ISSN: 1695-6613

HACIA LA ELABORACIÓN DE UN MARCO METODOLÓGICO PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA HACIENDO USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Matías Camacho Machín
María Candelaria Afonso Martín
Universidad de La Laguna

Mar Moreno Moreno
Universidad de Alicante

Resumen

En este artículo se presenta el análisis de la resolución de una tarea dentro de un marco de formación de profesores de Matemáticas para la Educación Secundaria. La investigación se desarrolló en aula con estudiantes de la Facultad de Matemáticas a los que se les propuso la resolución de tres tareas haciendo uso de lápiz y papel y, posteriormente, con el software de Geometría Dinámica *Geogebra*. El objetivo final es el de configurar un marco de referencia que permita a los estudiantes apropiarse de la citada herramienta como un instrumento que enriquezca la actividad matemática realizada durante el proceso de resolución de problemas de Matemáticas.

Abstract

This article analyses the resolution of a task within a framework of teacher training for Secondary Education. The research was conducted in the classroom with students from the Faculty of Mathematics who were proposed the resolution of three tasks using pencil and paper and the Dynamic Geometry Software known as *Geogebra*. The ultimate goal is to set up a methodological framework that allows students to appropriate the tool as an instrument to enrich the mathematical activity in the process of solving mathematics problems.

Camacho, M.; Afonso, Mª. C. y Moreno, M. (2014). *Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica*, pp. 81-104

Introducción

Desde hace varios años, en la Facultad de Matemáticas, se imparten dos cursos de Didáctica de las Matemáticas; en uno de ellos se realiza un taller de formación con un software de Dinámica (en los últimos años el denominado *Geogebra*). En términos de la *aproximación instrumental* propuesta por (Rabardel, 1995; Trouche 2005), podemos afirmar que el trabajo que se propone en el taller es, eminentemente, de instrumentalización. El objetivo es que los participantes resuelvan tareas matemáticas haciendo uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), lo que les permitirá dominar los aspectos técnicos de dicho software. La experiencia desarrollada durante todos estos años y la escasa presencia de la tecnología en las aulas de Secundaria nos ha hecho replantearnos la validez de la metodología de enseñanza seguida, y preguntarnos: ¿por qué esos estudiantes para profesores que, supuestamente, manejan el software con destreza, cuando llegan a serlo, no usan estas herramientas tecnológicas con sus alumnos en sus aulas? ¿Por qué, si en las propuestas curriculares se recomienda explícitamente el uso de la tecnología, los profesores no elaboran y trabajan actividades haciendo uso de ella? Creemos que para encontrar respuestas a estos interrogantes hay que profundizar e investigar en la manera en que los futuros profesores realizan su trabajo de formación haciendo uso de las diferentes herramientas digitales.

El proceso de enseñanza seguido durante este período de la formación de los futuros profesores de Matemáticas ha estado guiado por la idea de que el dominio de la técnica del software era suficiente para llegar a ser profesores de Matemáticas competentes, no sólo tecnológicamente competentes. La realidad es que los profesores noveles son incapaces de emplear las tecnologías digitales con sus alumnos y la formación recibida no les ha permitido descubrir el potencial de los SGD como recurso útil para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato. Creemos que un aspecto fundamental que debe tenerse en cuenta en la formación de profesores es la metodología para desarrollar su propio aprendizaje en el manejo de las herramientas tecnológicas, así como el tipo de tareas matemáticas susceptibles de ser usadas como instrumentos de la formación de los futuros profesores, que ayuden a descubrir el potencial de la tecnología en el aprendizaje de las Matemáticas. Hemos comprobado que el aprendizaje instrumentalizado y técnico no es suficiente para apropiarse de la herramienta, más allá de su utilización para ilustrar conceptos. Diversas investigaciones (Camacho y Santos-Trigo, 2006; Santos-Trigo, Camacho-Machín y Moreno-Moreno, 2013 y Santos-Trigo, Camacho-Machín y Olvera-Martínez., 2014) corroboran la necesidad de proporcionar a los estudiantes, durante su formación como profesores, oportunidades de utilización del software dinámico para construir, relacionar, conjeturar, justificar propiedades matemáticas, etc.; en definitiva, para enriquecer la actividad matemática que surge de forma natural en situaciones de resolución de problemas.

El trabajo que proponemos aquí es parte de un proyecto de investigación más ambicioso: “La Resolución de Problemas y la Tecnología en la formación y desarrollo profesional del profesor de Matemáticas" [1] , con el que tratamos de caracterizar los tipos de conocimientos que necesitan los futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, para ser capaces de desarrollar actividades de

[1] Proyecto con referencia EDU2011-29328 del Plan Nacional I+D+i del Ministerio de Educación y competitividad

resolución de problemas en el aula, haciendo uso de herramientas computacionales, así como avanzar en la elaboración de un marco de referencia que pueda ser utilizado por los futuros profesores de Matemáticas de Secundaria que les ayude a estructurar y organizar la enseñanza de los contenidos matemáticos basándose en el uso de herramientas tecnológicas, en ambientes de Resolución de Problemas (Moreno, Camacho y Azcárate, 2012). Nos encontramos actualmente en la fase de diseño, experimentación y evaluación de tareas que respondan a una metodología que permita configurar un marco metodológico basado en la resolución de problemas y para el que el empleo de la tecnología resulte relevante.

Por tanto, los objetivos específicos de esta investigación son:

- Determinar y describir, si es el caso, de qué manera los SGD enriquecen la actividad matemática que emerge durante el proceso de resolución de problemas.
- Elaborar un protocolo que guíe la resolución de las tareas y que favorezca la apropiación de los SGD como recurso en la enseñanza de las Matemáticas.

