

Alejandro SANVISENS HERREROS

IES Jaume Salvador i Pedrol

asanvise@xtec.cat

N.º ORCID: 0000-0001-9737-2342

DOI: 10.34810/comprendrev25n1id414139

Article rebut: 24/01/2022

Article aprovat: 07/02/2023

## Resumen

---

Este artículo es una defensa de la postura constructivista moderada en matemáticas y filosofía sobre el tema del infinito. Aporta pruebas definitivas de que no existe el infinito actual en ninguna parte, tal como sostenían Poincaré, Borel, H. Weyl, Lebesgue y toda la tradición filosófica aristotélico-tomista y bergsoniana.

**Palabras clave:** infinito, constructivismo, Cantor, paradoja, Zenón.

## Proofs of the non-existence of the actual infinity

### Abstract

---

This article is a defense of the moderate constructivist position in mathematics and philosophy on the subject about infinity. It tries to provide definitive proofs that actual infinity does not exist anywhere, as maintained by Poincaré, Borel, H. Weyl, Lebesgue and the entire Aristotelian-Thomist and Bergsonian philosophical tradition.

**Key words:** infinity, constructivism, Cantor, paradox, Zeno.

---

## 1. Introducción

El infinito actual es una exigencia de la concepción platónica de la realidad. El demiurgo de Platón, igual que el Dios de san Agustín, debía contemplar en acto todas las ideas concebibles, todos los números naturales, todos los reales, todas las funciones existentes desde toda la eternidad.<sup>1</sup>

Las paradojas de Zenón de Elea<sup>2</sup> crearon una crisis en el pensamiento sobre el infinito.<sup>3</sup> Por una parte, los pitagóricos descubrieron los números irracionales, que deberían tener infinitas cifras decimales, y por otra, las aporías de Zenón ponían de manifiesto que el infinito actual platónico era incompatible con la realidad del movimiento. Aristóteles zanjó esta cuestión admirablemente, distinguiendo dos formas de entender el infinito: una de ellas, como una totalidad muy grande y completa (infinito actual); la otra, como una tendencia o proceso de crecimiento o decrecimiento inacabable (infinito potencial). La aceptación del infinito actual creaba las paradojas. El único infinito real era el infinito potencial.

En el siglo XIII surgieron unas paradojas formuladas por Roger Bacon, J. Duns Scotto y otros, que establecían unas correspondencias biunívocas entre puntos de segmentos de distinta longitud o de circunferencias concéntricas.<sup>4</sup> Si las líneas eran agregados de puntos, entonces había que concluir que dos líneas distintas eran iguales. Así demostraron que el continuo no está formado por infinitos indivisibles.

En 1638, Galileo se enfrentó a un tipo de paradojas, ya antiguas, planteando nuevos ejemplos como el siguiente: a cada número natural ( $n$ ) se le puede asociar su cuadrado ( $n^2$ ), y al revés.<sup>5</sup> Si se admite que existe un infinito actual, resulta que el todo (el con-

<sup>1</sup> El demiurgo es presentado en plenitud en el *Timeo* como el Hacedor que hizo entrar en relación la materia informe con las Ideas (PLATÓN, *Timeo*, 29. Trad. cast. *Diálogos. Obra completa*. Vol. VI. Madrid: Gredos, 2002). Dice san Agustín: «Así, pues, lejos de nosotros dudar de que le es conocido todo número a Aquel cuya inteligencia, como canta el Salmo, no tiene número». SAN AGUSTÍN, *De civitate Dei*, XII, 18. Trad. cast. *La ciudad de Dios*, en: *Obras de San Agustín*, XVI. Madrid: B.A.C., 1964, p. 693.

<sup>2</sup> Solo tenemos fragmentos de los escritos de Zenón (siglo V a. C.). Todo lo que conocemos de sus aporías procede de la Física de Aristóteles (siglo IV a. C.), así como de la obra de Simplicio (siglo VI d. C.) y otros autores. En castellano existen varios compendios de estas aporías: J. D. GARCÍA BACCA, *Los presocráticos*, vol. II. México: Fondo de Cultura Económica, 1944; A. SANVISENS, «Actualidad de las aporías de Zenón». *Convivium* [Barcelona], 3, 1992, pp. 5-21; N. FALLETTA, *Paradojas y juegos*. Barcelona: Gedisa, 1988, pp. 203-218; W. I. McLAUGHLIN, «Una resolución de las paradojas de Zenón». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 220, 1995, pp. 62-68.

<sup>3</sup> Cfr. A. W. MOORE, «Breve historia del infinito». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 225, 1995, pp. 54-59.

<sup>4</sup> Hay precedentes de este tipo de argumentaciones en Al-Ghazali (siglo XI). Cfr. G. SARMIENTO (ed.), *Sobre los fundamentos filosóficos de la ciencia de la naturaleza en la modernidad*, Vol. 1. Caracas: Independently published, 2019, p. 124). En el siglo XIII reaparecen las demostraciones de que el continuo no está formado de indivisibles, principalmente en R. BACON, *Opus majus*, pars IV, Distinctio IV, cap. IX (J. H. BRIDGES [ed.], Oxford: At the Clarendon Press, 1897); y en J. DUNS SCOTO, *Quaestiones in Lib. II Sententiarum*. VI, I, Distinctio II, Quaestio IX. Lugduni, Sumpibus Laurentii Durant, 1639. Reimp. *Opera Omnia*, Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1968-69, pp. 230 ss.; Ed. crítica C. Balic. Ciudad del Vaticano, 1950.

<sup>5</sup> GALILEO GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze...*, Leyden, 1638, en GALILEO GALILEI, *Le opere*, Edizione Nazionale, ed. A. Favaro. Florencia: G. Barbèra, 1890-1909, Vol. VIII (reed. 1968), p. 80.

junto de los naturales) es igual a una parte (el conjunto de los cuadrados), destruyendo el evidente principio euclidiano de que el todo siempre es mayor que la parte, ya que contiene elementos ausentes en la parte, tal y como se define una parte. Acabó considerando que los infinitos no son comparables entre sí.

Galileo admitía el infinito actual debido al problema del continuo de los grados de velocidad en el movimiento acelerado, porque no disponía de una teoría clara del continuo. Solo utilizó los indivisibles en el sentido de Cavalieri, de un modo puramente instrumental, no real.

En el siglo XVII el cálculo infinitesimal volvió a crear problemas con el infinito, pero fueron resueltos magistralmente por A. L. Cauchy y K. Weierstrass en el siglo XIX introduciendo el concepto de límite para el infinito potencial.

Parecía que la concepción aristotélica del infinito potencial había triunfado definitivamente, pero en 1851, el matemático y teólogo Bernard Bolzano, en su última obra, *Las paradojas del infinito*,<sup>6</sup> justificó, al igual que Platón en el siglo V a. C., la idea del infinito actual con estas palabras: «Llamamos a Dios infinito porque reconocemos en Él fuerzas de más de un tipo que poseen una magnitud infinita. Esto significa que estamos obligados a atribuirle una capacidad de conocimiento infinita, una verdadera omnisciencia y, en consecuencia, un conjunto infinito de verdades, a saber, todas las verdades, etc.».<sup>7</sup> La idea subyacente a todo el planteamiento de Bolzano y de los platónicos en general es que todas las ideas, como los números, existen en un mundo metafísico eterno independientemente de las personas que las piensan, las cuales no las crean, sino que las descubren. Por eso, según ellos, la posibilidad de crecer que tenga cualquier colección de objetos mentales supone la existencia en acto de un conjunto infinito de ellos en este mundo metafísico. Si la proposición «P» es verdad, también lo es la que afirma que «P es verdad», y también la que afirma que «“P es verdad” es verdad», etc. Así construye Bolzano su infinito actual, sin comprender que está hablando de proposiciones, es decir, de concepciones mentales que solo existen cuando una mente las piensa, y que solo las piensa progresivamente, no simultáneamente. De ahí pasa ilegítimamente a hablar de realidades fuera de la mente (verdades existentes todas al mismo tiempo en la mente de Dios). El paso es ilegítimo porque las proposiciones las concibe un ser humano, no Dios. Volveremos a encontrar el mismo argumento, algo modificado, en Richard Dedekind.<sup>8</sup> Este último autor se refiere al conjunto S de todas las ideas que pueden ser objeto de mi pensamiento. Si una idea s pertenece a S, la idea (s') de que s pertenece a S también pertenece

---

<sup>6</sup> B. BOLZANO, *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig, 1851. Hay varias ediciones castellanas: la primera, de 1991, comentada y anotada por Jan Sebestick; la primera reimpresión fue hecha por la Facultad de Ciencias de la UNAM en 2005 (Col. Mathema).

