



NÚMEROS ENTEROS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS. ESTUDIO BIOGRÁFICO

María Muñoz Pérez
Raquel Ruano Barrera
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo realizamos un estudio biográfico de una alumna de 2º de ESO que estudia los números enteros y las expresiones algebraicas utilizando el material didáctico “Puzzle Algebraico”, como un registro analógico. Se analizan sus producciones en el pretest, postest, tareas de clase y entrevistas, con el fin de conocer los significados personales que da a los números enteros y a las expresiones algebraicas. Asimismo, se aporta un estudio de los errores que comete la alumna indagando sobre su origen.

Abstract

In this article we carry out a biographical study of a student of 2nd year of ESO that studies the integer numbers and the algebraic expressions using the teaching material "Algebraic Puzzle" as an analogical register. Their productions are analysed in the pretest, postest, class tasks and interviews, with the purpose of knowing the personal meanings that she gives to the integer numbers and the algebraic expressions. Also, a study of the student's errors is made in order to investigate its origin.

Introducción

Los números enteros y las expresiones algebraicas suponen frecuentemente para los alumnos una fuente constante de errores que en numerosas ocasiones les impide seguir avanzando en el camino de las Matemáticas. En trabajos anteriores hemos utilizado el material didáctico “Puzzle Algebraico” como una representación analógica (Socas, 2000), observando las ventajas y los inconvenientes que se dan en los procesos de enseñanza aprendizaje de estos tópicos. En este trabajo presentamos un estudio biográfico de una alumna de 2º de ESO que estudia los números enteros y las expresiones algebraicas elementales haciendo uso de las representaciones que proporciona el “Puzzle algebraico”. Se analizan las producciones de la alumna en las diferentes tareas: pre, postest, tareas de clase y entrevistas, y se estudia la evolución dicha alumna en la construcción de estos objetos matemáticos a lo largo del periodo de instrucción, así como los errores que comete, identificando, en lo posible, su origen.

Específicamente los objetivos del trabajo son:

- Analizar las elaboraciones de una alumna, en relación con los números enteros y las expresiones algebraicas elementales, y estudiar la evolución de las producciones obtenidas en el pretest, postest, tareas de clase y entrevista.
- Estudiar los errores que comete la alumna sobre los números enteros y las expresiones algebraicas elementales y determinar sus posibles orígenes.

Marco Teórico

En este apartado resumiremos lo que entendemos por estudio de casos y explicaremos brevemente la base teórica del estudio de errores.

En este trabajo haremos uso de una técnica cualitativa de investigación, el estudio de casos, de carácter descriptivo-interpretativo. El propósito es analizar el cómo se ha desarrollado el proceso más que ver su resultado. El estudio se realizó con un diseño de “estudio de caso”.

En la literatura se pueden encontrar diversas definiciones del estudio de casos, si bien tomaremos como referencia la siguiente, elaborada a partir de la síntesis de varias de ellas:

Estudio de casos: forma de investigación empírica de un fenómeno determinado que se hace en uno o en algunos pocos casos naturales, dentro de su propio contexto de ubicación.

Consideramos que los estudios de casos tratan de reflejar la realidad en forma completa y profunda mediante la descripción de la multiplicidad de dimensiones presentes en la situación estudiada, pero considerada como un todo, sin dejar de enfatizar los detalles y circunstancias específicas que se dan en ella (Cohen y Manión, 1990).

El estudio de los errores realizado en este trabajo se basa en el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que nos permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales.

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983). Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden organizarse (Socas, 2001) mediante la triada: obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas: (a) Errores del Álgebra que tienen su origen en la aritmética. (b) Errores de procedimiento: Los alumnos usan inapropiadamente fórmulas o reglas de procedimiento. (c) Errores del Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas tienen distinta naturaleza como son: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Metodología

En este trabajo se realiza un estudio biográfico de una alumna de 2º de ESO respecto a la evolución que tuvo en el estudio de las cantidades numéricas positivas y negativas y las expresiones algebraicas. El estudio biográfico supone observar a la alumna en todo el proceso seguido en el estudio de los dos tópicos anteriores y comporta necesariamente la utilización de datos obtenidos por diferentes instrumentos de medida, que van desde el pretest a la entrevista, pasando por el análisis de las tareas de clase y los postest. Entre ellos sobresale la observación directa por parte de la profesora que a su vez actúa como investigadora; los datos se recogen, en este caso, en un diario de clase.