Marco Conceptual

El conocimiento matemático de los profesores de Secundaria desempeña un papel importante en la enseñanza de la disciplina; sin embargo, resulta necesario investigar los efectos de ese dominio del conocimiento de los profesores en los escenarios de enseñanza y aprendizaje. Este dominio del conocimiento matemático no es suficiente para promover una comprensión conceptual en sus futuros alumnos de Secundaria a partir de su práctica de enseñanza. Habitualmente se utiliza el término *conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)* para referirse a lo que los profesores deben conocer en términos de contenidos, representaciones, formas de pensar, actuar y utilizar para que sus estudiantes desarrollen un conocimiento matemático sólido y profundo. Esta idea avalada por diferentes investigaciones (Ball, Thames y Phelps, 2008; Davis y Simmt, 2006) sugiere algunas preguntas de investigación pertinentes sobre la relación entre el conocimiento matemático de los profesores y la calidad de la enseñanza:

¿Cómo se expresa ese conocimiento en la práctica de la enseñanza? Por ejemplo, ¿los profesores con más dominio del conocimiento matemático ofrecen diferentes formas y estrategias de enseñanza y enfocan su atención hacia la construcción de significados y conexiones de conceptos de sus estudiantes? ¿Solamente muestran menos errores matemáticos que sus colegas con menos dominio de la disciplina o tema en estudio? ¿Qué es lo que distingue a un profesor con un sólido conocimiento matemático para la enseñanza en sus prácticas en el aula? ¿Cómo la deficiencia de conocimiento matemático para la enseñanza restringe el desarrollo de las actividades en el aula?, entre otras. Para Conner, Wilson y Kim (2011), la competencia matemática para la enseñanza de los profesores de Secundaria se estructura en torno a tres dimensiones o categorías que no son independientes, sino que son componentes interrelacionadas que caracterizan el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza:

- Habilidad matemática (aspectos de conocimientos y habilidades matemáticas).
- Actividad matemática (Procesos para hacer Matemáticas).
- Trabajo matemático de la enseñanza. (Habilidades que faciliten a los profesores la integración de sus conocimientos y los procesos para aumentar la comprensión de sus alumnos).

Cada una de estas componentes contiene categorías y subcategorías que enfatizan diferentes aspectos de la competencia matemática para la enseñanza. En el trabajo que hemos realizado con estudiantes de Matemáticas nos centramos en la componente de la *actividad matemática*, por lo que analizaremos aspectos relacionados con: la estructura de los sistemas matemáticos, el uso del simbolismo, la argumentación, el razonamiento matemático, la justificación, prueba, conjetura, la generalización, las restricciones, el uso de los sistemas de representación, el uso de la definición, etc.

Otro hecho cada vez más importante para los profesores es la necesidad de incorporar en sus escenarios de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas el uso sistemático de varias herramientas tecnológicas para ayudar a los alumnos de Secundaria a desarrollar una comprensión de las Matemáticas basada en su competencia para resolver problemas. El currículo de Bachillerato en el REAL DECRETO 1467/2007 hace explícito este hecho:

> [...] Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados, sin dejar de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple.
> [...]La resolución de problemas tiene carácter transversal y será objeto de estudio relacionado e integrado en el resto de los contenidos. Las estrategias que se desarrollan constituyen una parte esencial de la educación matemática y activan las competencias necesarias para aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos reales.

Esta necesidad de incorporar la tecnología para el aprendizaje de las Matemáticas está generando cuestiones sobre las propias creencias del profesor, el conocimiento de la herramienta, el conocimiento del profesor para apropiarse de la tecnología, en general, y de los SGD, en particular, para la enseñanza de las Matemáticas. De esta forma, ha surgido el constructo teórico “Technological Pedagogical Content Knowledge”-TPCK (Koehler y Mishra, 2009) que integra el conocimiento sobre la tecnología con la idea inicial del conocimiento didáctico del contenido de

Shulman para caracterizar la interacción entre el conocimiento del contenido, la cuestiones propias de la enseñanza y la tecnología. Como investigadores nos interesa reconocer los desafíos a los que deben enfrentarse los futuros profesores de Matemáticas al incorporar los recursos tecnológicos en su enseñanza, y una manera eficiente de cómo los estudiantes para profesores aprenden a usar los SGD para potenciar la actividad matemática en los alumnos de Secundaria (Wilson, Lee y Hollebrands, 2011; Tondeur, et al., 2012).

En nuestra investigación se realiza un trabajo de colaboración entre varios investigadores de distintos centros en los que se forman profesores de Educación Secundaria, con el objetivo de desarrollar y evaluar el diseño de un conjunto de problemas o tareas en los términos que hemos señalado en el apartado anterior. Nos fijamos en la actividad matemática que exhiben los estudiantes para profesores al resolver un problema de optimización con lápiz y papel, y lo comparamos con la actividad matemática que surge cuando se incorpora el SGD para su resolución y se les plantean tres preguntas para guiar la reflexión sobre la tarea.

Metodología

La investigación se desarrolla con 10 estudiantes de la asignatura optativa *Didáctica de las Matemáticas II* de tercer curso de la Licenciatura de Matemáticas. El equipo investigador seleccionó varias tareas extraídas de libros de texto de Bachillerato o similares y, posteriormente, se analizaron las potencialidades de dichas tareas a partir de su resolución, discusión y análisis de diferentes maneras de resolución.

El trabajo experimental se dividió en tres fases. En una primera fase se presentaron a los estudiantes tres de las tareas para que las resolvieran individualmente haciendo uso exclusivo de lápiz y papel. La segunda fase, consistió en desarrollar un taller de formación con el SGD, que constó de 8 sesiones de una hora, con la finalidad de que los estudiantes adquiriesen un dominio de técnicas de instrumentalización para su uso. Finalmente, en la tercera fase, los estudiantes resolvieron por parejas las tres mismas tareas haciendo uso del software *Geogebra*. Para ayudarles a reflexionar sobre la actividad matemática y el uso del SGD se les plantearon tres preguntas:

1. ¿Qué otras formas de resolución de cada una de las tareas te sugiere *Geogebra*?
2. ¿Puedes plantear una actividad que permita extender la situación inicial propuesta?[2]
3. ¿Cuáles son los nuevos conocimientos matemáticos que intervienen en la resolución que no se han tenido en cuenta en la solución hecha con lápiz y papel?

