DIFICULTADES Y ERRORES EN DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES DE ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Dolores Moreno Martel
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Martín Manuel Socas Robayna
Universidad de La Laguna

Víctor Manuel Hernández Suárez
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se presenta un resumen de una investigación llevada a cabo con un grupo de 38 estudiantes de primer curso del Grado en Educación Primaria de la ULPGC, con el objetivo de describir y analizar algunos de sus errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas. Debido a que nuestro objetivo era fundamentalmente descriptivo, hemos utilizado un instrumento propio de la metodología cualitativa como son los cuestionarios.

Este estudio se realiza sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. A partir de las respuestas a un cuestionario, realizamos una clasificación de los errores cometidos y analizamos sus posibles orígenes. Finalmente, formulamos algunas consecuencias didácticas que se derivan de estos resultados.

Abstract

This paper presents a summary of an investigation carried out with a group of 38 students of the first year of the Degree in Primary Education of the ULPGC, with the aim of describing and analyzing some of their errors and difficulties in learning the inequations in order to improve the teaching-learning process of these. Because our objective was basically descriptive, we used an instrument of the qualitative methodology such as questionnaires.

This study was done related with three specific processes of algebraic language: Formal substitution, generalization, and modelling. Using a test, we develop a students´ errors classification, and we analyze its possible origins. Finally, we present some didactical conclusions from the results.

1. Introducción

Muchos estudiantes encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje del Álgebra. Para el profesor, es importante conocer los errores básicos cometidos por los alumnos, puesto que le provee de información sobre la forma en que estos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esta información le permitirá arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores.

Numerosos profesores e investigadores, preocupados por las dificultades que el aprendizaje del Álgebra ocasiona a los estudiantes, han realizado diferentes investigaciones sobre el método de aproximación a ella más adecuado. Diferentes autores apuestan por la generalización como vía de introducción del Álgebra en la escuela. Mason (1996) considera que la generalización es la sangre, el corazón de las Matemáticas. En cambio, Freudenthal (1983) piensa que la sustitución formal engloba al resto de los procesos y, por tanto, es la mejor forma de iniciar su tratamiento. Para otros, el mejor método de comenzar la enseñanza-aprendizaje del Álgebra es desde la perspectiva de la modelización, enfatizando la fase de formulación del modelo (Janvier, 1996).

El estudio de los errores cometidos por los alumnos en los distintos procesos mencionados proporciona información sobre las ventajas e inconvenientes de utilizar una u otra forma de introducir el Álgebra en el ámbito escolar.

Nuestra experiencia y los resultados de las investigaciones aportadas por autores como Duval y Vinner (entre otros), nos han llevado a reflexionar acerca de cómo nuestros estudiantes han aprendido, o interiorizado, diferentes conceptos matemáticos.

Con frecuencia se detecta, en el aprendizaje de conocimientos matemáticos por parte de nuestros estudiantes, un problema que se ha denominado disociación algoritmia/conceptualización, y se refiere a las dificultades que muestran los estudiantes para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos y los algoritmos o procedimientos asociados a estos, en la resolución de determinados problemas.

En las investigaciones realizadas, se destacan las siguientes observaciones:

- Los intentos de resolución de problemas por parte de los estudiantes se basan generalmente en técnicas de resolución meramente algebraicas, propias de la enseñanza tradicional.

- Los estudiantes muestran serias dificultades para enfrentarse a situaciones problemáticas por sí solos y para resolverlas.

- Muchas veces no consiguen asociar los conceptos que han estudiado con su utilidad en los diferentes contextos.

- Normalmente, no reconocen el momento en que deben o pueden aplicar algún concepto matemático, algoritmo o método de resolución.

La responsabilidad de esto, recae sobre ellos, pero también en la tarea del profesor que, tradicionalmente, ha favorecido el contexto algebraico y el algorítmico para resolver situaciones problemáticas en detrimento de los contextos numéricos y gráficos o visuales, que han sido infrautilizados.

Los trabajos de Vinner, Eisenberg y Dreyfus resaltan los siguientes aspectos:

- Existe un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual.

- La resistencia de los estudiantes a usar contextos gráficos, visuales.

- Los profesores somos responsables de este predominio del aspecto algebraico sobre el gráfico.