<sup>7</sup> B. BOLZANO, *op. cit.*, §11.

<sup>8</sup> R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die zahlen?* Braunschweig: Bieweg, 1888. Traducción cast.: *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos*, ed. de J. Ferreirós. Madrid: Alianza, 1997.

a S, y lo mismo la idea s' de que s' pertenece a S, etc. Dedekind construye entonces el subconjunto S' de todas las ideas de que otras ideas pertenezcan a S. Existe una biyección entre S y S', lo cual solo puede suceder si S es un conjunto infinito. De ahí concluye ilfinitamente que S es un conjunto infinito actual, cuando debería concluir que es un infinito potencial, ya que toda idea es un objeto del pensamiento.

Georg Cantor parte del supuesto, al igual que Bolzano, de que es imposible concebir el infinito potencial sin aceptar la existencia de un previo infinito en acto, que es como un camino que se va descubriendo o andando. Dice Cantor: «Para un seguro caminar se necesita incondicionalmente fundamento y suelo firme y una calzada bien allanada, un camino que en parte alguna se interrumpe».<sup>9</sup> Pero Antonio Machado en uno de sus *Proverbios y cantares* de 1917 escribiría: «Caminante, no hay camino, se hace camino al andar».<sup>10</sup> Esta es la realidad que no supieron comprender los creadores de la teoría de conjuntos, debido a sus preconcepciones metafísicas. Lo que sí puede haber es un proyecto de camino, unos planos y fórmulas, pero el camino debe irse construyendo ilimitadamente.

Nadie puede saber mejor que Cantor que toda su teoría de los conjuntos infinitos «pertenece enteramente a la metafísica».<sup>11</sup> En la base de la actual teoría de conjuntos formalista o axiomática sigue alentando el espíritu del platonismo, donde los objetos matemáticos constituyen un camino ya hecho desde la eternidad y que las personas descubren a medida que andan por él. Por el contrario, las posturas constructivistas consideran que los objetos matemáticos (números, puntos, planos, funciones, etc.) son ideas en la mente de las personas y se construyen o crean al pensar. La existencia de estos objetos depende de su creación, con todas las determinaciones precisas. El matemático, al andar (al pensar) construye su camino (los objetos de su contemplación). En este artículo veremos cómo el axioma del infinito se articula dentro de la metafísica platónica y daremos pruebas de la inexistencia del infinito actual.

## 2. Paradojas y cambio de paradigma

Una paradoja es una argumentación cuya conclusión no concuerda con el paradigma establecido hasta el momento.<sup>12</sup> Si la argumentación es correcta, la conclusión es

---

<sup>9</sup> Cfr. M. CABADA, «La fundamentación filosófica del transfinito en Georg Cantor». *Pensamiento. Revista de investigación e información filosófica* [Madrid], 65/246 (s. Esp.), 2009, p. 682.

<sup>10</sup> A. MACHADO, «Proverbios y cantares», XXIX, del libro de poemas *Campos de Castilla*, CXXXVI, en: *Poesías completas*. Madrid: Espasa-Calpe, 1941, p. 212.

<sup>11</sup> Así se expresaba Cantor en una carta de 15 de febrero de 1896 dirigida al dominico T. Esser. Cita en M. CABADA, *op. cit.*, p. 699.

<sup>12</sup> Cfr. W. V. QUINE, «Paradoja» (abril 1962), en: W. AA, *Matemáticas en el mundo moderno*. Madrid: Blume, 1974, pp. 224-233.

verdadera, aunque chocante, y la paradoja se denomina verídica. Por el contrario, cuando la argumentación es una falacia, la conclusión es falsa y la paradoja es falsídica.

Las «demostraciones» de que un número es igual a otro son paradojas falsídicas. La paradoja del barbero (divulgada por B. Russell en 1918) es un caso típico de paradoja verídica, como explica W. V. Quine.<sup>13</sup> En efecto, se trata de una demostración por reducción al absurdo de que no puede existir ningún barbero que solo afeite a los que no se afeitan por sí mismos, lo cual es chocante, pero cierto. Parte del absurdo de que exista tal personaje y con ello se llega a una contradicción, ya que tal individuo debería afeitarse a sí mismo si y solo si no se afeitara a sí mismo.

Analicemos ahora la primera de las paradojas del movimiento propuestas por Zenón. Un móvil, para desplazarse de A a B, debe llegar primero al punto medio C del camino; luego, al punto medio D del intervalo CB; luego, al punto medio E del intervalo DB, y así indefinidamente. El proceso de división del camino llega hasta el infinito, por lo cual el móvil no puede llegar a B, es decir, no puede moverse a través de ningún intervalo AB.

Los matemáticos y lógicos actuales consideran que esta es una paradoja falsídica. Para fundamentar este criterio añaden al argumento de Zenón una cuestión temporal irrelevante, la de que el móvil, para llegar a B, tardaría un tiempo igual a la suma de los infinitos tiempos necesarios para llegar a cada uno de los puntos intermedios. Asumen que Zenón creía que esta suma debería dar infinito, por lo cual el movimiento sería imposible. Triunfalmente, estos matemáticos, desconocedores de la ciencia griega, demuestran que la serie de Zenón es convergente y que, por tanto, tiene límite, desacreditando la aporía llamándola falsídica. Pero Zenón no se estaba refiriendo a ningún problema de sumas convergentes, como se demuestra por el hecho de que complementó su paradoja con otra semejante en la que el móvil ya no puede partir del punto A, puesto que, antes de llegar a cualquier otro punto B, debe pasar previamente por el punto intermedio C y por el anterior punto intermedio D entre A y C, y por el anterior E (intermedio entre A y D), etc., hasta el infinito.

Planteemos la paradoja como un argumento *ab absurdum*, para ver lo que concluye realmente: supongamos (*ab absurdum*) que haya infinitos puntos en el intervalo AB. Entonces el móvil, al recorrerlo, pasará por infinitos puntos, realizando infinitas operaciones y terminando este proceso. Esto es imposible porque no se puede terminar lo que es interminable (lo infinito) (sin considerar el tiempo para nada). Entonces sería imposible el movimiento, pero esto está en contradicción con la realidad, por lo cual se puede concluir que, o bien el movimiento es una apariencia (postura de Zenón), o bien la hipótesis inicial (que haya infinitos puntos en el intervalo) es falsa. Nadie admite hoy en día que el movimiento es una apariencia, por consiguiente, hay que admitir que no

---

<sup>13</sup> Cfr. W. V. QUINE, *op. cit.*, p. 224.

existen infinitos puntos en el camino. Los puntos se crean cada vez que el móvil hace una parada en el camino (postura de H. Bergson).<sup>14</sup> La paradoja de la carrera de Zenón es una paradoja verídica, y la conclusión a la que lleva es cierta, aunque choca con el paradigma existente en la actual teoría de conjuntos. Podemos estar seguros de esta conclusión gracias a la imaginaria lámpara de Thomson, la cual se va encendiendo y apagando alternativamente a medida que se va pasando por una supuesta o hipotética sucesión infinita de puntos.<sup>15</sup> Cuando se llega al final de esta sucesión la lámpara no puede estar ni encendida ni apagada, lo cual es una contradicción que nos obliga a descartar la suposición o hipótesis inicial de la existencia de infinitos puntos.<sup>16</sup>

La más importante de las paradojas de Zenón es la de la pluralidad, que podríamos presentar (actualizada y simplificada) de la siguiente forma: supongamos (*ab absurdum*) que el continuo esté constituido por partes sin extensión (puntos). En tal caso, uniendo partes sin extensión obtendríamos una extensión en el espacio, lo cual es imposible. La conclusión es que el continuo no está constituido por puntos, cosa chocante con el paradigma actual de la matemática, pero cosa cierta. Otra cosa muy distinta es que en el continuo puedan señalarse (crearse o determinarse) tantos puntos como se quiera (infinitos potencialmente). A esta misma conclusión llegaron los más eminentes pensadores de la historia de la filosofía y de la matemática, como es bien conocido.