Para el análisis de la actividad matemática de los estudiantes se utilizaron las respuestas suministradas en la Fase 1 (lápiz y papel) y las correspondientes soluciones que fueron realizadas por las cinco parejas de estudiantes haciendo uso de *Geogebra* (Fase 3). En este trabajo, presentamos exclusivamente el análisis de las diferentes soluciones desarrolladas por los estudiantes para la Tarea 1 :

TAREA 1. En un libro de texto se encuentra el siguiente problema: "Sea ABCD un rectángulo. El segmento *AB* tiene una longitud de 6,5 cm, y el *BC* tiene una longitud de 4 cm. Sea M un punto sobre el segmento *AB*, N un punto sobre *BC*, P sobre *CD* y Q es un punto sobre el segmento *DA*. Se cumple además que $AM=BN=CP=DQ$. ¿Dónde debería estar localizado el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga área mínima? ¿Podrías buscar diferentes formas de resolver la tarea que te ayudaran a presentar a tus futuros alumnos de Secundaria

[2] Se entiende por "extender la situación inicial", a la acción de modificar los datos del problema con la intención de encontrar resultados similares a los de la tarea, o bien nuevas propiedades o relaciones (Santos-Trigo, Camacho-Machín, 2009)

3El análisis detallado de la tarea puede verse en (Santos-Trigo, Camacho-Machín, y Olevera- Martínez, 2014)

A continuación se presentan y discuten las soluciones anteriormente indicadas:

Fase 1 (Lápiz y papel). Las estrategias utilizadas para resolver la tarea son:

- Sustractivas: minimizar el área del cuadrilátero obtenido como diferencia del área del rectángulo inicial menos la de los triángulos interiores, de tres formas, a saber: los estudiantes:

  - o Calculan el área de los cuatro triángulos (Figura 1a).
  - o Componen los triángulos interiores y forman dos rectángulos y calculan sus áreas.
  - o Calculan el área de los dos triángulos diferentes y asumen la igualdad de los demás, bien por paralelismo, bien visualmente.

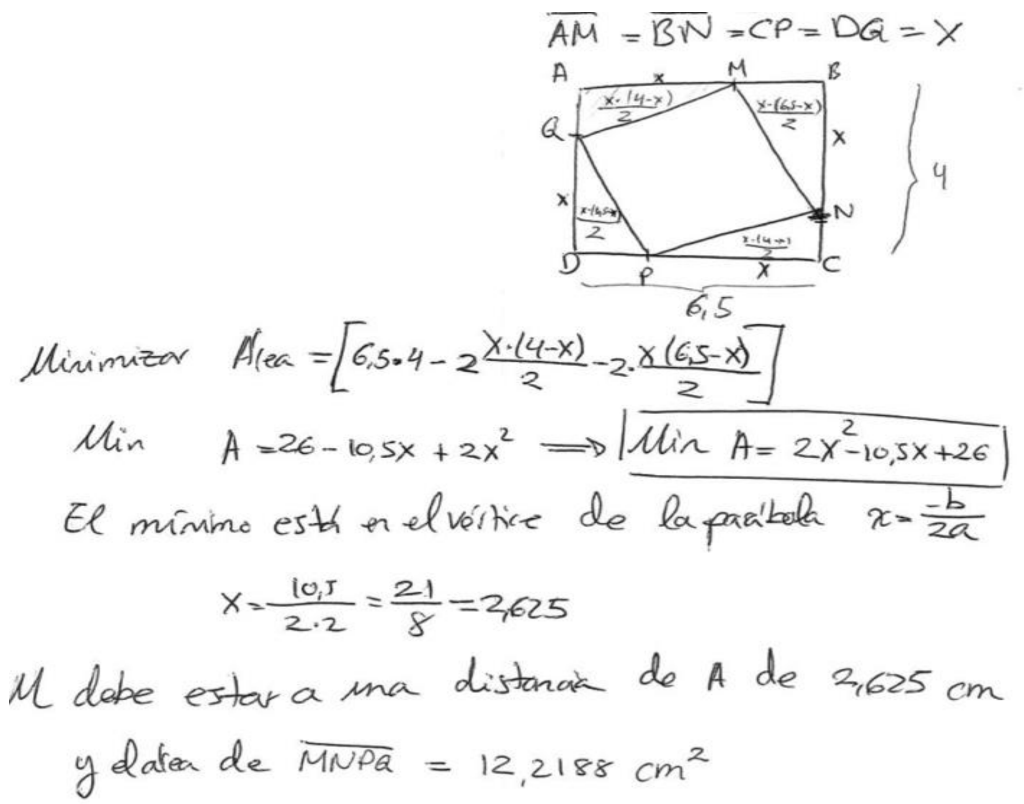
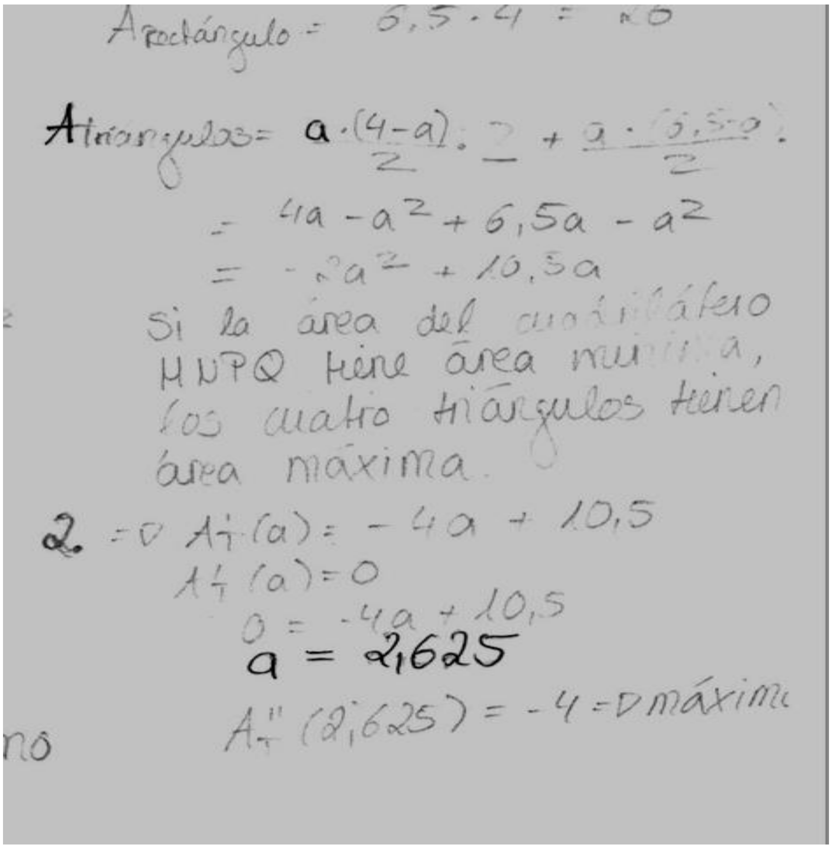


Figura 1a. Resolución de la Tarea 1 de Marco

- Aditivas: maximizar el área de los triángulos interiores, como vemos en la resolución de Elia (Fig. 1b).