- Es el profesor quien debe planificar y dirigir un conjunto de actividades que tiendan a generar actividad intelectual por parte del alumno.

Los alumnos aprenden a resolver sistemas de ecuaciones con distintos métodos, derivan e integran funciones, las representan y estudian sus gráficas siguiendo una serie de algoritmos o procedimientos algebraicos y analíticos, pero cuando se trata de resolver problemas en los que haya que determinar un patrón o modelo algebraico que permita reconocer y analizar el comportamiento de un fenómeno o proceso y avanzar así hacia la resolución, muestran bastantes dificultades.

Consideramos que si al estudiante se le proporciona la oportunidad de interactuar con el objeto de estudio en los diferentes contextos (gráfico, algebraico y numérico), éste puede entonces comprender las manipulaciones algebraicas que se derivan de los procesos de resolución de las situaciones problemáticas.

Por otro lado, los resultados de las investigaciones realizadas por autores, entre los que destacan Shoenfeld (1994), Duval (1999) y Herscovics (1980), resaltan las dificultades encontradas en relación con la significación convencional de las ecuaciones lineales. Esta significación convencional, para la ecuación $ax + by = c$, con a, b, c distintos de cero, es la de que todos los pares de valores que la satisfacen son coordenadas de puntos de una recta, y viceversa (Courant y Robbins, 1941). Más adelante, el trabajo de Hoyos (1999) plantea la construcción de una ecuación lineal a partir de su imagen gráfica como una situación apropiada para favorecer la transición entre dos tipos diferentes de pensamiento algebraico: "Variable visual de la representación-Unidad significativa de la escritura algebraica".

Son varios los investigadores que han indagado en torno a la construcción de las ecuaciones lineales a partir de su imagen gráfica.

Herscovics (1980), véase Hoyos (1998), considera el aprendizaje del Álgebra como una parte del aprendizaje del lenguaje matemático.

De acuerdo con dicho autor, un nuevo concepto puede introducirse conectándolo con uno simple o con un concepto equivalente conocido por el estudiante.

Esquematizamos a continuación una representación básica, que deben conocer los estudiantes para diferenciar las ecuaciones de las inecuaciones de primer grado:

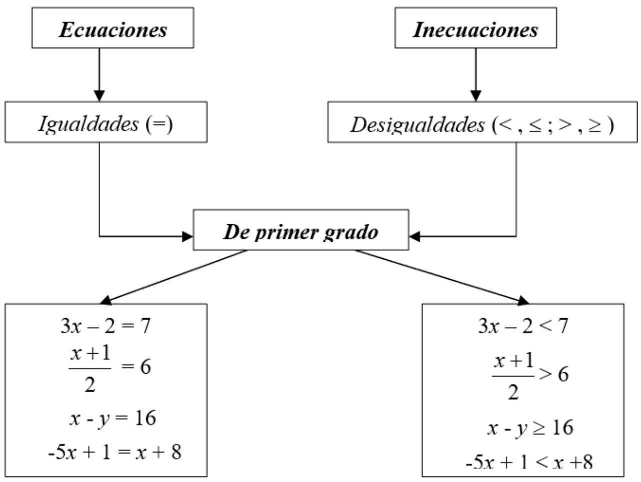

Figura 1. Representación básica sobre ecuaciones e inecuaciones de primer grado

También se les debe aclarar que: "Resolver una inecuación de primer grado significa hallar los valores que debe tomar la incógnita para que se verifique la desigualdad".

Con este planteamiento, nos referimos aquí al tratamiento de las desigualdades algebraicas, para lo que proponemos el estudio de algunos ejemplos desde tres contextos diferentes: numérico, analítico y gráfico.

Así, el objetivo fundamental de este trabajo será el de analizar dificultades y errores en desigualdades e inecuaciones lineales de estudiantes del Grado de Educación Primaria de la ULPGC. En definitiva, analizaremos y clasificaremos los errores cometidos en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización.

2. Marco conceptual

El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra se puede apoyar en algunas teorías de la psicología cognitiva. En este sentido, la mente del alumno no es una página en blanco, sino que éste posee un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual ha de responder a las preguntas que él mismo se haya formulado. En ningún caso, el nuevo conocimiento se añade al antiguo; al contrario, le crea un conflicto al alumno porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, de modo que posteriormente se produce una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido.

