar, finalmente, que en el análisis y la reflexión sobre la Cultura Matemática, esta se identifica como un proceso de Culturización Matemática, es decir, de la producción del conocimiento en esta cultura, en la que se distinguen y analizan los aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica, a saber, el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo.

En este análisis de la Matemática desde la perspectiva competencial, a partir de la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y de los estadios de desarrollo de los objetos en dichos campos, se considera la cultura matemática como un proceso de culturización matemática, es decir, de producción del conocimiento en esta cultura.

En este sentido se ponen de manifiesto los tres referentes básicos y fundamentales del objeto matemático: el Semiótico, el Epistemológico y el Fenomenológico, que obviamente están mutuamente relacionados, y que se explicita su organización y sus relaciones mediante la (CMF) la Competencia Matemática Formal, referente esencial y necesario del análisis del contenido matemático y que se desarrolla desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2007, 2010 y 2012).

Conviene reflexionar desde esta perspectiva sobre los Objetivos de la Educación Matemática. Se comparte, en general que es fundamental en la Educación Matemática que el profesorado debe analizar y comprender la naturaleza del conocimiento matemático, es decir, analizar y comprender la naturaleza de sus objetos y los métodos matemáticos asociados, es decir emerge la componente: EPISTEMOLOGÍA de la Matemática, al menos en la etapa educativa en la que se va a desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Estos Objetivos de la Educación Matemática se pueden concretar en:

(1) Analizar y comprender:

- La naturaleza de los objetos y los métodos matemáticos (EPISTEMOLOGÍA de la Matemática)
- La significación y funcionalidad de los objetos matemáticos por medio de la denotación de los mismos mediante el lenguaje natural y las representaciones analógicas, digitales y virtuales (SEMIÓTICA)
- Lo que puede percibirse en una situación problemática de los objetos, métodos y representaciones (FENOMENOLOGÍA)

(2) Usar este conocimiento, como punto de partida para explorar y entender el conocimiento Didáctico Matemático y mejorar la Educación Matemática en su ámbito de actuación en el Sistema Educativo.

Otra consideración relevante es la presencia del componente "Procesos" en la Descripción del Campo conceptual, que se concreta en tres tipos de procesos denominados como: Sustitución Formal, Generalización y Modelización, que amplía la restrictiva visión de los objetos matemáticos bajo la dualidad: Conceptual- procedimental.

Comentaremos en esta reflexión final la tercera componente de los procesos: La Modelización. Conocemos que las diferentes perspectivas sobre la Modelización Matemática dan lugar a diferentes enfoques sobre la aplicación de la construcción de Modelos en el aula como uso para la resolución de diferentes situaciones problemáticas (Tareas).

Señalaremos, por la necesaria brevedad, la posición desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), para describirla y caracterizarla fenomenológicamente, y relacionarla con la CMF. La Modelización Matemática es identificada como el proceso matemático por excelencia, y se determinan los elementos matemáticos básicos (objetos), así como las diferentes relaciones que estos tienen entre sí.

La noción de Modelización Matemática propuesta desde ELOS, es coherente con el desarrollo histórico de las Matemáticas y se considera como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a jugar el papel de sistema (matemático) y así sucesivamente, es decir, la Modelización Matemática tiene carácter recursivo en la Cultura Matemática

Desde ELOS, a partir de una Situación problemática o de la formulación de una tarea de modelización, que supone su identificación o reconocimiento, esta se puede describir mediante cinco pasos o momentos, que facilitan el planteamiento y la resolución, y que caracteriza matemáticamente la Modelización Matemática: (1) Sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) Matematización o formulación en términos de la regla; (3) Resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el análisis del modelo construido; (4) Validación (verificación) de la regla; y (5) Interpretación.

En ELOS, como hemos analizado, se propone la Competencia Matemática Formal (CMF) como un instrumento técnico del análisis de contenido matemático, que facilita al profesorado de Matemáticas, el análisis de los significados atribuidos a los objetos matemáticos desde diferentes perspectivas: institucional, currículo, libros de texto…, a la vez que también resulta de gran utilidad para caracterizar el dominio de la actividad matemática, de las diferentes tareas que se propongan al alumnado y, en consecuencia, analizar e interpretar las producciones del alumnado en la realización de estas tareas, así como organizar los errores y hacer conjeturas sobre las dificultades, obstáculos y su origen, lo que resulta fundamental desde el punto de vista de la docencia, y también de la investigación, que no es nuestro cometido en este trabajo.