El estudio es continuación de un estudio anterior que se llevó a cabo con alumnos de 2º de ESO en el Instituto de Enseñanza Secundaria José de Anchieta (La Laguna) en el curso 2003/04. En esta experiencia el protocolo de actuación constó de las siguientes fases: en primer lugar se les administró un pretest a los alumnos, seguidamente se desarrolló la fase de instrucción con el

Puzzle algebraico y posteriormente se administró un postest. Este postest lo denominamos postest 1, pues durante dos semanas más, aquellos alumnos que no habían alcanzado las competencias deseadas respecto a los números enteros y el lenguaje algebraico continuaron estudiando y realizaron nuevamente el postest, que es el que llamamos postest 2. A continuación, se seleccionó un grupo de 5 alumnos para hacerles entrevistas. Como hemos indicado, los alumnos habían seguido estudiando y utilizando el Puzzle después de la administración del postest 1. La selección se realizó en función de los resultados en el pretest y los postest, así como de la disposición en la clase de Matemáticas y del interés en realizar la entrevista. Se seleccionó una alumna de nivel alto; dos de nivel medio pero que presentaron una notable mejoría en su disposición hacia la clase de Matemáticas durante el periodo de instrucción con el puzzle; otra de nivel bajo y, por último, un alumno con Necesidades Educativas Especiales (NEE) que tuvo una mejoría clarísima entre el pre y postest y queríamos estudiar las causas de este comportamiento.

El test es una adaptación del cuestionario Palarea (1998) que ha sido utilizado en diferentes experiencias didácticas (Domínguez, 2003 y Domínguez y otros, 2004). Para completar el estudio se ha realizado una entrevista semiestructurada. Cada entrevista se realizó de manera individual en dos sesiones de media hora. Los protocolos de las entrevistas se basaron en preguntas seleccionadas del pre y postest y no fueron iguales para todos los alumnos. En cada una se incidió sobre aquellos aspectos que consideramos que podían tener mayor relevancia en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Estudio biográfico

El estudio biográfico está basado en las producciones de la alumna de nivel bajo, perteneciente al grupo de los cinco alumnos seleccionados, a largo

de toda la experiencia didáctica en la que participó. El proceso de presentación es: características de la alumna, datos del proceso de enseñanza/aprendizaje a través de sus producciones (test, postest 1, postest 2 y entrevistas) y clasificación y origen de los errores cometidos.

Características de la alumna

La alumna seleccionada, que la denominaremos Deborah, es una alumna que está clasificada como de nivel bajo. Con anterioridad a la instrucción con el Puzzle no había mostrado ningún interés por la asignatura de Matemáticas, es poco madura y poco estudiosa. Repite curso y tiene las Matemáticas de 1º de ESO suspendidas. La alumna, durante el periodo de instrucción comprendido entre el pre y postest 1, faltó mucho a clase por problemas de salud y, por lo tanto, no siguió la fase de instrucción con el Puzzle con continuidad. En el periodo comprendido entre la administración del postest 1 y el postest 2 es cuando comienza a tener conflictos cognitivos relevantes para su aprendizaje y como consecuencia de éstos, muestra un avance en el desarrollo conceptual y manipulativo del lenguaje numérico – algebraico, ésta fue la razón principal por la que se seleccionó para la entrevista y para este estudio.

Análisis de las producciones de la alumna

Seguidamente, analizaremos las respuestas dadas por la alumna en el pretest, postest 1, postest 2 y entrevista en las diferentes preguntas seleccionadas para este informe de investigación (preguntas 1 y 7 de la primera parte del test y 2 y 8 de la segunda parte).

En la pregunta número 1 del test se tratan las operaciones de carácter aditivo con cantidades positivas y negativas. Las respuestas de la alumna son:

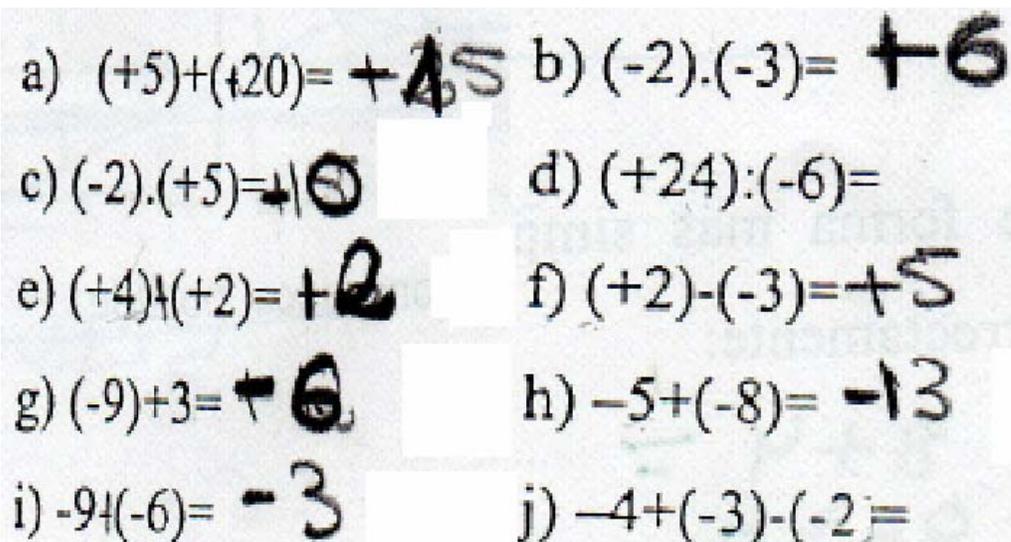
a) $(+5)+(-20) = -25$ b) $(-2).(-3) = -1$
c) $(-2).(+5) = +3$ d) $(+24):(-6) = +12$
e) $(+4)-(+2) = +2$ f) $(+2)-(-3) = +1$
g) $(-9)+3 = -6$ h) $-5+(-8) = +3$
i) $-9-(-6) = +3$ j) $-4+(-3)-(-2) = -5$

Figura 1

Se observa en el pretest (Figura 1), que tanto para sumar y restar, como para multiplicar, a la cantidad mayor le quita la menor; esto se comprueba en todos los apartados menos en el (1.d) y el (1.j). Con los signos parece ser más arbitraria, por lo que barajamos las siguientes hipótesis: ¿Pone el signo del mayor? ¿Usa las reglas del producto?

En particular, en el caso de las multiplicaciones y, en general, en el resto de las operaciones, no parece distinguir el signo de la cantidad del signo de la operación.

En el postest 1 (Figura 2), manipulando el Puzzle corrige su modo de proceder, contesta correctamente a todos los apartados excepto a los (1.d) y (1.j) que deja sin contestar. El Puzzle como registro analógico parece haberle ayudado en la distinción entre el signo de la operación y el signo de la cantidad.

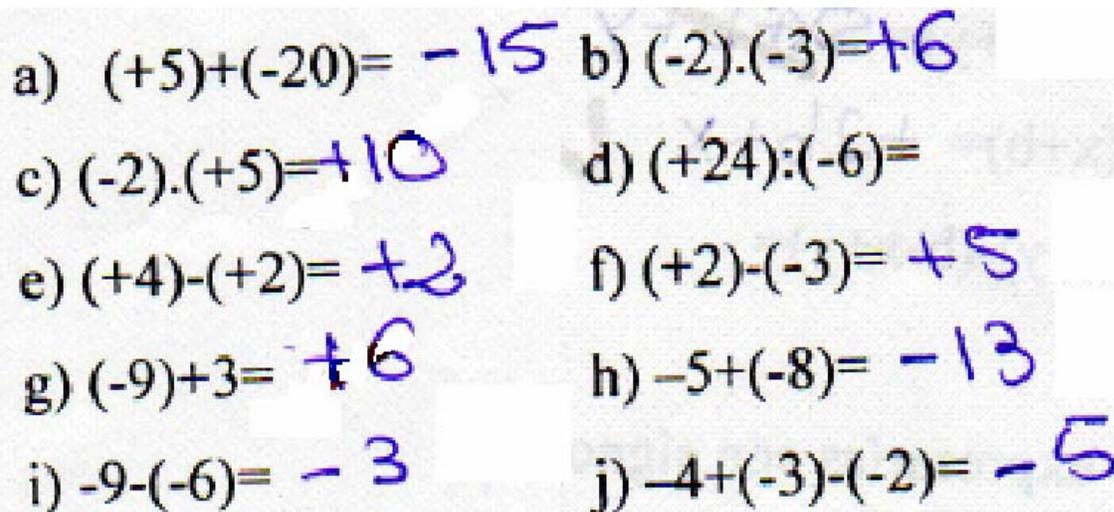


Handwritten solutions for Figure 2:

- a) $(+5)+(+20)=+25$
- b) $(-2)\cdot(-3)=+6$
- c) $(-2)\cdot(+5)=+10$
- d) $(+24):(-6)=$
- e) $(+4)-(+2)=+2$
- f) $(+2)-(-3)=+5$
- g) $(-9)+3=+6$
- h) $-5+(-8)=-13$
- i) $-9-(-6)=-3$
- j) $-4+(-3)-(-2)=$

Figura 2

En el postest 2 (Figura 3), no contesta al apartado (1.d), resuelve correctamente el (1.j) y en los (1.c) y (1.g) se equivoca en el signo.