Las antinomias son paradojas autorreferenciales o definiciones autorreferenciales. En la definición está el objeto definido involucrado, con lo cual se entra en un círculo vicioso del que solo es posible salir aceptando que no se está definiendo nada, aunque no se entre en ninguna contradicción como la que ocurría en la paradoja del barbero.

Un conjunto que se define incluyendo implícitamente la cláusula de que él mismo forma parte de él es un ejemplo de antinomia por mala definición. Los matemáticos formalistas no tienen ningún inconveniente en aceptar la existencia del conjunto de todos los conjuntos con más de diez elementos, sin embargo, en la definición de este conjunto está implícita la cláusula de autocontención, ya que, de existir, este conjunto tendría más de diez elementos. Por consiguiente, estamos delante de una antinomia,

---

<sup>14</sup> Véase H. BERGSON, *La pensée et le mouvant*. Trad. cast.: *Pensamiento y movimiento*, en: *Obras escogidas*. México: Aguilar, 1963.

<sup>15</sup> Se trata de una creación de 1954 del filósofo británico James F. Thomson. Su artículo de 1954 es de los más importantes de la historia de la filosofía del siglo xx. JAMES F. THOMSON, «Tasks and super-tasks». *Analysis* [Oxford], 15/1, 1954, pp. 1-13.

<sup>16</sup> La lámpara de Thomson descarta también, por imposible lógicamente, la propuesta de A. Grünbaum de un segundo Aquiles (para la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga), que se va parando en los supuestos puntos donde se encontraba anteriormente la tortuga. Este segundo Aquiles debería realizar infinitas operaciones en un tiempo finito. Además, dicho segundo Aquiles debería ser una entidad mental (creada por una mente que ejecutaría todas sus operaciones), ya que no puede ser físico. Cfr. A. SANVISENS, *Saliendo del paraíso de Cantor*. 2.ª edición. Madrid: ViveLibro, 2021, p. 99.

una falsa definición, que no define nada. Se trata de una paradoja verídica, cuya conclusión es que no pueden existir conjuntos (totalidades) que se contengan a sí mismos como elementos. Es una conclusión cierta, pero chocante con el paradigma actual de la matemática.

La famosa antinomia de Russell de 1901 trata del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Si este conjunto existiera sería miembro de sí mismo siempre y cuando no fuera miembro de sí mismo; y, por otra parte, no sería miembro de sí mismo siempre y cuando fuera miembro de sí mismo. Esta contradicción hace ver que no puede existir tal conjunto. Tal conclusión cierta es chocante, porque se creía en la primitiva teoría de conjuntos que cualquier condición que se plantee define el conjunto de los elementos que la satisfacen. Pero aquí vemos que la condición «no ser miembros de sí mismos» no define ningún conjunto. Esto llevó a una serie de apañes en la teoría, en forma de axiomas arbitrarios, para evitar que pudieran plantearse condiciones que no definieran nada, creando contradicciones en el sistema. Nadie se dio cuenta de que, si, como hemos dicho antes, no existe ningún conjunto que se contenga a sí mismo como elemento, entonces puede afirmarse que todos los conjuntos cumplen con la condición de que no se contienen a sí mismos como elementos. Es decir, el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos equivale al conjunto de todos los conjuntos.

Georg Cantor fue el primero en darse cuenta de que no puede existir el conjunto de todos los conjuntos, pero su «demostración», como veremos, fue una falacia basada en la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Los conjuntos infinitos no pueden ser totalidades, como también demostraremos, y, por consiguiente, no pueden tener cardinal. El hecho de que no exista ningún conjunto de todos los conjuntos se demuestra muy fácilmente, cuando nos damos cuenta de que, de existir, debería contenerse a sí mismo, y, como hemos visto, ningún conjunto puede contenerse a sí mismo.

### 3. Límites del formalismo. Teorema de la inexistencia de conjuntos infinitos actuales

Los sistemas formales o axiomáticos incluyen axiomas arbitrarios, están acosados siempre por el fantasma de la contradicción (la inconsistencia) y son siempre incompletos, como demostró Kurt Gödel en 1931.<sup>17</sup> Hay ciertas verdades que no pueden ser demostradas en cada uno de ellos, y entonces hace falta la intuición para conseguirlo. En esto la mente humana es superior a todos los posibles ordenadores. Propongo que este es el caso del teorema de la inexistencia de conjuntos infinitos actuales, que dice

---

<sup>17</sup> K. GÖDEL, «Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme». *Monatshefte für Mathematik und Physik* [Wien], 38, 1931, pp. 173-198.

que no pueden existir conjuntos infinitos completos o acabados (infinito actual). Vamos a demostrarlo.

Consideremos (*ab absurdum*) la existencia de un conjunto infinito completo de manzanas equivalente en cardinalidad al conjunto de los números naturales. Una persona se encarga de asociar a cada manzana una tarjeta en la que escribe un número natural, siguiendo la ordenación de menor a mayor. Mientras las tarjetas lleven escrito un número natural (y, por tanto, finito), la tarea no ha terminado, puesto que solo se han numerado un número finito de manzanas y sigue habiendo infinitas manzanas por numerar. Por consiguiente, si hay que numerar todas las infinitas manzanas, es necesario llegar a escribir números infinitos en las tarjetas.<sup>18</sup> Pero los números naturales son todos finitos,<sup>19</sup> por consiguiente, es imposible asociar cada manzana del conjunto con un número natural, ya que necesitaríamos para ello números infinitos, que no serían naturales. Ello significa que el conjunto de las manzanas y el conjunto de los números naturales no son equivalentes en cardinalidad, en contradicción con lo que habíamos supuesto en la hipótesis inicial. En consecuencia, debemos rechazar la hipótesis de que existen conjuntos infinitos acabados (infinitos actuales).

Evidentemente, los matemáticos formalistas son incapaces de aceptar esta demostración, porque requiere de la intuición, cosa que ellos no están dispuestos a usar bajo ningún concepto, y porque, para colmo, contradice uno de los axiomas de su sistema.

#### 4. El axioma del infinito

En la lista de axiomas de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos moderna (sistema ZFC), el axioma del infinito, que es el quinto, se enuncia de la siguiente manera: «Existe un conjunto  $x$  que contiene el conjunto vacío y que es tal que, si  $y$  pertenece a  $x$ , entonces la unión de  $y$  con  $\{y\}$  está también en  $x$ ».<sup>20</sup>

Este axioma postula la existencia de conjuntos infinitos (infinitos actuales). Para los matemáticos constructivistas, que no creen en la existencia del infinito actual, este axioma es falso. A los formalistas esto les trae sin cuidado, porque a ellos lo único que les interesa es la consistencia de los sistemas, la ausencia de contradicción. Es bien conocida por todo el mundo aquella frase de Bertrand Russell que dice: «Las matemáticas

---

<sup>18</sup> Si consideramos que el infinito es potencial, es decir, que nunca podemos considerar completo el conjunto de manzanas, entonces podríamos asignar siempre a cada manzana un número natural (finito, claro está), porque siempre habrá una manzana más por numerar. Pero si consideramos el conjunto completo o acabado, entonces toda manzana tiene que estar numerada, y, siendo infinitas, se requeriría un número infinito de tarjetas numeradas del uno al infinito, llegando al infinito como número.

<sup>19</sup> El primer número infinito considerado por Cantor es  $\omega$ , que no es ningún número natural.

<sup>20</sup> Cfr. PAUL J. COHEN y REUBEN HERSH, «Teoría de conjuntos no cantoriana» (diciembre de 1967), en: VV. AA., *Matemáticas en el mundo moderno*. Madrid: Blume, 1974, pp. 238-247.

podrían definirse como aquello en lo que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad».<sup>21</sup>

De todas formas, es conveniente analizar a fondo este axioma para ver si lo que postula justifica el uso que se hace de él.