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980), “los errores son intentos razonables, pero no exitosos, de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94). Entendemos que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Abordaremos el estudio de los errores tomando como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que nos permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo

- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas y emocionales.

Consideramos el obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983). Organizamos los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico como se muestra en la Figura 2.

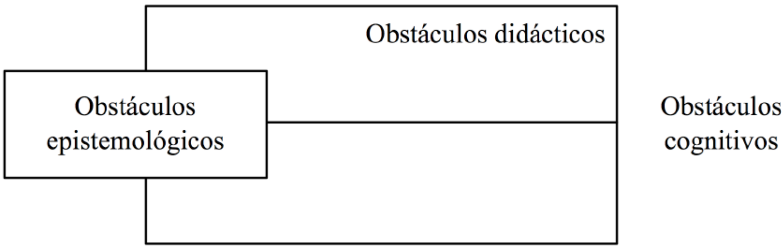

Figura 2. Organización de obstáculos en el sistema didáctico

La presencia de obstáculos epistemológicos, fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy. Esta diferenciación se indicará de manera explícita en algunos ejemplos.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

1. Errores del Álgebra, que tienen su origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

2. Errores de procedimiento, en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.

3. Errores del Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en Álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc. Debemos señalar también que el hecho de atribuir una letra a un número desconocido o a un objeto matemático es necesariamente una sustitución formal y, a su vez, también una generalización. El hecho de establecer una relación entre letras y números es, obviamente, una modelización en la que la sustitución formal y la generalización están presentes. No obstante, a pesar de esta necesaria e implícita relación entre los tres procesos en la cultura matemática, consideramos que podemos diferenciarlos desde un punto de vista epistemológico. En este trabajo, el estudio de errores se realiza por separado en cada proceso, lo que nos mostrará indicios sobre cuál de ellos presenta las mayores dificultades.

3. Metodología

La población, objeto de estudio, la constituyen treinta ocho alumnos del primer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC).

El instrumento de recogida de información que hemos utilizado es un cuestionario (ver Anexo). Éste está constituido por diez problemas tipo (edades, dinero, magnitudes…) de inecuaciones lineales. Todos, excepto el ítem 7, están contextualizados. Los enunciados se han tomado de distintos libros de texto y de páginas web, y su redacción ha sido corregida para evitar interpretaciones erróneas. Asimismo, un tribunal de expertos, formado por los componentes de este grupo de investigación (Pensamiento numérico y algebraico), lo ha revisado. También, se ha realizado el análisis del contenido matemático de éste, que mostramos de forma parcial en el apartado siguiente.

La implementación del cuestionario se llevó a cabo en una única sesión de dos horas en el curso 2014/15.

3.1 Análisis del contenido matemático del cuestionario

En este apartado presentamos el análisis del contenido matemático del cuestionario de tres ítems del total, por ser representativos del resto.

1. *Inmaculada tiene 20 años menos que Juana. Si las edades de ambas suman menos de 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Inmaculada?*

Abordamos este análisis determinando el campo conceptual y el contexto de este problema (Ítem 1). Comenzamos por el análisis del campo conceptual. Para ello, describimos los contenidos conceptuales, operacionales y procesuales.

Los conceptuales son:

- Los números naturales.
- Igualdades y desigualdades numéricas.

- Ecuaciones algebraicas lineales.
- Inecuaciones algebraicas lineales.

Los operacionales son:

- Comparaciones entre números naturales.
- Operaciones aditivas y multiplicativas con números naturales en igualdades y desigualdades.
- Operaciones aditivas y multiplicativas en igualdades y desigualdades algebraicas.

Los procesuales son:

- Sustitución formal.
- Generalizaciones (numéricas y algebraicas).
- Modelizaciones (gráficas, numéricas y algebraicas).

Con respecto al contexto, podemos comentar que se trata de una situación problemática contextualizada relacionada con los problemas clásicos de edades. Las representaciones, que componen parte del mapa de los conocimientos, son las siguientes:

- Digitales (numéricas y algebraicas).
- Analógicas (gráficas).
- Mixtas (numérica gráfica y numérica algebraica).

Este mapa queda completo con la explicitud de los razonamientos, a saber:

- Deductivo
- Partes-todo
- Inductivo

- Heurísticos de Polya: simplificar, ensayo y error, eliminar, analogía, empezar un problema desde atrás, construir modelos, buscar regularidades y generalizar.