Handwritten solutions for Figure 3:

- a) $(+5)+(-20)=-15$
- b) $(-2)\cdot(-3)=+6$
- c) $(-2)\cdot(+5)=+10$
- d) $(+24):(-6)=$
- e) $(+4)-(+2)=+2$
- f) $(+2)-(-3)=+5$
- g) $(-9)+3=+6$
- h) $-5+(-8)=-13$
- i) $-9-(-6)=-3$
- j) $-4+(-3)-(-2)=-5$

Figura 3

En la entrevista (Figura 4), procede bien en casi todos los casos, resta siempre quitando y sabe añadir ceros en los casos en los que proceda.

a) $(+5) + (-20) =$ ~~□□□□□~~ ~~□□□□□~~ □□□□□ □
 $= -15$
 e) $(-2) \cdot (+5) =$ □□ + 10
 e) $(+4) - (+2) =$ □□ ~~□□~~ + 2
 f) $(+2) - (-3) =$ □□ □□ □ = +5

Figura 4

Veamos ahora, un fragmento de la entrevista sobre el apartado (1.c) que es el único que resuelve incorrectamente. En su resolución intenta usar la representación que le facilita el Puzzle, pero no lo logra concretar.

...

D: Menos dos por más cinco...pongo dos fichas negativas...

P: Si no usases el puzzle ¿qué te daría?

D: Más diez

P: ¿Y por qué más 10? Explica el razonamiento que haces.

D: Dos por cinco 10 y como el cinco es positivo

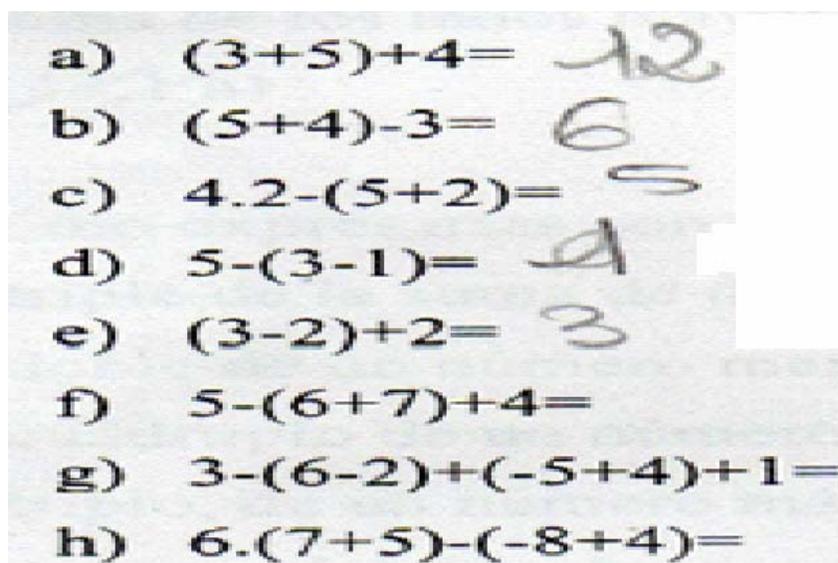
P: ¿Pones el signo del mayor?

D: Sí

Esta situación nos facilita información sobre el razonamiento que ha seguido con los signos. En el apartado sobre las valoraciones haremos hincapié sobre este punto.

Pasamos a resumir la pregunta 7 del test que se refiere a operaciones combinadas con cantidades positivas y negativas.

En el pretest (Figura 5), Deborah contesta correctamente a los apartados (7.a), (7.b) y (7.e). Sin embargo, en los apartados (7.c) y (7.d), hace caso omiso de los paréntesis y opera de izquierda a derecha sin tener en cuenta la jerarquía de las operaciones.