Este axioma postula que existe un conjunto  $x$ , lo cual, en la teoría de conjuntos significa algo acabado, una totalidad, y no algo meramente potencial, ya que en otros axiomas se habla de la cardinalidad de los conjuntos infinitos postulados en este, cosa que implica totalidad o acabamiento.

El punto sutil del axioma es la sentencia que dice que si  $y$  pertenece a  $x$ , entonces la unión de  $y$  con  $\{y\}$  también pertenece a  $x$ . Se da por supuesto que si  $y$  existe, también existe  $\{y\}$ , pero esto no es cierto. El conjunto  $\{y\}$  hay que pensarlo (crearlo mentalmente) una vez se nos presenta un conjunto  $y$ . El conjunto cuyo único elemento es  $y$  no existe desde toda la eternidad, sino que empieza a existir en nuestra mente solo a partir del momento en que consideramos la existencia de  $y$ . Por consiguiente, hay aquí un proceso progresivo (iterativo) y potencialmente infinito de nuestra mente en el que podemos partir del conjunto vacío, que se da por perteneciente a  $x$ , y a partir de aquí ir creando paso a paso primero el conjunto unión del vacío con aquel cuyo único elemento es el vacío, después el conjunto unión de este último conjunto unión con el conjunto cuyo único elemento es dicha unión, y así sucesivamente. Obsérvese que estos conjuntos progresivos no existen todos como un camino ya hecho que hay que recorrer, sino que hay que crearlos progresivamente; hay que ir haciendo el camino al andar. Por consiguiente, estamos hablando de un infinito potencial. Hacer de él (de  $x$ ) un conjunto infinito actual, como se hace, es una contradicción.

¿Cómo podemos creer que el sistema de Zermelo está exento de contradicción, cuando la contradicción está dentro de la formulación de alguno de sus axiomas? Esto es lo que se temía H. Poincaré cuando decía: «He allí por qué no podrían satisfacerme los axiomas de Zermelo. No sólo no me parecen evidentes, sino que cuando se me pregunte si están exentos de contradicción, no sabré qué responder. [...] Pero, aunque ha cerrado bien su redil, no estoy seguro de que no haya encerrado al lobo en él».<sup>22</sup>

El axioma del infinito comienza con la expresión «existe»<sup>23</sup> y, desgraciadamente, podemos entender varias cosas distintas cuando empleamos este cuantificador. Para un matemático formalista *existencia* significa ausencia de contradicción; para un constructivista la existencia requiere construcción del objeto definido. El formalista es platónico y sus objetos existen en el mundo de las ideas, no en las mentes. El constructivista no

---

<sup>21</sup> B. RUSSELL, «Recent work on the Principles of Mathematics», *The Internat. Monthly* [London], 4, 1901, pp. 83-101. Ensayo reproducido como «Mathematics and the Metaphysicians», en: *Mysticism and Logic and other Essays*. Londres: Longmans, Green and Co., 1918, pp. 74-96.

<sup>22</sup> H. POINCARÉ, *Últimos pensamientos*. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1946, p. 94.

<sup>23</sup> Se trata del cuantificador existencial.

es platónico y sus objetos solo existen en las mentes y deben estar debidamente determinados.

Supongamos que sea cierta la proposición: «Todos los números primos cumplen la condición C». Supongamos también que esta proposición no pueda demostrarse, ni como cierta ni como falsa. Definimos entonces los números primos anormales como aquellos que no cumplen la condición C. Para un formalista dichos números existen, ya que están perfectamente definidos y están exentos de contradicción, ya que la proposición anterior no puede demostrarse como cierta. Pero los formalistas están equivocados, ya que dicha proposición es cierta, y por tanto estos números no existen. La no existencia de contradicción no es suficiente para garantizar la existencia de un objeto. Tal y como piensan los constructivistas, solo una construcción del objeto lo determina a existir.

Un ejemplo servirá para esclarecer esta importante cuestión. Hay una diferencia fundamental entre el punto central de una circunferencia y los posibles puntos que puedan determinarse en ella. El punto central está perfectamente determinado con la definición de una determinada circunferencia. Nuestra mente lo construye implícitamente por el solo hecho de construir la circunferencia. Todos los elementos de su determinación como punto (sus coordenadas) quedan perfectamente fijados cuando definimos la circunferencia, aunque solo sea determinando tres de los puntos de dicha circunferencia (sin especificar donde está su punto central), y por consiguiente podemos decir que dicho punto central existe, aunque no sepamos donde está. Por el contrario, al definir la circunferencia no determinamos las coordenadas de ninguno de sus posibles puntos, por lo cual podemos decir que dichos puntos pueden existir, pueden ser determinados, pero no existen, no están determinados. No existe ninguno de los posibles puntos de una circunferencia hasta que no se especifiquen en la mente sus determinantes. Lo que existe es un algoritmo o fórmula general que cumplirán todos ellos cuando se determinen.

Para un constructivista moderado, cuando en un teorema se demuestra la existencia de un punto que cumple cierta condición, los requisitos del teorema son los determinantes de la existencia de este punto. Un objeto matemático existe cuando está determinado en la mente, aunque haya cierto desconocimiento de algunas características.

La pretensión de los formalistas de que todo número natural existe implica la existencia de un mundo de todas las ideas, el cual es igual de contradictorio que el conjunto de todos los conjuntos. Para un constructivista solo existen los números naturales que han sido contruidos (pensados) por algún ser humano en algún momento de la historia. El conjunto de los números naturales es un conjunto inacabado, incompleto, cuyos elementos cumplen una cierta ley de formación, pero no existen hasta que no se especifica el grado de iteración del algoritmo que los genera. Estrictamente no debería llamarse conjunto, porque no es ninguna totalidad, pero podemos llamarlo conjunto infinito siempre y cuando pensemos que se trata de un infinito potencial, no actual.

## 5. La paradoja del hotel de Hilbert

En una conferencia de enero de 1924 no publicada, David Hilbert, para poner en evidencia lo contraintuitivo del infinito actual, propuso la divertida historia del hotel de infinitas habitaciones. Los matemáticos formalistas en la actualidad han insistido en que no se trata de una paradoja, sino de una contemplación fascinante del misterio incomprensible del infinito, pero una mirada atenta y sin preconcepciones de la historia nos revela que es una auténtica paradoja verídica de la mayor importancia.

Supongamos que exista un hotel perfectamente terminado, pero con infinitas habitaciones ocupadas cada una de ellas por un huésped. La simple operación de desplazar a los huéspedes a la habitación de número consecutivo consigue el milagro de crear una habitación vacía cuando todas estaban llenas. Los formalistas han hecho creer a la opinión pública que este milagro es algo natural y lógico, aunque contraintuitivo, propio del mundo misterioso del infinito.

Pero en ciencia nunca debe aceptarse el milagro hasta que no se han escudriñado todas las posibles explicaciones alternativas. Lo primero que debe pensarse cuando se dice que todos los mismos huéspedes siguen ocupando una habitación igual que antes y que ha aparecido una habitación vacía que antes no existía es que se ha construido una nueva habitación. Es una explicación enteramente satisfactoria y que no requiere el recurso de ningún milagro. Pero esta explicación pone al descubierto la verdad sobre el hotel infinito: no se trata de ningún hotel terminado, sino de un hotel en construcción, al que se van añadiendo indefinidamente nuevas habitaciones vacías. Es un infinito potencial, no un infinito actual. El infinito actual no puede existir en ninguna parte porque lleva implícito toda clase de paradojas.

## 6. La paradoja del señor de las abscisas

La paradoja verídica del señor de las abscisas aparecida en 2021 hace visible la imposibilidad de la existencia de todo conjunto infinito bien ordenado.<sup>24</sup>

Supongamos que existe un conjunto de infinitas tarjetas opacas, sin grosor, numeradas y ordenadas, y que las colocamos en posición vertical sobre el eje de las abscisas, de forma que las tarjetas número 1, 2, 3, 4, 5... se sitúen respectivamente en los puntos de abscisa 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... Todas estas infinitas tarjetas deberían caber entre el punto de abscisa 0 y el de abscisa 1. En el punto de abscisa 0 no hay ninguna tarjeta, y allí se coloca un observador imaginario al que llamo señor de las abscisas, que puede tratarse de un ser humano o del mismo Dios.