$A_{rectángulo} = 6,5 \cdot 4 = 26$

$A_{triángulos} = a \cdot \frac{(4-a)}{2} \cdot 2 + \frac{a \cdot (6,5-a)}{2} \cdot 2$

$= 4a - a^2 + 6,5a - a^2$

$= -2a^2 + 10,5a$

Si la área del cuadrilátero MNPQ tiene área mínima, los cuatro triángulos tienen área máxima.

2. $\Rightarrow A_T'(a) = -4a + 10,5$

$A_T'(a) = 0$

$0 = -4a + 10,5$

$a = 2,625$

$A_T''(2,625) = -4 \Rightarrow$ máximo

Figura 1b. Resolución de la Tarea 1 de Elia.

- Elia añade como otro método de solución, distancias y razones trigonométricas para calcular la función área del cuadrilátero interior y calcular la derivada, si bien ésta resulta ser demasiado compleja lo que la hace desistir.

- Óliver utiliza el sistema cartesiano para definir los vértices del rectángulo y justifica que el cuadrilátero inscrito es un paralelogramo considerando sus lados como vectores que verifican la condición de paralelismo; posteriormente, calcula el área de los triángulos y la maximiza. Añade como otra posibilidad el hecho de calcular el área del paralelogramo, pero indica que "sería más complicado al no ser un rectángulo; además, la posición en la que se encuentra la figura MNPQ, complicaría mucho los cálculos" (Fig. 2a y b).

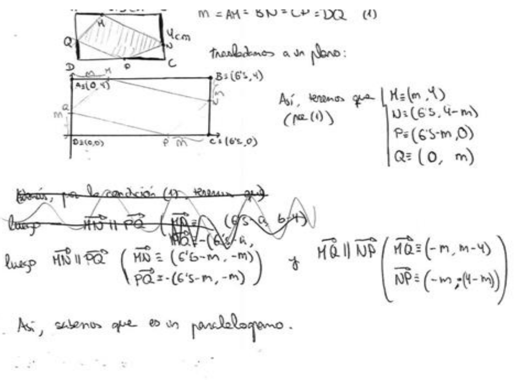


Fig. 2a. Comentario de Óliver

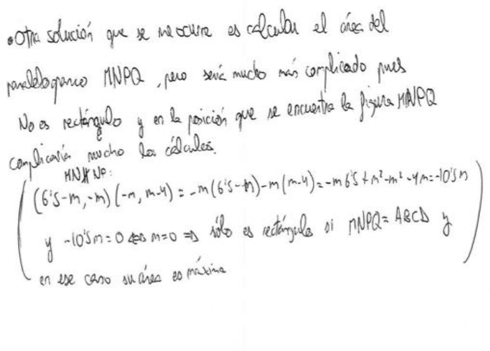


Figura 2b (continuación)

Para la obtención del área mínima, los estudiantes:

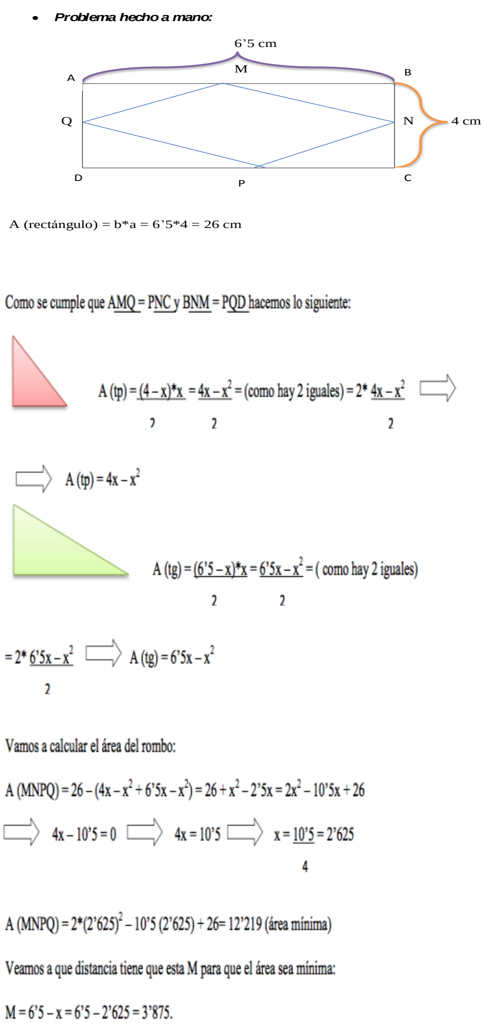
- Hallan la derivada primera y la igualan a cero, si bien hay ausencia de comprobación y justificación de por qué el valor obtenido corresponde a un mínimo.
- Calculan la derivada primera y la derivada segunda, aunque no se explicita la condición suficiente de optimización.
- Reconocen que la función para minimizar es una parábola y obtienen el mínimo en “x=-b/2a” (vértice de la parábola).

En general, se observa falta de rigor en las soluciones presentadas; tampoco utilizan una notación algebraica adecuada, a pesar de que el cálculo algebraico es el que mayoritariamente emplean casi todos los estudiantes en la resolución de la tarea. Asimismo, destacamos la ausencia de demostraciones o justificaciones adecuadas, que serían esperables dado el nivel académico en el que se encuentran los estudiantes (3.º de la Licenciatura en Matemáticas). Las pocas justificaciones son visuales y da la impresión de que consideran que no se necesita otro tipo de argumentación más rigurosa y formal.

Pasamos a continuación a analizar el trabajo de los estudiantes realizado con el SGD. En primer lugar, se analizan las aportaciones (si existen) a la solución dada en la Fase 1, y su respuesta a la primera pregunta: *¿Qué otras formas de resolución para cada una de las tareas te sugiere Geogebra?* Posteriormente se analizan las extensiones y una reflexión sobre los conocimientos matemáticos que aporta el empleo de la tecnología. La Fase 2, tal como se indicó, fue un taller de formación y no requiere de análisis.

Fase 3 (*Geogebra*-Por parejas): la práctica totalidad de las parejas "copian" la resolución desarrollada individualmente en la Fase 1, si bien aprovechan las potencialidades que les ofrece el software para incorporar los dibujos que se interpretan del enunciado y conseguir con ello que se obtengan unas imágenes más precisas. Se observan evidencias de que existen ciertas diferencias en la forma en la que cada pareja utiliza el software y, por lo tanto, en el papel que éste desempeña. A continuación mostramos algunas resoluciones interesantes.