El segundo problema que vamos a analizar es el ítem 4, cuyo enunciado es éste:

2. Salvador tiene una bolsa de caramelos. Si compra 4 caramelos, tendrá más de doce en total y si regala 7 tendrá menos. ¿Cuántos caramelos tenía Salvador en la bolsa?

En este caso, el mapa de los conocimientos de este problema es semejante al anterior, pero encontramos dos diferencias. La primera, en los contenidos operacionales añadimos que se da una comparación entre desigualdades algebraicas y, la segunda, en el tipo de situación problemática: "añadir y quitar caramelos".

El tercer problema, ítem 7, se enuncia de la manera siguiente:

3. Resuelve la inecuación lineal $2x - 3 < x - 5$ y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

En este problema, el campo conceptual queda definido de la siguiente manera:

- Contenidos conceptuales (Números reales. Inecuación lineal).

- Contenidos operacionales (Comparación entre números reales. Operaciones aditivas y multiplicativas con números reales. Operaciones aditivas y multiplicativas en desigualdades algebraicas).

- Contenidos procesuales (Sustitución formal. Modelización numérica, algebraica y gráfica).

En relación con el contexto, la situación problemática es un problema tipo de inecuaciones descontextualizado. Las representaciones que están presentes son:

- Digitales (numérica y algebraica).
- Analógicas (gráficas).
- Mixtas (recta numérica).

Finalmente, los razonamientos son: Partes-todo, deductivo, inductivo y los heurísticos de Polya.

En el siguiente apartado, mostramos los resultados obtenidos de la implementación del cuestionario y haremos un análisis de éstos.

4. Análisis de los resultados

La revisión de los cuestionarios nos ha permitido encontrar los comportamientos comunes y generales en las respuestas del alumnado que se citarán seguidamente. Los comportamientos se describen de acuerdo con los tipos de modelizaciones empleadas en la resolución de las cuestiones y en la globalidad de cada cuestionario.

A) Aritméticas (1/38).

B) Algebraicas (ecuaciones) y numéricas (3/38).

C) Algebraicas (ecuaciones) y gráficas (1/38).

D) Algebraicas (ecuaciones) (3/38).

E) Algebraicas (inecuaciones) y aritméticas (4/38).

F) Aritméticas y algebraicas (ecuaciones e inecuaciones) (1/38).

G) Algebraicas (ecuaciones e inecuaciones) (6/38).

H) Algebraicas (inecuaciones) (9/38).

I) Otras (10/38).

Podemos observar que las modelizaciones con más porcentajes indican un cierto dominio del conocimiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Sin embargo, existen alumnos que recurren a las aritméticas para la resolución de los problemas y, en algunos casos, las combinan con algebraicas.

Las respuestas dadas a las preguntas del cuestionario, se han valorado teniendo en cuenta el análisis del contenido matemático del cuestionario realizado. En este artículo, presentamos solo las respuestas de los ítems seleccionados por representar, al menos, un tipo de situación problemática de cada una de las planteadas. Para ello, consideramos las siguientes modelizaciones: aritmética, algebraica (ecuación), algebraica (inecuación) y gráfica. En la siguiente tabla exponemos los resultados obtenidos.

	Modelización aritmética	Modelización algebraica (ecuación)	Modelización algebraica (inecuación)	Modelización gráfica
Ítem 1	5/38	9/38	9/38	-
Ítem 4	3/38	9/38	12/38	-
Ítem 7	1/38	6/38	16/38	1/38
Ítem 8	2/38	3/38	2/38	-
Ítem 9	8/38	5/38	7/38	-

Las dificultades, obstáculos y errores encontrados en el análisis de los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes son:

a) Planteamiento de una inecuación que se resuelve como una ecuación y se da una única solución. Este mismo resultado lo hallamos en otros estudios similares (Tsamir, Almog y Tirosh, 1998; Garrote, Hidalgo y Blanco, 2004).

b) Problemas en la conversión del lenguaje natural al digital, al escribir la ecuación o la inecuación.

c) "x" es "a" unidades mayor que "y", se interpreta como $x = ay$.

d) No resolución de la inecuación planteada.

e) Resolución del problema teniendo en cuenta una sola de las dos desigualdades existentes ($x + 4 > 12$ y $x - 3 < 12 \Rightarrow x > 12 – 4 = 8$).

f) Interpretación incorrecta del intervalo solución, $x < -2$, como $(-2, -\infty)$.

g) Resolución aritmética incorrecta (en el ítem 1: $86 - 20 = 66$).