---

<sup>24</sup> Puede consultarse esta paradoja en: A. SANVISENS, *Saliendo del paraíso de Cantor*, 2.ª edición. Madrid: ViveLibro, 2021, pp. 11-17.

Lo paradójico es que este observador no puede ver ninguna tarjeta, ya que cualquiera de ellas está tapada por otra más próxima al punto de abscisa 0, y, sin embargo, las tiene todas delante de él. La paradoja desaparece si consideramos que no están todas las infinitas tarjetas allí (infinito actual), sino que solo hay un número finito de ellas que puede ir aumentando indefinidamente (infinito potencial). El señor de las abscisas verá la última de las tarjetas en un momento dado, aquella que está más próxima al punto 0 y que tiene escrito sobre ella un número natural (finito), pero será consciente de que en otro momento pueden aparecer nuevas tarjetas, ya que la colección no está nunca terminada.

Esta paradoja demuestra que no puede existir un conjunto infinito completo o acabado, es decir, lo que se llama un infinito actual. Solo es posible el infinito potencial.

Los formalistas ven perfectamente esta paradoja porque no carecen de la intuición que nos ha sido dada a todos, pero exigen que se plantee en términos matemáticos, porque la relación «ver una tarjeta» no les parece comparable a otras relaciones matemáticas y no puede ser considerada en su sistema axiomático. Por eso es necesario convertirla en otra paradoja de movimiento de puntos hacia una meta. Para ello consideremos ahora que las infinitas tarjetas numeradas se han convertido en infinitos puntos situados, igual que antes, en las posiciones de abscisas 1,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ...

También, como antes, todos estos puntos caben entre los puntos de abscisas 0 y 1. Supongamos que todos ellos se ponen en movimiento al mismo tiempo y a la misma velocidad, en dirección hacia el punto de abscisa 0 (la meta). En el momento en que un punto móvil llegue al punto 0, suena una campana. Disponemos las cosas de forma que la campana solo pueda sonar una vez. Es evidente que todos los puntos móviles llegarán en distintos momentos al punto 0 y que, por consiguiente, la campana sonará ineludiblemente. El problema está en que si consideramos cada uno de estos infinitos puntos móviles, descubriremos que ninguno de ellos puede hacer sonar la campana, ya que todos tienen a otros delante de ellos que llegarán antes a la meta y que será alguno de ellos, y no él, el que hará sonar la campana. Luego la campana sonará con toda seguridad, pero ninguno de los puntos será el responsable de que suene. Esto es imposible, y nos demuestra que no puede existir una colección infinita actual de puntos.

Para terminar con la formalización de esta paradoja para que sea aceptable a los lógico-matemáticos, la traduciremos a una serie de enunciados o proposiciones relativos a los puntos móviles considerados:

Proposición 1: Todos los infinitos puntos móviles llegarán a la meta.

Proposición 2: Cualquiera de esos puntos que llegue a la meta hará sonar la campana.

Conclusión: La campana sonará.

A continuación, añadimos una condición para que un punto concreto haga sonar la campana: que este punto no tenga ningún otro punto más próximo a la meta.

Si hay infinitos puntos colocados de la manera indicada, esta condición hace imposible que pueda sonar la campana, ya que todo punto tiene otro más próximo a la meta. Entonces, en este caso la campana no sonará, lo cual está en contradicción con la conclusión a la que habíamos llegado. Esto nos demuestra que no puede haber infinitos puntos colocados en la forma indicada, es decir, no puede existir un conjunto infinito actual de puntos. Ahora la paradoja está totalmente formalizada y su conclusión cierta es chocante con el paradigma actual de la matemática, el cual debe cambiarse.

Esta paradoja puede servirnos para demostrar que ningún número real entre 0 y 1 puede expresarse por medio de infinitas cifras decimales. En efecto: si escribimos cada una de estas cifras en sendas tarjetas numeradas y colocamos estas tarjetas en las posiciones indicadas en la paradoja, podemos preguntarnos: ¿qué cifra decimal verá el señor de las abscisas, que las tiene todas delante de él?

Esto nos revela la falsedad de un arraigado principio que nos inculcaron a todos desde la escuela y que dice que los números reales entre 0 y 1 pueden expresarse todos ellos por medio de una serie de infinitos decimales, tanto si se trata de números racionales como de irracionales. Por ejemplo, el número racional 0,25 puede expresarse de la siguiente manera: 0,24999999..., con infinitos nueves en la cola. Ya el príncipe de las matemáticas, Carl Friedrich Gauss, rechazó terminantemente en 1831 esta aberración. En una carta a Heinrich Schumacher escribió: «yo protesto sobre todo del uso que se hace de una cantidad infinita como cantidad completa, lo que en matemáticas jamás está permitido. El infinito es solo una *façon de parler*, en la que propiamente debería hablarse de límites».<sup>25</sup> El número  $\pi$  no tiene infinitas cifras decimales, como suele decirse, sino que no tiene ninguna cifra decimal; no puede expresarse en cifras decimales, sino solo por medio de una letra griega, que representa el límite de una sucesión de números racionales, cada uno de los cuales (aproximaciones a  $\pi$ ) tiene siempre un número finito de decimales y que existen en número infinito potencialmente. Decir que  $\pi$  tiene infinitas cifras decimales equivale a decir que se puede llegar al límite de una sucesión convergente siguiendo esta sucesión, o que el límite de dicha sucesión es un término de la misma, ya que se expresa como todos ellos. Pero eso es falso, porque existe siempre una diferencia entre el límite y cualquier término de una sucesión convergente.

La paradoja del señor de las abscisas puede expresarse en forma de axioma, que podría llamarse axioma de la fila india terminada, que dice así: «Toda fila india o sarta de cuentas terminada (que no puede crecer más por un extremo) tiene un último elemento en este extremo». Sin importar la naturaleza de los elementos de la fila, en todos los casos, si ya no puede añadirse ningún elemento más, habrá uno que será el último de la fila. Si consideramos que una fila india es infinita por un extremo, este infinito no

---

<sup>25</sup> Cfr. J. W. DAUBEN, «Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 83, 1983, p. 85.

puede ser actual, acabado, que no permita adiciones, porque en este caso deberíamos encontrar un último elemento, lo que se contradice con la idea de infinito. Por consiguiente, nos vemos llevados a la conclusión de que toda fila de elementos infinita por un extremo ha de estar inacabada, no puede ser un todo completo.

Los matemáticos cantorianos querían evitar esta conclusión imaginando (fuera de toda intuición) una fila infinita extendida hasta el infinito, sin elemento final y totalmente acabada (un infinito actual), pero el problema es que esta fila se puede comprimir de forma que ocupe una extensión finita, por medio del procedimiento indicado en la paradoja del señor de las abscisas (colocando los elementos de la fila en los puntos de abscisas 1, 1/2, 1/4, etc.), y entonces volvemos a tener una visión intuitiva de la verdad del axioma de la fila india terminada, acabando con la imagen contraintuitiva y falsa que pretenden imponer los cantorianos.

La evidencia de este axioma se obtiene por un proceso mental que podríamos llamar una intuición real o visión mental. A este tipo de intuición, complementaria de la argumentación lógica, se han referido casi todos los filósofos importantes relacionados con la matemática, como Kant, Husserl, Bergson, Poincaré y hasta el mismo Hilbert, promotor de la axiomática. No podemos eliminar la intuición real (o visión) en nuestros razonamientos porque es precisamente ella la que nos diferencia a los seres humanos de los autómatas. La intuición es la que nos hace reconocer la evidencia de ciertos axiomas de la lógica, como el del tercero excluido, del que jamás se puede prescindir sin destruir toda posibilidad de pensamiento. También el principio de inducción completa es intuitivo.

Cuando una forma de pensar sobre el infinito nos obliga a contradecir la intuición real o la lógica, hay que abandonar esta forma. La forma actualista de concebir el infinito nos obliga a aceptar que lo infinito (lo inacabable) tiene que ser finito (acabado) y, por tanto, atenta contra el principio de no contradicción. Por eso es necesario abandonarla. Este abandono, lejos de impedirnos avanzar, nos llevará por caminos seguros, impidiendo que nos extraviemos por fascinantes paraísos imposibles e irreales (los transfinitos y los infinitesimales), cuyo estudio constituye una pseudociencia a la que solo pueden acceder plenamente algunas mentes privilegiadas, y puede considerarse una pérdida lamentable de tiempo.