- Para la pareja de Alicia-Josefina, la primera parte de la resolución es una copia exacta del procedimiento realizado por Alicia en la resolución de "lápiz y papel" (Fase 1). En el documento que presentan, reproducen tres imágenes con distintas posiciones para el punto M y señalan cuál es la solución a partir de una prueba empírica (Fig. 3a y 3b).



- ***Problema hecho a mano:***

A (rectángulo) = b*a = 6'5*4 = 26 cm

Como se cumple que AMQ = PNC y BNM = PQD hacemos lo siguiente:

$$A\,(tp) = \frac{(4-x)*x}{2} = \frac{4x-x^2}{2} = (\text{como hay 2 iguales}) = 2*\frac{4x-x^2}{2} \Rightarrow A\,(tp) = 4x - x^2$$

$$A\,(tg) = \frac{(6'5-x)*x}{2} = \frac{6'5x-x^2}{2} = (\text{como hay 2 iguales}) = 2*\frac{6'5x-x^2}{2} \Rightarrow A\,(tg) = 6'5x - x^2$$

Vamos a calcular el área del rombo:

$$A\,(MNPQ) = 26 - (4x - x^2 + 6'5x - x^2) = 26 + x^2 - 2'5x = 2x^2 - 10'5x + 26$$

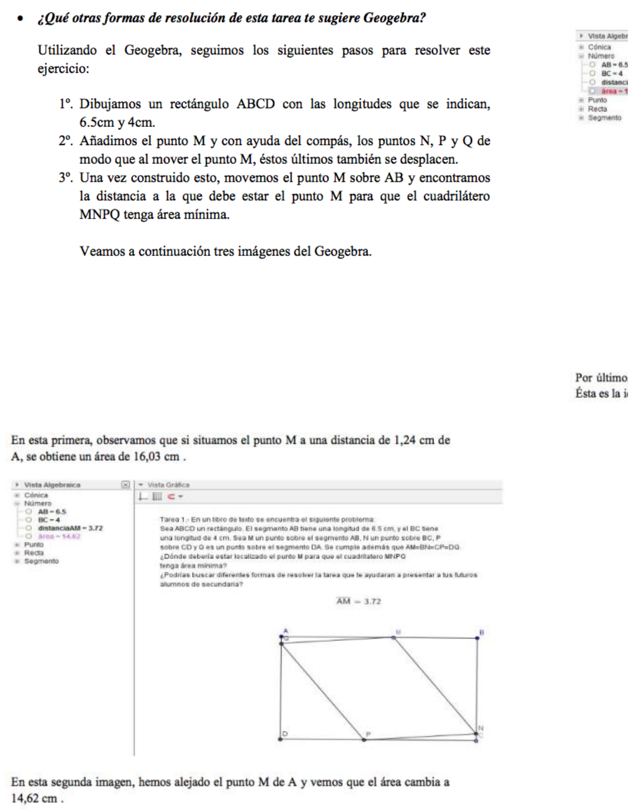
$$\Rightarrow 4x - 10'5 = 0 \Rightarrow 4x = 10'5 \Rightarrow x = \frac{10'5}{4} = 2'625$$

$$A\,(MNPQ) = 2*(2'625)^2 - 10'5\,(2'625) + 26 = 12'219 \text{ (área mínima)}$$

Veamos a que distancia tiene que esta M para que el área sea mínima:

$$M = 6'5 - x = 6'5 - 2'625 = 3'875.$$

Figura 3a



- ***¿Qué otras formas de resolución de esta tarea te sugiere Geogebra?***

Utilizando el Geogebra, seguimos los siguientes pasos para resolver este ejercicio:

1º. Dibujamos un rectángulo ABCD con las longitudes que se indican, 6.5cm y 4cm.
2º. Añadimos el punto M y con ayuda del compás, los puntos N, P y Q de modo que al mover el punto M, éstos últimos también se desplacen.
3º. Una vez construido esto, movemos el punto M sobre AB y encontramos la distancia a la que debe estar el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga área mínima.

Veamos a continuación tres imágenes del Geogebra.

Por último
Ésta es la i

En esta primera, observamos que si situamos el punto M a una distancia de 1,24 cm de A, se obtiene un área de 16,03 cm .

En esta segunda imagen, hemos alejado el punto M de A y vemos que el área cambia a 14,62 cm .

Figura 3b

- La pareja Adela-Paloma hace una descripción literal del procedimiento de construcción, basado en el empleo casi exclusivo de la línea de edición de *Geogebra* y obtiene empíricamente, como la pareja anterior, el valor mínimo del área (12'22 unidades cuadradas).

- En la pareja Edna-Marco, cobra fuerza la resolución que Marco proponía en la Fase 1 y opta por obtener el vértice de la parábola. Sus miembros son capaces de conectar tres modos de representación: geométrico, numérico y el gráfico, y comprueban la igual de la solución obtenida en cada uno de los sistemas de representación (Fig. 4).