Handwritten solutions for arithmetic problems 7.a through 7.h:

- a) $(3+5)+4= 12$
- b) $(5+4)-3= 6$
- c) $4 \cdot 2 - (5+2) = 5$
- d) $5 - (3-1) = 1$
- e) $(3-2)+2= 3$
- f) $5 - (6+7) + 4 =$
- g) $3 - (6-2) + (-5+4) + 1 =$
- h) $6 \cdot (7+5) - (-8+4) =$

Figura 5

En el postest 1 (Figura 6), no comete errores en los apartados del (7.a) al (7.f), aunque no simplifica al máximo posible. Tanto en el apartado (7.g) como en el (7.h), encuentra problemas cuando el primer sumando del paréntesis es una cantidad negativa, y asume que el signo de esta cantidad es la operación que tiene que realizar.

a) $(3+5)+4= 8+4$
 b) $(5+4)-3= 9-3$
 c) $4 \cdot 2-(5+2)= 8-7$
 d) $5-(3-1)= 5-2$
 e) $(3-2)+2= 1+2$
 f) $5-(6+7)+4= 5-13+4$
 g) $3-(6-2)+(-5+4)+1= 3-4+-9+1$
 h) $6 \cdot (7+5)-(-8+4)= 6 \cdot 12-(12)$

Figura 6

En el postest 2 (Figura 7), contesta correctamente los apartados (7.a) y (7.e) y deja sin respuesta los apartados (7.g) y (7.h). Consideramos que el error en el signo del ítem (7.b) fue debido a un despiste. El resto de los apartados los tiene mal porque no sólo da prioridad en la resolución al paréntesis, sino también coloca el resultado en primera posición.

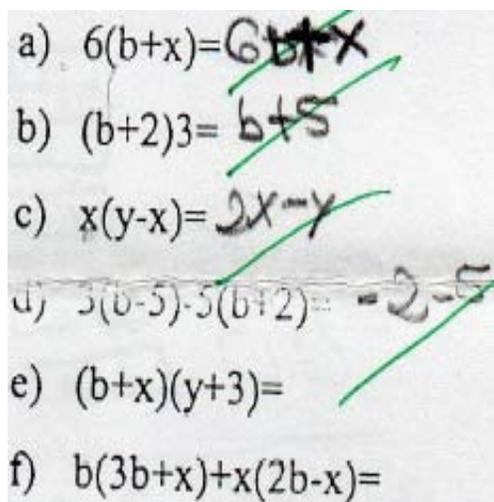
a) $(3+5)+4=(8)+4=+12$
 b) $(5+4)-3=(9)-3=-6$
 c) $4 \cdot 2-(5+2)=(7)-8=-1$
 d) $5-(3-1)=(2)-5=-3$
 e) $(3-2)+2=(1)+2=3$
 f) $5-(6+7)+4=13+4=17-5=+12$
 g) $3-(6-2)+(-5+4)+1=$
 h) $6 \cdot (7+5)-(-8+4)=$

Figura 7

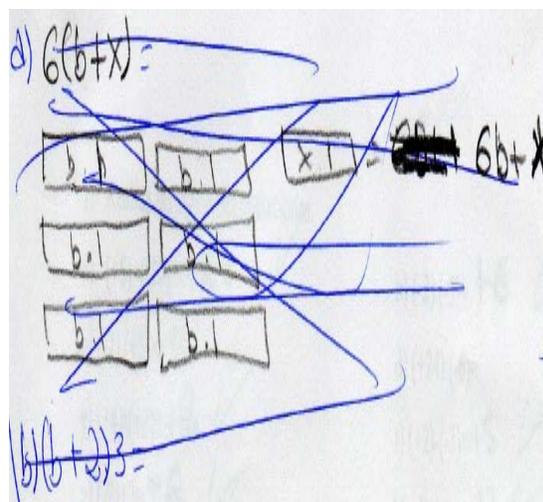
En la entrevista se insiste sobre los apartados (7.c) y (7.d), para tratar de averiguar el origen del error. No utilizó el Puzzle en la resolución. Las respuestas dadas a estos apartados son ahora correctas. Cuando se le pregunta por la manera errónea de resolverlos en el postest 2, responde que pensaba que el paréntesis es prioritario e interpreta que la palabra prioritario implica prioridad temporal (es decir, es lo primero se hace) y física (se coloca en primer lugar). La pregunta 2 de la segunda parte del test se refiere a operaciones de carácter multiplicativo con expresiones algebraicas elementales.

En esta cuestión de carácter algebraico no podemos describir los significados de Deborah previos a la instrucción con el Puzzle, al carecer de respuestas a estas cuestiones en el pretest, lo cual nos hace suponer que lo que se le pregunta no tiene ningún significado para ella.