## 7. El paraíso de Cantor

Esta expresión, debida a David Hilbert,<sup>26</sup> se refería a la concepción de toda una teoría de conjuntos basada en el infinito actual y particularmente al sistema de los nú-

---

<sup>26</sup> En su artículo «Acerca del infinito» de 1926, dijo: «Nadie nos sacará del paraíso que Cantor creó para nosotros». D. HILBERT, «Über das Unendliche». *Mathematische Annalen* [Leipzig], 95, 1926, pp. 161-190. Trad. cast. en *Recopilación de Fundamentos de las matemáticas* (Mathema). México: UNAM, 1993.

meros transfinitos. La utilización del infinito actual en matemáticas empieza posiblemente con Bolzano y cobra su expresión definitiva con Dedekind y Cantor para tratar el tema del continuo y la definición o determinación de los números reales en el análisis matemático. Estos autores pensaron que era preciso tratar con totalidades infinitas de puntos para crear una equivalencia entre el continuo del espacio o del tiempo y el conjunto de los números reales. No acertaron a ver que el continuo no es ningún conjunto de puntos, sino un espacio donde pueden determinarse tantos puntos como se quiera cuya distancia a cierto punto de origen viene dada por un número real. Al creer que el continuo equivalía al conjunto de los números reales, pensaron que ya que el continuo es algo acabado y completo, el conjunto de los números reales también tenía que ser algo acabado y completo, es decir, un infinito actual.

Muchos matemáticos actuales tienen la plena convicción de que si se elimina el infinito actual de la matemática, se pierde todo el edificio del análisis matemático. Se trata de una equivocación basada, como he dicho, en un falso concepto de continuo. Con un simple cambio en ciertas definiciones, la matemática real queda incólume si se sustituye el infinito actual por el potencial,<sup>27</sup> pero hay una parte ínfima que queda eliminada: se trata del paraíso de Cantor, con sus números transfinitos, así como los números infinitesimales de Abraham Robinson.

Todo este paraíso comenzó a conocerse en un artículo de Cantor de 1874.<sup>28</sup> Allí estableció que dos conjuntos son equivalentes o equipotentes si es posible establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los elementos de uno y del otro. Los conjuntos infinitos (considerados como infinitos actuales por hipótesis) equivalentes al de los números naturales fueron llamados numerables. En este artículo, Cantor probó que tanto el conjunto de los números racionales como el de los algebraicos son numerables, aportando un método de numeración de los mismos. Pero gracias a una original metodología de intervalos encajados establecidos a través de sucesiones no definidas por ningún algoritmo, llegó a la conclusión de que los números reales no eran numerables. Existía, pues, según Cantor, un conjunto infinito (el de los reales) de mayor potencia o cardinal que el de los números naturales. Más tarde, en un artículo de 1891,<sup>29</sup> Cantor ofreció, mediante un proceso de diagonalización,<sup>30</sup> una argumentación

---

<sup>27</sup> Una introducción a estos pequeños cambios necesarios puede verse en: A. SANVISENS (2021), *op. cit.*, pp. 137-145.

<sup>28</sup> G. CANTOR, «Ueber eine Eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen» («Sobre una propiedad del conjunto de los números reales algebraicos»). *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* [Berlin], 77, 1874, pp. 258-262.

<sup>29</sup> G. CANTOR, «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre» («Sobre una cuestión elemental de la teoría de conjuntos»). *Jahresber der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [Berlin], 1, 1891, pp. 75-78.

<sup>30</sup> La diagonalización o proceso diagonal parece ser que ya había sido utilizada por Paul du Bois Reymond en 1875 en el contexto de la teoría de funciones. También fue utilizada después de Cantor por Alan Turing para encarar el famoso «entscheidungsproblem» propuesto por Hilbert, que se refiere a si existe algún algoritmo general que

mucho más clara de la misma tesis, que se podía usar también para «probar» que cualquier conjunto tiene menor potencia que el conjunto de sus partes (o subconjuntos).

Vamos a exponer aquí el argumento diagonal de Cantor para demostrar que el cardinal de  $\mathbb{R}$  (conjunto de los números reales) es mayor que el de  $\mathbb{N}$  (conjunto de los naturales). Ello equivale a demostrar que no existe ninguna función exhaustiva<sup>31</sup> de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$ , o simplemente de  $\mathbb{N}$  en el conjunto de los reales entre 0 y 1  $[0, 1]$ .

Se parte de cuatro hipótesis (*ab absurdum*): 1) que los números naturales constituyen un infinito actual; 2) que los números reales constituyen un infinito actual; 3) que todos los números reales entre 0 y 1 pueden ser expresados (por ejemplo, en el sistema binario) por medio de infinitas cifras fraccionarias, y 4) que existe alguna función exhaustiva entre  $\mathbb{N}$  y  $[0, 1]$ .

Si representamos las primeras correspondencias de un ejemplo de esta supuesta función, tendremos la siguiente tabla de infinitas filas:

$\mathbb{N}$	$\rightarrow$	$[0, 1]$
1	$\rightarrow$	0, <b>00</b> 110110000111001110001...
2	$\rightarrow$	0,1 <b>10</b> 1111100101010101111...
3	$\rightarrow$	0,11 <b>000000000000</b> 111101001...
4	$\rightarrow$	0,001 <b>0</b> 1110001101000111000...
5	$\rightarrow$	0,01111 <b>11111</b> 10011111000001...
...		

Si la función es exhaustiva, en la columna de la derecha deben figurar todos los números reales comprendidos entre 0 y 1.

Entonces podemos construir un nuevo número real cuyas cifras fraccionarias sean las de la diagonal del cuadro marcadas en negrita, pero cambiadas de forma que los ceros se conviertan en unos y los unos en ceros. En el ejemplo expuesto, este nuevo número sería el 0,10110... Este nuevo número, al ser un número real entre 0 y 1, debería figurar en la lista de la tabla infinita anterior, pero, por otra parte, no podría figurar en dicha lista porque, tal como se ha construido, difiere de todos los números de la lista precisamente en la cifra de la diagonal.

---

podiera resolver secuencialmente todos los problemas de la matemática de cierto sistema axiomático. Este problema ha recibido el nombre de problema de la parada (en máquinas de Turing o algoritmos finitos). Turing demostró que no existe tal algoritmo. También hicieron uso del proceso diagonal Kurt Gödel, en sus teoremas de incompletitud (antes que Turing), y Alfred Tarski en 1933 en su demostración de la indefinibilidad de la verdad en aritmética. Cfr. S. VALENCIA, *El argumento diagonal en matemáticas: Análisis histórico, estructural y epistemológico* (Tesis). Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2009. Cuando se analiza a fondo el proceso diagonal usado por Cantor, se advierte que contiene el mismo principio metodológico que usó en la argumentación de 1874 (intervalos encajados), en la que se acepta un límite para una sucesión que no está definida.

<sup>31</sup> Se trata de una función en la que a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde algún elemento del conjunto de partida.

Esta contradicción llevó a Cantor a concluir que la hipótesis 4, la que supone que existe una función exhaustiva entre  $\mathbb{N}$  y  $[0, 1]$ , es falsa, y, por consiguiente, el conjunto  $[0, 1]$  debe contener más elementos que el conjunto  $\mathbb{N}$ , o, dicho de forma más técnica, el cardinal de  $\mathbb{N}$  es menor que el cardinal de  $[0, 1]$ , y, *a fortiori*, que el cardinal de  $\mathbb{R}$ .

Una primera inspección del argumento nos hace ver que su estructura es lógicamente defectuosa, ya que parte de cuatro hipótesis a partir de las cuales, por medio del corte diagonal, llega a una contradicción, lo cual obligaría, haciendo las cosas bien, a descartar alguna de estas hipótesis, pero nada indica que la falsa tenga que ser la cuarta, como supone Cantor. De hecho, somos muchos los que pensamos que las hipótesis falsas son las tres primeras. Solo este hecho ya descalifica definitivamente el argumento convirtiéndolo en una falacia.