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001, 2007 y 2014) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias: Competencia Matemática Formal (CMF), también contempla la Competencia Cognitiva (CC) y la Competencia de Enseñanza (CE), que de manera específica no se abordan en este trabajo.

En relación con la Organización del Contenido Matemático, este se puede organizar, como hemos visto, mediante la Competencia Matemática Formal (CMF).

El objetivo de análisis en este trabajo es la CMF, que hemos presentado como una propuesta de organización Fenomenológica del conocimiento matemático: numérico, algebraico y analítico, que integra las perspectivas epistemológica y semiótica.

Esta Organización Fenomenológica debe ser considerada como un Conocimiento Técnico, que se desarrolla en la práctica educativa con la finalidad de mejorar la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas desde la perspectiva competencial.

En relación con la finalidad educativa, hemos visto que facilita la reconstrucción del conocimiento matemático desde la perspectiva global de la Cultura Matemática, es decir, desde la Competencia Matemática; la Organización del contenido matemático para la enseñanza, desde la Competencia Matemática Básica y desde los fines de la Matemática en el Currículo, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial para el contenido curricular del primer curso de la ESO relativo a números racionales y decimales; y la caracterización de las situaciones de aprendizaje (actividades) matemáticas desde su perspectiva competencial, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial de los conocimientos implicados en una situación problemática.

En resumen, el modelo CMF es considerado en ELOS, como una organización fenomenológica de los objetos de la "Matemática" que integra las dimensiones epistemológica y semiótica, y que puede ser utilizado en la Educación Matemática como un Sistema de Posicionamiento general y específico, constituido por las tres categorías universales del conocimiento: Epistemología, Semiótica y Fenomenología, que utiliza la triangulación (Semiosis) para determinar las posiciones de los objetos matemáticos en la Cultura Matemática y también, aunque aquí no se ha descrito, en la Matematización (Socas, 2007).

Hay, evidentemente, diferentes maneras de expresar la Competencia Matemática, que por falta de espacio, no hemos comentado aquí, pero sí citaremos a algunos de estos autores o instituciones (Niss, 1999, 2003), (Rico y Lupiáñez, 2008), (OCDE (PISA), 2003)…

Y terminaremos con unas breves consideraciones sobre la Matemática en la Educación Secundaria Obligatoria desde las perspectivas Epistemológica, Semiótica y Fenomenológica. La Matemática es vista, a veces, bajo tres aspectos esenciales:

- SISTEMA CONCEPTUAL lógicamente organizado y socialmente compartido (Epistemología)
- LENGUAJE simbólico característico que constituye un sistema de signos propios (Semiótica)
- ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS socialmente compartida (Epistemología)

La Matemática, vista bajo los tres aspectos anteriores, se desarrolla como una buena práctica (praxis) considerando:

- Conceptos, Propiedades y Ejemplos (Mediante representaciones o situaciones canónicas o estereotipos) (Epistemología)

- Operaciones asociadas a las reglas (sintácticas) del Sistema de representación de los objetos (Semiótica)

- Métodos de Resolución de problemas (Tipos o prototípicos) (Epistemología)

La Pregunta inevitable es: ¿QUÉ PENSAMIENTO MATEMÁTICO SE DESARROLLA CON ESTA PROPUESTA?

En ELOS, como punto de partida, la Matemática es también considerada bajo los tres aspectos anteriores:

- SISTEMA CONCEPTUAL lógicamente organizado y socialmente compartido (Epistemología)
- LENGUAJE simbólico característico que constituye un sistema de signos propios (Semiótica)
- ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS socialmente compartida (Epistemología)

Ante la ausencia de respuestas para explorar y comprender el Conocimiento Didáctico Matemático, en la Educación Obligatoria, incorpora al estudio la necesidad de <u>establecer la Naturaleza de los objetos matemáticos y su Fenomenología </u>(entendida como lo que puede percibirse en una situación problemática de los objetos, su naturaleza, métodos y representaciones).