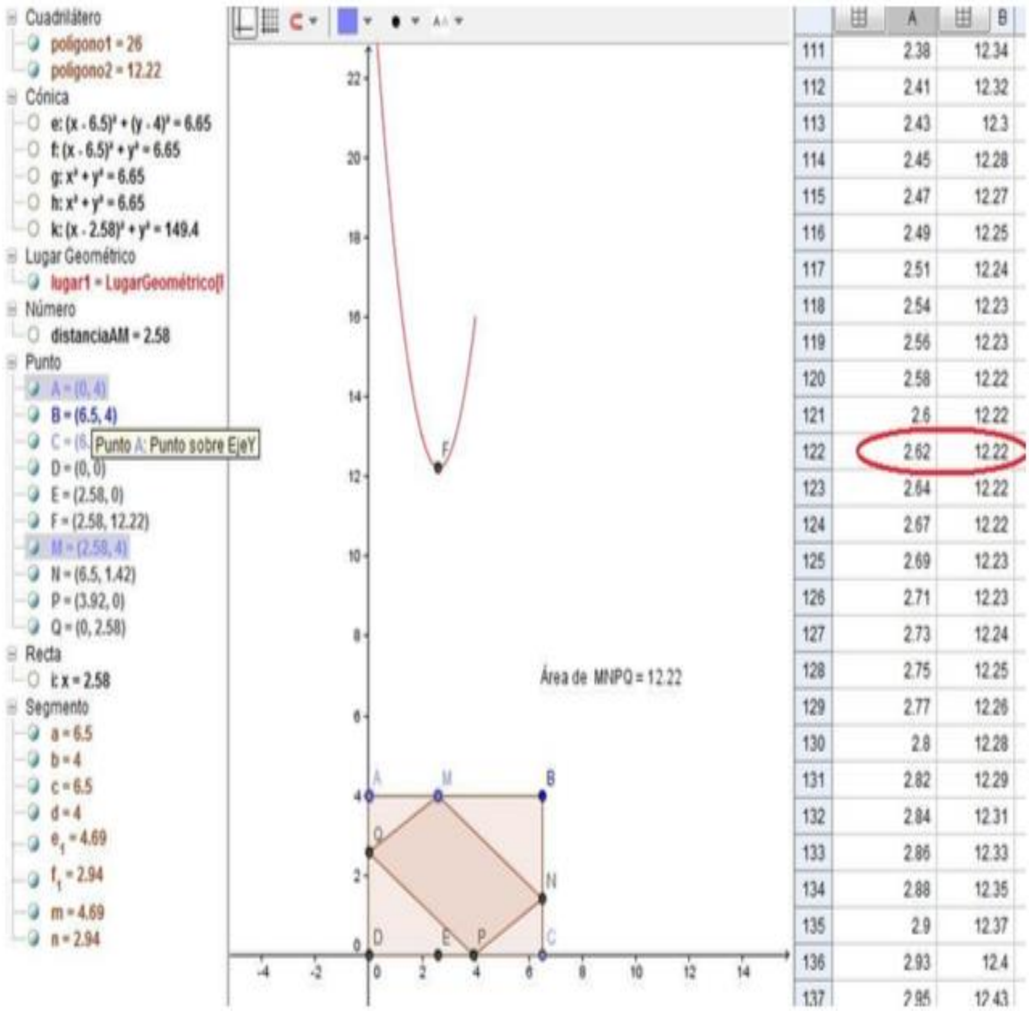


Fig. 4. Resolución de Edna y Marco

- La pareja Noelia-Elia conecta únicamente el modo de representación geométrico y el analítico, y su resolución es, como en el caso de Alicia-Josefina, copia de la realizada individualmente en la Fase 1 . Se sirven de la herramienta que tiene *Geogebra* denominada "Estudio de función" para dar la información necesaria, una vez definida la función como área. No usan el modo de representación numérico (Fig. 5).

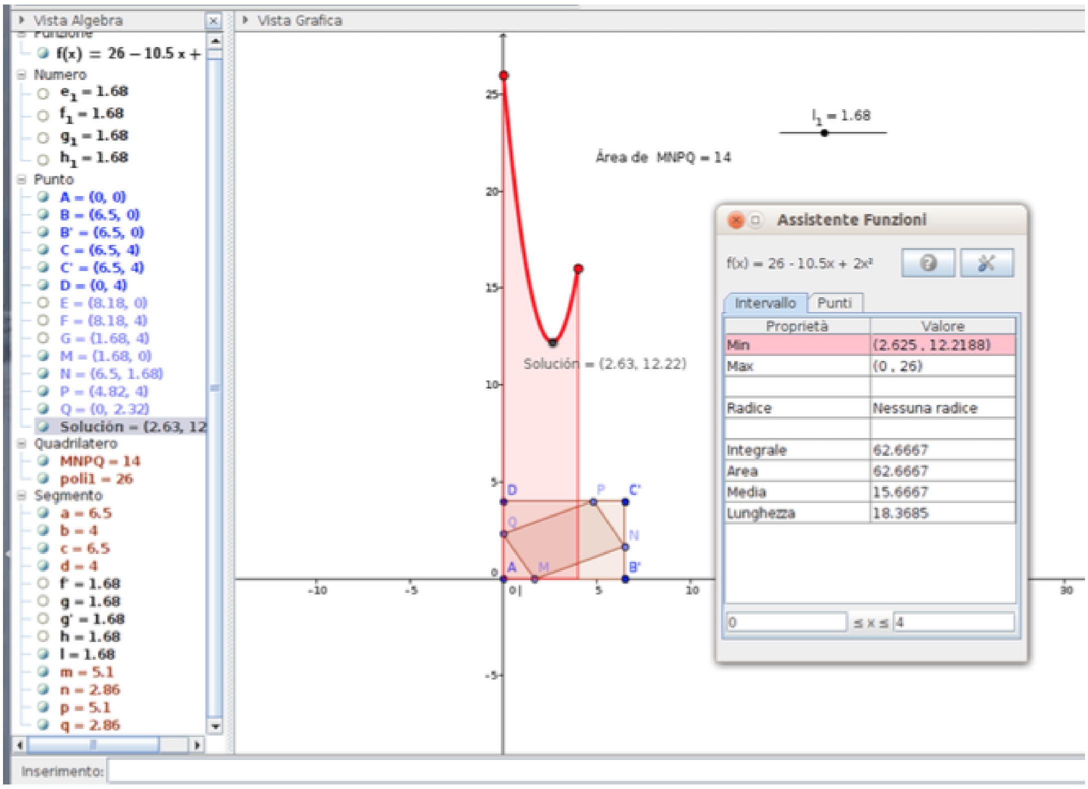


Figura 5. Pareja Noelia y Elia

- Óliver y Yoel entienden que *Geogebra* les aporta la posibilidad de representar gráficamente la función área del paralelogramo lo que les ayuda a comprobar visualmente el resultado obtenido en la Fase 1. Consideran que el software citado ayuda a la demostración gráfica de un tipo amplio de problemas cuando, una vez obtenida la función que se desea optimizar, ésta se representa gráficamente.

Respecto a las extensiones del problema, desde nuestro punto de vista, la mayoría no realiza aportaciones relevantes. A continuación se analizan las más destacadas:

- Alicia y Josefina proponen el estudio de un caso particular para cuando se inscribe un rombo en un rectángulo y el cálculo de la longitud de los lados para que el área del rombo sea máxima (en ningún momento se tiene en cuenta la definición de rombo que supone su carácter de equilátero). No resuelven el problema, por lo que tampoco explicitan las aportaciones de esta extensión a la posible actividad matemática que se debe llevar a cabo.

- ***¿Puedes plantear una actividad que permita extender la situación inicial propuesta?***

La figura siguiente muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima.