Pero no es este el único defecto de la argumentación de Cantor. Si nos fijamos, la función que hemos puesto como ejemplo, al igual que las que se encuentran en todos los libros donde se explica esta argumentación, es una función obtenida aleatoriamente, es decir, no es una función algorítmica. La razón de ello es que no existe ninguna función algorítmica capaz de lograr esta correspondencia exhaustiva entre  $\mathbb{N}$  y  $[0, 1]$ , cosa que demostró Alan Turing, como luego veremos. Por eso, la función hipotética de la que Cantor intenta demostrar su inexistencia ha de ser una función no algorítmica. Siendo así, no existe ningún algoritmo capaz de dar cuenta del orden de los números reales colocados en la lista de la tabla de infinitas filas. Pero entonces las cifras del nuevo número construido por Cantor no vienen definidas por ningún algoritmo, con lo cual solo podrían definirse o darse a conocer a una mente nombrándolas todas y cada una de ellas, lo cual es imposible porque son infinitas potencialmente. No ocurriría lo mismo con las cifras del número  $\pi$ , del número  $e$ , o del número  $1/3$  (concediendo que dichos números puedan expresarse en forma de cifras fraccionarias, cosa también falsa, como ya vimos), porque dichos números están determinados por un algoritmo.

Concluyendo: el número construido por Cantor es una quimera inexistente, al que los cantorianos llaman número no computable. Pero si este número no existe, como es el caso, entonces no se da ninguna contradicción, y por tanto no podemos concluir que el cardinal de  $\mathbb{R}$  sea mayor que el de  $\mathbb{N}$ .

Cantor siguió el mismo esquema lógico en su argumentación de que el cardinal de un conjunto es siempre menor que el cardinal del conjunto de sus partes (teorema de Cantor), y por consiguiente este teorema es falso.<sup>32</sup> No hay infinitos de distinto cardinal, ordenados jerárquicamente por orden de menor a mayor. No existen los números transfinitos asociados a estos cardinales. De hecho, no existen infinitos actuales, sino que solo hay un infinito, el potencial.

---

<sup>32</sup> Puede encontrarse una explicación detallada de los fallos del argumento que conduce al teorema de Cantor en A. SANVISENS, 2021, *op. cit.*, pp. 58-61.

Aunque el teorema de Cantor sea falso, el proceso diagonal no lo es, siempre y cuando no se parta de la suposición de que los conjuntos involucrados sean infinitos actuales, y pueda hablarse de una función algorítmica. Así, por ejemplo, la utilización que hacen Alan Turing, Kurt Gödel y Alfred Tarski del mismo es perfectamente aceptable.

Alan Turing consiguió asignar un número natural a cada una de sus potencialmente infinitas máquinas (o algoritmos).<sup>33</sup> Supone Turing (*ab absurdum*) que pueda existir una máquina general que resuelva todos los problemas, es decir, el problema de la detención de las máquinas. Cada una de estas máquinas da una secuencia potencialmente infinita pero computable (que puede generarse por un algoritmo) de cifras, que corresponde a un número real entre 0 y 1. Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre los números naturales y las máquinas de Turing (equivalentes a los números reales computables entre 0 y 1). Si existe la máquina general, entonces proporcionará un algoritmo para ordenar estas secuencias y podremos tener una tabla que liste potencialmente los números computables, en la que cada fila sea una secuencia computable y, a la vez, toda la tabla sea computable.

Entonces Turing construye una nueva secuencia computable utilizando el proceso diagonal. Dicha secuencia debería poder estar en la tabla que contiene potencialmente todas las posibles secuencias, pero, por otra parte, no puede estar en la tabla porque difiere de cada una de las secuencias potencialmente infinitas en la cifra de la diagonal. Esta contradicción no le lleva a Turing a decir que el conjunto de los naturales es de menor potencia que el de los números reales computables, porque sabe que dichos números son numerables, ya que él consiguió dar un número natural a cada posible máquina o secuencia computable. La contradicción le lleva a negar la existencia de la máquina general, es decir, de una función algorítmica entre  $\mathbb{N}$  y el conjunto de los números reales computables. Dicho de otra manera, Turing demostró que los números reales computables no pueden numerarse efectivamente por medio de una función algorítmica, y deben numerarse al azar, porque, de hecho, son numerables. Ya Émile Borel en el IV Congreso Internacional de Matemáticas de 1908 afirmó lo siguiente: «Siendo todos los conjuntos considerados numerables, desde un punto de vista práctico, la única distinción importante es la siguiente: unos son efectivamente numerables y los otros no. Digo que un conjunto es efectivamente numerable cuando se puede indicar realmente un medio para asignar un lugar determinado a cada uno de sus elementos, sin ambigüedad posible».<sup>34</sup>

Ahora bien, como ya hemos visto que los números no computables son quimeras inexistentes (al no estar definidos ni por un algoritmo ni dando el valor de todas sus

---

<sup>33</sup> Cfr. A. TURING, «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsprobleme». *Proceedings of the London Mathematical Society* [London] (serie 2), 42, 1937, pp. 230-265 (corrección en 43, pp. 544-546).

<sup>34</sup> E. BOREL, *El espacio y el tiempo*. Barcelona: Montaner y Simón, 1931, p. 254 (nota 1).

cifras ya que son infinitas), podemos concluir que los números reales son numerables, pero solo pueden numerarse al azar, tal y como vamos a ver a continuación.

## 8. La numeración de los números reales

Los cantorianos creen que sea cual fuere la función que utilizemos, siempre habrá algún número real que no será la imagen de ningún número natural. Para convencerlos de lo contrario, vamos a darles ventaja y dejaremos que sean ellos mismos quienes vayan construyendo paso a paso dicha función, que, evidentemente, nunca terminará de crearse.

Comenzamos preguntando qué número real sospechan que no será imagen de ningún natural. Pongamos que digan: «El 0,776000001». Entonces nosotros decimos que al número 1 le corresponde el 0,776000001.

Seguimos preguntando lo mismo que antes, y ahora los cantorianos responden: «El 0,65». Nosotros decimos entonces que al número 2 le corresponde el 0,65. Continuamos preguntando lo mismo, y los cantorianos, un poco recelosos, responden: «El 0,99995432». Nosotros, sin pensarlo, decimos que al número 3 le corresponde el 0,99995432. Y así, por medio de este rifirrafe, vamos construyendo nuestra función no algorítmica de elaboración interminable.

Podemos asegurar que ningún número real se quedará sin poder ser la imagen de un número natural, ya que siempre habrá un número natural más al que podremos asignar como imagen dicho número real, sea el que sea, y esto es así porque los números naturales no se acaban nunca.

## 9. El infinito actual en física y cosmología

Así como David Hilbert no creía en la existencia real del infinito, considerándolo como una pura entelequia, Cantor sí creía en ella. Si en matemáticas no había objeción para el infinito, ¿por qué tenía que haberla en física? ¿Por qué no podía haber magnitudes infinitas? ¿Qué hay de contradictorio en una masa infinita, o en una colección de infinitos universos? De hecho, en el siglo XX resucitó la antigua idea de Giordano Bruno de los infinitos mundos. La teoría de la inflación llevó a Alan Guth a proponer la existencia de infinitos universos, lo cual fue aceptado por Stephen Hawking, por Max Tegmark (con sus cuatro niveles de multiversos), por David Deutsch, por Brian R. Greene y también por filósofos como David Kellogg Lewis. Últimamente varios de estos autores abandonaron la idea del infinito. Hace algunos años le escribí una carta a Stephen Hawking hablándole de los problemas del infinito. Probablemente no fue por eso, sino por consideraciones puramente matemáticas, pero el caso es que este ilustre pensador, en su última obra, insistió en que es posible que haya otros universos, pero no infinitos. El infinito, como hemos visto en este artículo, no existe como algo actual o acabado, sino como un

proceso inacabable. Por eso no puede haber magnitudes infinitas, porque una magnitud es algo fijo y definido. Un cuerpo puede aumentar de masa, pero la masa que tiene un cuerpo en un momento dado es algo expresable por un número, no por una serie de números crecientes. No hablemos ya de la velocidad, porque sin necesidad de acudir a la teoría de la relatividad, podemos ver que una velocidad infinita significaría que el móvil se encontraría en dos lugares al mismo tiempo, y esto, más que movimiento, más bien parece una no-localidad. Si admitimos una longitud infinita para un segmento, tenemos una cosa muy extraña, finita e infinita a la vez, y aún más extraña es una circunferencia infinita, ya que, al acercarse asintóticamente a su tangente, acaba por convertirse en una línea recta. Lo que no puede crecer, como un segmento o una circunferencia, sin transformarse en otra cosa, no puede ser infinito, porque el infinito es, precisamente esta posibilidad de crecer. Los límites impiden el crecimiento, por eso el infinito no tiene límites. Pero todo lo que acaba tiene un límite situado precisamente allí donde termina, y por ello, lo acabado no puede ser infinito. El infinito no puede ser actual.