Con respecto al origen de estos errores, pensamos que en la mayoría de los casos está en una ausencia de sentido (Socas, 1997).

En el apartado a), el alumno no diferencia la modelización algebraica ecuación de la de inecuación y no se observa la transición de lo semiótico a lo estructural.

En el apartado b), existe una dificultad en la sustitución formal, es decir, en la conversión del lenguaje natural al digital.

En el apartado c), se confunde la comparación por diferencias con la comparación por cociente.

En los apartados d) y e), encontramos un desconocimiento de las técnicas de resolución de inecuaciones lineales.

En el apartado f), la ausencia de sentido está relacionada con la sustitución formal de la conversión de la modelización algebraica a la de la recta numérica.

En el apartado g), el estudiante no reconoce la modelización algebraica.

5. Conclusiones

Con relación al objetivo planteado, y teniendo en cuenta el análisis de los resultados obtenidos, podemos concluir que: la mayor parte de las dificultades y errores encontrados pueden estar relacionados con los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación: semiótico, estructural y autónomo (Socas, 1997) de los estudiantes.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS POR EL CONTEXTO				
	Problema tipo: Edades	Problema tipo: Magnitud (peso, tiempo y dinero)	Problema tipo: Otro	Problema tipo: Descontextualizado
	Ítem 1, **Ítem 8**	Ítem 2, Ítem 5, **Ítem 9,** Ítem 10	Ítem 3, **Ítem 4**	Ítem 6, **Ítem 7**

Encontramos que el uso de los esquemas de análisis descritos anteriormente ha resultado útil para organizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas. En aquellas en que las respuestas son abiertas, previamente a la organización de los errores, hemos empleado redes sistémicas que nos ayudan a ver cuáles son los razonamientos seguidos por los alumnos. Ahora bien, estas estrategias, que nos han permitido organizar los diferentes errores, no nos permiten identificar con garantías sus distintos orígenes. Es necesario completar con datos obtenidos mediante entrevistas clínicas a los alumnos que nos proporcionarán detalles sobre el proceso seguido a la hora de responder a las preguntas.

En general, los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso. Sin embargo, hay algunos que se han repetido independientemente del proceso desarrollado: la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Parece conveniente prestar especial atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del lenguaje algebraico, fijándonos principalmente en su origen.

Otros muchos errores tienen su origen en una ausencia de sentido. En algunos casos, son errores que están relacionados con cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética. De aquí que sea importante identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el Álgebra.

Determinado el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las Matemáticas. Para dar sentido a un objeto matemático no es suficiente con mostrar un contraejemplo, cosa que los profesores hacen usualmente. Por eso, parece razonable recurrir también a otras situaciones que creen esquemas fáciles de recuperar, por estar apoyados en distintos sistemas de representación y no solamente en argumentos formales. La superación de los obstáculos es ciertamente difícil puesto que el conocimiento que tiene el alumno le ha sido útil en múltiples ocasiones. Aun así, su aparición es interesante ya que su superación va a implicar la adquisición de un conocimiento nuevo y mejor.

En definitiva, independientemente del origen del error, su superación requiere una participación activa del estudiante. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en la mente del alumno a partir de la inconsistencia de sus propios errores, y buscar estrategias para que participe activamente en la resolución del conflicto, para que pueda sustituir los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada.

Por otra parte, creemos que se deben proponer estrategias didácticas que incorporen las representaciones gráficas en la resolución de desigualdades e inecuaciones. Estas se plantean desde tres contextos diferentes: numérico, analítico y gráfico. Se toma como base la necesidad puesta de manifiesto por diversos teóricos como Duval y Vinner, entre otros, respecto del uso y conexión de distintas representaciones o contextos. Ellos señalan que los profesores de Matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual, por lo cual hay resistencias de los estudiantes al uso de consideraciones visuales.