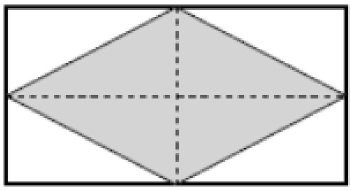
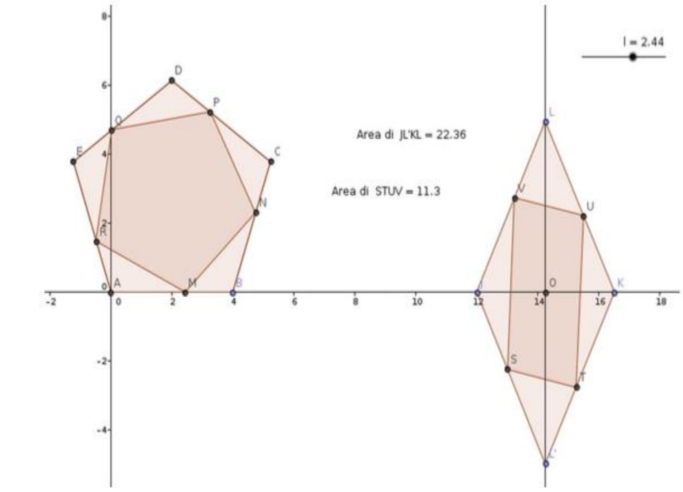


Figura 6. Pareja Alicia-Josefina

- Para Edna y Marco, la extensión consiste en plantear el mismo problema, pero con la condición de que, ahora, el área del cuadrilátero inscrito sea máxima.

- Noelia y Elia extienden el problema al estudio del caso con un pentágono regular y un rombo, en los que se inscriben, respectivamente, un pentágono y un cuadrilátero. Utilizan *Geogebra* para hacer las construcciones, visualizar el problema, y obtener el resultado. Para el caso del rombo, conjeturan que la figura de área mínima es un rectángulo, aunque no aportan la demostración.

Podríamos plantear el mismo problema, pero aplicado a otra figura inicial, es decir, en vez de considerar un rectángulo, podemos considerar un pentágono o un rombo.



- Figura 7. Noelia-Elia

- La pareja Óliver-Yoel es la única que presenta dos variaciones del problema algo más interesantes. Por una parte, plantea la extensión en términos de cambiar el rectángulo por polígonos regulares; para éstos el área mínima del polígono inscrito se obtiene cuando el vértice está en el punto medio de uno de los lados. Por otro lado, proponen minimizar el perímetro de la figura inscrita como actividad de extensión y anticipan una posible solución (Fig. 8).

Otra actividad que podemos hacer sería la misma pero en vez de pedir minimizar el área, pedir minimizar el perímetro. Ya vimos que cada lado del rectángulo $MNPQ$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, luego podemos calcular dichas distancias por separado (de hecho solo hace falta calcular dos distancias, pues hemos dicho que son iguales dos a dos) y sumarlas y luego minimizar esta función. Esta cuestión es interesante por el hecho de que aquí, el maximizar el complementario no nos va a llevar a buen puerto ya que el perímetro del paralelogramo$MNPQ$ no está contenido en el perímetro del rectángulo $ABCD$.

Figura 8. Óliver y Yoel

Después de este análisis detallado de los datos, pasamos a considerar la idoneidad de las preguntas utilizadas en la Fase 3, que se plantearon con la intención de favorecer la reflexión de los estudiantes sobre el uso del SGD, y movilizar aspectos de la actividad matemática que no hubieran surgido en la resolución de la tarea con el uso exclusivo de “lápiz y papel”.

En relación con la pregunta 1, en la que se pedía que presentaran otras formas de resolver la tarea 1, pero ahora con el uso de *Geogebra*, se observó que la mayoría de los estudiantes, copiaban lo que hicieron en la resolución con lápiz y papel (Fase 1). El SGD se limitó a usarse como una herramienta de dibujo y los estudiantes no fueron capaces de ampliar sus razonamientos para aportar nuevos elementos sugeridos por el dinamismo de la construcción. La generalidad de la pregunta ha producido este tipo de respuestas y una resolución con ciertas indicaciones favorecería la interacción de los estudiantes con el software.

En la pregunta dos, los estudiantes tenían que proponer una extensión de la situación inicial; la reflexión que surge es respecto al significado que tiene para ellos el término “extensión”. Así, por ejemplo, para la pareja Alicia-Josefina, la extensión se convierte en estudiar un caso particular. Para Edna-Marco, la extensión consiste en plantear el mismo problema, pero en lugar de minimizar el área del cuadrilátero, maximizarla. Tanto la pareja Noelia-Elia como la formada por Óliver y Yoel, se aproximaron mejor a la idea de extensión. La primera propuso modificar el rectángulo y considerar un romboide, o también, en lugar del rectángulo de partida, tomar un pentágono. Óliver y Yoel presentaron dos extensiones: una para polígonos regulares y la otra para minimizar el perímetro del cuadrilátero inscrito. Ante estas evidencias, parece necesario aclarar el significado que para nosotros tiene extender el problema o situación, se deberían proporcionar algunas indicaciones que dirijan estas modificaciones que se piden.

Finalmente, sobre los conocimientos matemáticos que intervienen en la resolución con *Geogebra*, los estudiantes no son conscientes de los nuevos conocimientos matemáticos que surgen de un enfoque dinámico para la tarea. Por ejemplo, la pareja Edna-Marco no identifica como conocimientos nuevos el uso de los tres sistemas de representación facilitado por *Geogebra*. Óliver y Yoel, tampoco consideran como conocimiento nuevo la importancia del dominio de existencia de la función, que aparece implícito en la decisión tomada de mover el punto sobre el lado más corto del rectángulo para no perder el paralelogramo con los efectos del "arrastre". Esta ausencia de reflexiones sobre el conocimiento matemático, que surgen en la resolución de las tareas, requiere plantear preguntas que les ayuden a explicitar tales conocimientos.

Algunas reflexiones finales

A lo largo de este artículo se ha descrito la actividad matemática de un grupo de estudiantes tratando de determinar y describir las aportaciones del SGD *Geogebra* a su formación en un contexto de resolución de problemas. Asimismo, hemos discutido la idoneidad de las preguntas que se les proponían para la resolución de la tarea con *Geogebra*, preparadas con la intención de complementar y ampliar el conocimiento matemático que aparece en una resolución en el ambiente habitual de "lápiz y papel".