Existen unos presupuestos metafísicos en todo paradigma científico. En la actualidad, el presupuesto metafísico dominante es la aceptación del infinito actual con el platonismo concomitante, imprescindible para dar credibilidad al principio antrópico como la explicación que está detrás de la biología, la física, la psicología y la cosmología. Como hemos demostrado, en la base del infinito actual está la inconsistencia lógica y el culto a la bruma, al misterio y a la paradoja. Los mismos proponentes de la explicación de las paradojas de Zenón acerca del movimiento, por medio de los infinitesimales y los números no estándar de A. Robinson, reconocen que no tienen una explicación porque el movimiento (según dicen) se da en los espacios infinitesimales inobservables e inaccesibles a nuestro pensamiento.<sup>35</sup> No menos patética fue la explicación de Bertrand Russell, según el cual no existe propiamente ningún estado de movimiento (para consuelo de Zenón) y, en todo caso, Aquiles alcanzaría a la tortuga de la misma manera como Tristram Shandy acabaría de escribir su autobiografía en la que tardaba dos años para narrar la historia de dos días; es decir, viviendo eternamente y terminando al final de un tiempo infinito.<sup>36</sup>

En el IV Congreso Internacional de Matemáticas (Roma, 1908), Henri Poincaré se refirió a la teoría de conjuntos como «un interesante caso patológico» y predijo que «las generaciones posteriores considerarán la teoría cantoriana como una enfermedad que se ha superado».

Los matemáticos están muy preocupados porque presienten el final del cantorismo y creen que esto representaría tener que prescindir de muchos logros de su ciencia. Son

---

<sup>35</sup> Cfr. W. I. McLAUGHLIN, «Una resolución de las paradojas de Zenón». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 220, 1995, pp. 66, 68.

<sup>36</sup> B. RUSSELL, *Los principios de la matemática*. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1948, pp. 442-443.

muchos los artículos<sup>37</sup> que plantean esta catástrofe. Pero esta alarma es injustificada. El constructivismo moderado (que no prescinde del principio del tercero excluido) puede abarcar toda la matemática si se trabaja con tesón.<sup>38</sup>

Lo que no puede ser es que una doctrina falsa, como es la de la existencia del infinito actual, sea la rectora del paradigma dominante en la ciencia contemporánea. Se hace urgente un cambio de paradigma.

## Referencias bibliográficas

- SAN AGUSTÍN, «La ciudad de Dios», en: *Obras de San Agustín*, XVI. Madrid: B.A.C, 1964.
- R. BACON, *Opus majus*, en: J. H. Bridges (ed.). Oxford: At the Clarendon Press (2 vols.), 1897.
- H. BERGSON, «El pensamiento y el movimiento», en: *Obras escogidas*. México: Aguilar, 1963.
- G. BOFFI, «Scienza e fede: Dio e l'infinito. Considerazioni di un matematico». *Espíritu: cuadernos del Instituto Filosófico de Balmesiana* [Barcelona], 161, 2021, pp. 185-200.
- B. BOLZANO, *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig, 1851. Ed. cast. México: UNAM, 2005.
- E. BOREL, *El espacio y el tiempo*. Barcelona: Montaner y Simón, 1931.
- M. CABADA, «La fundamentación filosófica del transfinito en Georg Cantor». *Pensamiento. Revista de investigación e información filosófica* [Madrid], 65/246 (s. Esp.), 2009, pp. 669-711.
- G. CANTOR, «Ueber eine Eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* [Berlin], 77, 1874, pp. 258-262.
- , «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre». *Jahresber der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [Berlin], 1, 1891, pp. 75-78.
- J. W. DAUBEN, «Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 83, 1983, pp. 82-93.
- R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die zahlen?* Braunschweig: Bieweg, 1888.
- J. DUNS SCOTO, *Opera omnia*. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1968-69.
- N. FALLETTA, *Paradojas y juegos*, Barcelona: Gedisa, 1988.
- GALILEO GALILEI, *Le opere*, Edizione Nazionale, ed. A. Favaro. Florencia: G. Barbèra, 1890-1909, Vol. VIII (reed. 1968).
- J. D. GARCÍA BACCA, *Los presocráticos*, vol. II. México: Fondo de Cultura Económica, 1944.
- K. GÖDEL, «Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme». *Monatshefte für Mathematik und Physik* [Wien], 38, 1931, pp. 173-198.
- D. HILBERT, «Über das Unendliche». *Mathematische Annalen* [Leipzig], 95, 1926, pp. 161-190.
- A. MACHADO, «Proverbios y cantares», XXIX, del libro de poemas *Campos de Castilla*, CXXXVI, en: *Poesías completas*. Madrid, Espasa-Calpe, 1941.
- W. I. MCLAUGHLIN, «Una resolución de las paradojas de Zenón». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 220, 1995, pp. 62-68.

---

<sup>37</sup> Cfr. G. BOFFI, «Scienza e fede: Dio e l'infinito. Considerazioni di un matematico». *Espíritu* [Barcelona], 161, 2021, pp. 185-200.

<sup>38</sup> Andréi A. Márkov inició un constructivismo recursivo en la década de 1930. Errett Bishop creó en la década de 1960 un constructivismo muy potente: E. BISHOP, *Foundations of constructive analysis*, McGraw Hill, 1968. Tenemos también la matemática predicativa de H. Poincaré y de Hermann Weyl; las corrientes finitistas y el intuicionismo de Brouwer, Heyting, Dummett, etc. Existe un proyecto de teoría de conjuntos constructiva en A. SANVISENS, 2021, *op. cit.*, pp. 137-145.

- A. W. MOORE, «Breve historia del infinito». *Investigación y Ciencia* [Barcelona], 225, 1995, pp. 54-59.
- PLATÓN, *Diálogos. Obra completa*. Vol. VI. Madrid: Gredos, 2002.
- H. POINCARÉ, *Últimos pensamientos*. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1946.
- W. V. QUINE, «Paradoja» (abril 1962), en: VV. AA, *Matemáticas en el mundo moderno*, Madrid: Blume, 1974, pp. 224-233.
- B. RUSSELL, «Recent work on the Principles of Mathematics». *The Internat. Monthly* [London], 4, 1901, pp. 83-101.
- A. SANVISENS, «Actualidad de las aporías de Zenón». *Convivium*, [Barcelona], 3, 1992, pp. 5-21.  
—, *Saliendo del paraíso de Cantor*, 2.<sup>a</sup> ed. Madrid: ViveLibro, 2021.
- G. SARMIENTO (ed.), *Sobre los fundamentos filosóficos de la ciencia de la naturaleza en la modernidad*, Vol. 1: *John Keill en torno a la filosofía mecánica y la divisibilidad infinita de la magnitud*. Caracas: Independently published, 2019.
- J. F. THOMSON, «Tasks and super-tasks». *Analysis* [Oxford], 15/1, 1954, pp. 1-13.
- A. TURING, «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsprobleme». *Proceedings of the London Mathematical Society* [London] (serie 2), 42, 1937, pp. 230-265 (corrección en 43, pp. 544-546).
- S. VALENCIA, *El argumento diagonal en matemáticas: Análisis histórico, estructural y epistemológico* (Tesis). Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2009.

Alejandro SANVISENS HERREROS