1. La Matemática es una disciplina MULTIFORME (Epistemología) y sus objetos admiten MÚLTIPLES REPRESENTACIONES (Fenomenología)

2. La Cultura Matemática emerge y se desarrolla como una ACTIVIDAD HUMANA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (Epistemología)

3. Los Problemas tienen una característica común en todas las Formas: LA BÚSQUEDA DE REGULARIDADES, CIRCUNSTANCIAS COMUNES O PATRONES (Identificación, Planteamiento y Resolución) (Epistemología)

4. El problema matemático por excelencia es LA MODELIZACIÓN que se relaciona siempre con el proceso de SUSTITUCIÓN FORMAL (Epistemología y Fenomenología)

5. La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios (Semiótica) para expresar los comportamientos regulares o patrones y las circunstancias comunes

6. El Conjunto de regularidades o patrones y las circunstancias comunes se organizan en CAMPOS CONCEPTUALES (Formas) (Epistemología)

7. Los elementos de estos campos conceptuales son los OBJETOS MATEMÁTICOS (Epistemología)

8. Los objetos matemáticos se desarrollan siguiendo los estadios: Semiótico, Estructural y Autónomo (Fenomenología)

El modelo CMF es una propuesta de organización del conocimiento matemático: numérico, algebraico y analítico, desde tres perspectivas: Epistemológica, Semiótica y Fenomenológica.

Es un Conocimiento Técnico, que se desarrolla con dos finalidades:

1. Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas

2. Reconstrucción del conocimiento matemático (perspectiva global de la Cultura Matemática)

- Organización del contenido matemático para la enseñanza (Competencia Matemática Básica y fines de la Matemática en el Currículo)

- Caracterización del dominio de la actividad matemática

Terminaremos este análisis reflexivo con dos citas apropiadas:

- Como señaló René Thom (1923-2002): “El verdadero problema al que se enfrenta la Enseñanza de las Matemáticas no es el rigor, sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos” (Howson, 1973, p. 202). En este sentido, en relación con los contenidos matemáticos curriculares, el MCF ayuda a caracterizar el significado y la naturaleza de los objetos matemáticos en los campos numérico, algebraico y analítico, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- En relación con las actividades de aprendizaje, debemos señalar que el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas nos debe permitir situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que el alumnado debe

identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que esta sea la respuesta inicial del alumnado. Sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar los diferentes itinerarios que siguen los alumnos.

Como reflexiona Radford (2013), el propósito de la tarea que se propone, no debe estar totalmente claro para el alumnado, sí para el profesorado. Es esta asimetría una característica esencial de las tareas propuestas en un proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Podríamos señalar como Corolario, una condición necesaria y emergente en los contextos de la enseñanza- aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un control epistemológico, semiótico y fenomenológico, por el profesorado implicado de los conocimientos matemáticos y didácticos implícitos en las tareas de enseñanza y aprendizaje propuestas.

Referencias bibliográficas

Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Montreal: Kluwer.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11,* 77-110.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Howson, G. (Ed.) (1973). Developments in Mathematical Education. *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*, Cambridge U. Press: Cambridge.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 40(1), 1-24.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, pp. 115-124.

OCDE (2003). *PISA 2003 Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OCDE.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid, España: Taurus.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro, 3-12*. Granada, España: Comares.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruano, R.; Socas, M.M. y Palarea, M.M. (2014). La Modelización Matemática en el Modelo de Competencia Matemática Formal. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 11. 217-250.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1),* 1-36.

Socas, M.M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.

Socas, M.M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X,* 9-42.

Socas, M.M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular. En Arnau, D., Lupiáñez, J. L. y Maz, A. (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Socas, M.M. (2014). El Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF). Una organización fenomenológica de las Matemáticas de la Educación Obligatoria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática XI,* 9-43.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al*

Álgebra. Madrid, España: Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. F. Coxford, y A. P. Shulte (Eds.). *Ideas of Algebra, k-12*, pp. 8-19. Reston, VA: NCTM.