Los resultados obtenidos no han respondido a nuestras expectativas dado que, en líneas generales, los estudiantes no fueron capaces de aprovechar la potencialidad del dinamismo que proporciona *Geogebra*. Como formadores de profesores, creemos que es importante suministrar a nuestros estudiantes indicaciones más concretas que faciliten la apropiación de la herramienta como instrumento para desarrollar conocimientos matemáticos y de resolución de problemas. Hemos constatado que el hecho de manejar habilmente la herramienta no basta para sacarle todo el partido como generador de conocimientos de modo que pueda ser incorporada de manera sistemática/natural a las aulas de Educación Secundaria.

Se ha podido comprobar cómo los estudiantes tienen dificultades para explicitar la actividad matemática (definir, justificar, argumentar, probar, generalizar, etc.) realizada durante el proceso de resolución del problema tanto con sólo "lápiz y papel" como con el SGD. Creemos que la dificultad radica en que no se les proporcionan oportunidades para ello.

Nuestros estudiantes deben saber que, cuando se trata de enseñar Matemáticas a futuros alumnos de Secundaria, es necesario analizar detalladamente las tareas que se propondrán en las aulas dado que, mediante su resolución, el profesor identifica dificultades de la tarea, determina los objetivos de aprendizaje, anticipa posibles respuestas de los alumnos, etc. Esta competencia debe enseñarse durante su formación como profesor.

Asimismo, parece imprescindible enseñar a los estudiantes a distinguir entre lo que supone resolver un problema con el rigor adecuado, y el hecho de reflexionar sobre la enseñanza a futuros alumnos de Secundaria, momento en el cual tiene sentido discutir sobre la pertinencia o no del formalismo matemático que se debe exigir al elaborar pruebas o demostraciones y al estudiar casos particulares, entre otros. Todos estos hechos forman parte de la formación específica que debe adquirir un futuro profesor de Matemáticas, por lo que se debe reflexionar sobre la necesidad de explicitar exactamente los objetivos del aprendizaje de los futuros profesores, clarificar qué herramientas didácticas y cómo deben usarse para lograr una enseñanza de las Matemáticas utilizando la tecnología como recurso didáctico.

Atendiendo a todas las consideraciones anteriores, a modo de guía, hemos elaborado un protocolo para la resolución de tareas utilizando el software dinámico como herramienta de aprendizaje para facilitar a los estudiantes para profesores diferentes aproximaciones que enriquezcan la resolución.

GUIA DE IMPLEMENTACIÓN

Una aproximación dinámica utilizando Geogebra

1. ¿Cuáles son los elementos fundamentales que dan sentido al problema?
2. Utiliza un software dinámico (*Geogebra*) para analizar el problema desde una perspectiva geométrica. Comenta el proceso.
3. Para construir el modelo dinámico de la situación planteada, ten en cuenta que hay ciertos elementos que, al moverse, generan una familia de dibujos que propicia al enfoque general del problema.
4. ¿Qué propiedades cumple esa familia que se genera con el movimiento? ¿Se mantienen las características básicas que dan lugar al modelo geométrico construido? Encuentra el dominio de variación del modelo dinámico.
5. Obtén una representación cartesiana que relacione lo que se desea optimizar (variable dependiente) con algún valor que pueda considerarse como variable independiente y halla el lugar geométrico que se obtiene. ¿Podrías utilizar más de una variable independiente?
6. ¿Existe algún patrón asociado a las variables elegidas? Identifica visualmente en qué punto la gráfica obtenida alcanza el valor máximo/mínimo. Construye (con Excel) una tabla que muestre algunos valores de las variables que modelizan el problema.

Aproximación algebraica

1. Después de las observaciones obtenidas a partir de la aproximación dinámica, elige una notación apropiada y encuentra una expresión algebraica para la función que se desea optimizar.
2. Obtén la dependencia de las variables y las relaciones que permitan convertir la expresión en una función real de una variable real.
3. Halla una expresión algebraica para la función que se desea optimizar. Representa gráficamente la función obtenida y discute las propiedades que la caracterizan.
4. ¿Qué relación existe entre la función obtenida y el modelo funcional obtenido en la aproximación dinámica?
5. Aplica la condición suficiente de obtención de puntos óptimos para hallar el valor(es) que optimice(n) la función obtenida. Compara ese valor con el obtenido previamente haciendo uso del software.
6. ¿Se podría encontrar un caso más general?
7. Discute cuáles son las características del razonamiento matemático que aparecen en ambas aproximaciones dinámica y algebraica que han dado lugar a la resolución de la tarea

Algunas extensiones

1. Modifica algunas de las condiciones iniciales y trata de extender el problema de partida.

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el Proyecto: *La resolución de problemas y la tecnología en la formación y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas* (EDU2011-29328).

Referencias bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H. y Phelps, G. C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics for teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (3), 293-319.

Camacho, M. y Santos-Trigo, L. M. (2006). Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso de software dinámico. *UNO*. Vol 42, 20-33.

Santos-Trigo, L. M. y Camacho, M. (2009) Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical Inquiry. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS),* 19(3), 260-279.

Conner, A., Wilson P.S. y Kim, H. J. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 43, 979-992.

Moreno, M.; Camacho, M. y Azcárate, C. (2012). La resolución de problemas y la tecnología en la formación y desarrollo profesional del profesor de Matemáticas". En Mar Moreno (ed.), *III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (III Encuentro del GIDAM-SEIEM),* pp. 60-67.

Koehler, M. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies.* Armand Colin. Paris.

REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, pp. 45448-9).

Santos-Trigo, M.; Camacho-Machín, M. y Moreno-Moreno, M. (2013). Using dynamic software to Foster prospective teachers' problem solving inquire. En Ubuz, B.; Haser, C.; & Mariotti, M.A. *Proceedings of the eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2714-2723. Middle East Technical University, Ankara. (Formato Digital)

Santos-Trigo, M.; Camacho-Machín, M. y Olvera-Martínez, C. (2014). Preservice high school teachers' construction and exploration of dynamic model of variation phenomena. En Carreira, S.; Amado, N.; Jones, K.; & Jacinto, H. (Eds. *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in* *mathematical problem solving*, pp. 96-107. Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Tondeur, J.; van Braak, J.; Sang, G.; Voogt, J., Fisser, P.; y Ottenbreit-Leftwich, A. (2012). Preparing pre-service teachers to integrate technology in education: A Synthesis of qualitative evidence. *Computers & Education*, 59, 134-144.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environment. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrumen*t, pp. 137-162.

Wilson, P. H.; Lee, H. S. & Hollebrands K.F. (2011). Understanding Prospective Mathematics Teachers' Processes for Making Sense of Students' Work with Technology. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(1), 39-64.