De esta manera, debemos resaltar la trascendencia que el pensamiento visual tiene para lograr el acceso y utilización de los conceptos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Francia: De Vrin.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. London, United Kingdom: Croom Helm.

Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On the reluctance to visualize in Mathematics*. En Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Mathematical Association of America, pp. 25-37.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Filloy, E.; Rojano, T. (1984). *From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 years old)*. Proceedings of the Sixth Annual Conference for the PME, North American Chapter (pp. 51-56), Madison, WI: University of Madison.

Filloy, E.; Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel.

Garrote, M.; Hidalgo, M.J. y Blanco, L.J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma* 46, 37-44.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (1), 59-78.

Hoyos, V. (1998). *Revisitando la construcción de significado en torno de las Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas: Observaciones Empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad*. Investigaciones en Matemática Educativa II, Edición del 35 Aniversario del CINVESTAV, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hoyos, V. (1999). *Conexiones entre dominios matemáticos distintos: El caso de la geometría y el Álgebra básicas*. http://perl.ajusco.upn.mx/piem/inve99.html

Janvier, C. (1996). *Modelling and the initiation into algebra*. En N. Bednarz, K. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 225-236). Dordrecht, Holland: Kluwer.

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra*. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 65-86). Dordrecht, Holland: Kluwer.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 3(1), 93-166.

Ríos, M.C. y Hernández, V.M. (2003). Recursos didácticos gráficos para el tratamiento de las desigualdades. *Formación del profesorado e investigación* *en educación matemática*, Vol. V, 279-295. La Laguna: CAMPUS.

Ruano, R. y Socas, M.M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la sustitución formal, la generalización y la modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, Vol. III, pp. 239-265. La Laguna: CAMPUS.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.

Sfard, A.; Linchevski, L. (1991). *Rules without reasons as processes without objects. The case of equations and inequalities*. Proc. PME XV, Assisi, II, 1-36.

Sfard, A.; Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Socas, M.M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

Socas, M.M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Tsamir, P.; Almog, N. y Tirosh, D. (1998). *Students´ Solutions of Inequalities*. Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psichology of Mathematics Education (PME), V. 4, pp. 4-129. University of Stellenbosch (South Africa).

Vinner, S. (1989). The Avoidance of visual considerations in Calculus Students. En *Focus on learning problems in Mathematics*. Center for teaching / learning of Mathematics. V. 11, pp. 149-156.

ANEXO

Cuestionario de inecuaciones

1. Inmaculada tiene 20 años menos que Juana. Si las edades de ambas, suman menos de 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Inmaculada?
2. Si en medio kg de manzanas se puede tener de 4 a 6 manzanas, ¿cuál es el menor peso que puede obtenerse con 9 docenas de manzanas?
3. ¿Cuál es el menor número de libros que tiene Carlos, tal que aumentado en 23, y dividido entre 13, resulta una cantidad ≤ 8?
4. Salvador tiene una bolsa de caramelos. Si compra 4 caramelos, tendrá más de doce en total y si regala 7 tendrá menos. ¿Cuántos caramelos tenía Salvador en la bolsa?
5. Una compañía cobra 4 € la hora por el alquiler de un coche. Francisco no puede gastar más de 72 € en una semana paseando en coche. ¿Cuál es la cantidad máxima de tiempo que puede utilizar Francisco en un coche alquilado en la semana?
6. Encuentra los números que verifican la siguiente propiedad: el doble menos uno es mayor que el número aumentado en 4 unidades.
7. Resolver la inecuación lineal $2x - 3 < x - 5$ y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
8. Un padre es 22 años mayor que su hijo. Determina en qué periodo de sus vidas la edad del padre supera en más de 6 años al doble de la edad del hijo.
9. Una fábrica paga a sus vendedores 10 € por artículo vendido más un fijo de 500 €. La fábrica de la competencia paga 15 € por artículo vendido y un fijo de 300 €. ¿Cuántos artículos debe vender el vendedor de la competencia para ganar más dinero que el de la primera fábrica?
10. Manuel, un conserje, debe mover un cargamento de libros del primer al quinto piso. El letrero del ascensor dice “peso máximo 400 kg”. Si cada caja de libros

pesa 35 kg, el conserje pesa 85 kg y debe subir con las cajas de libros, ¿cuál será el número máximo de cajas que puede colocar Manuel en el ascensor?