En el postest 1, observamos que intenta contestar a la pregunta utilizando el Puzzle, pero no sabe utilizar correctamente la representación y lo descarta, como observamos en las figuras 8 y 9, respectivamente.



a) $6(b+x) = 6b+x$
b) $(b+2)3 = b+5$
c) $x(y-x) = 2x-y$
d) $5(b-5) - 5(b+2) = -2-5$
e) $(b+x)(y+3) =$
f) $b(3b+x) + x(2b-x) =$



d) $6(b+x) =$
 ~~b~~ ~~b~~ ~~x~~ ~~$6b+x$~~
 ~~b~~ ~~b~~
 ~~b~~ ~~b~~
 ~~b~~ ~~b~~
 ~~$b(b+2)3 =$~~

Figuras 8 y 9

Observamos que sólo responde a los cuatro primeros ítems. En el apartado (2.a) no sabemos si distribuye sólo respecto al primer miembro o simplemente omite el paréntesis. Por su proceder en otras preguntas nos decantamos por la segunda opción. Tanto en el ítem (2.b) como en el (2.c) omite el paréntesis y convierte el signo por en una suma.

En el postest 2 (Figura 10), sí utiliza la representación de los objetos matemáticos tratados que le facilita el puzzle y representa las fichas correspondientes para contestar a los distintos ítems de la pregunta.

Observamos como resuelve correctamente los ítems en los que no hay restas, es decir, (2.a), (2.b) y (2.e).

a) $6(b+x) = 6b + 6x$
 b) $(b+2)3 = 3b + 6$
 c) $x(y-x) = x \cdot y + x^2$
 d) $3(b-5) - 5(b+2) = -2b + 5$
 e) $(b+x)(y+3) = by + 3b + xy + 3x$
 f) $b(3b+x) + x(2b-x) = 8b^2 + 2b \cdot x$

Figura 10

Analicemos ahora los apartados (2.c) y (2.d), cuyas respuestas se recogen en las figuras 11 y 12, respectivamente.

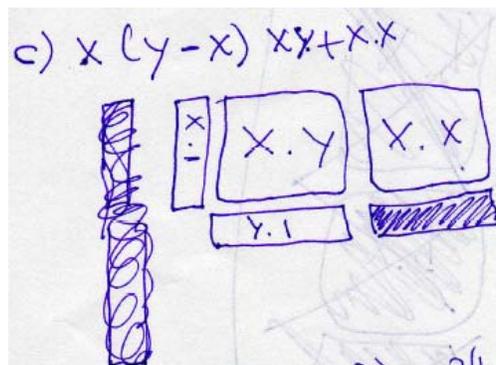


Figura 11

Figura 12

Se observa en el apartado (2.c) que procede correctamente salvo en el signo de x^2 , que es negativo. Además, observamos que no usa el signo igual. En el apartado (2.d) distribuye los dos paréntesis por separado. En el primero se vuelve a equivocar con el signo. En el segundo, asume que el signo de la operación resta, corresponde al signo de la cantidad inmediatamente posterior. Si no consideramos este fallo en el signo, el resultado sería correcto. Parece que la cadena de razonamientos de la alumna es correcta, si bien, no sabe transcribirla formalmente al lenguaje algebraico.

En la entrevista procede bien en todos los ítemes, no comete el error del signo en el ítem (2.c), aunque su primera intención tanto en el apartado (2.a) como en el (2.b) sigue siendo la del postest 1, es decir, omitir el paréntesis y convertir el por en un más. Ella misma se da cuenta que este proceso no es correcto y multiplica adecuadamente apoyándose en la representación que le facilita el puzzle y la idea de área.

Figura 13

En relación con el citado apartado (2.d) (Figura 13), es relevante lo que manifiesta en la entrevista.

...

D: Pongo tres fichas unidad, añado una b y cinco fichas negativas,...ahora tres b menos 5 me da 3b menos 15

P: Pues escribe.

D: Y ahora tengo que hacer cinco b más 2...y cinco b más dos me da cinco b menos 10.

P: Y entonces, ¿ahora qué hacemos?

D: Restamos...

P: Venga, escribe aquí lo que vas a hacer ahora.

D: Aquí me trabé, no sé.

Observamos como en el postest 2 (Figura 12), la primera distribución la realiza correctamente mientras que en la segunda se equivoca en el signo. En el postest 1 fue al revés. Aunque no escribe bien algebraicamente, sí parece que existe una evolución en la escritura, pues no se limita a escribir una cadena de igualdades. Sin embargo, no lee correctamente las operaciones, como el signo por no estar escrito explícitamente, no lo lee y además no tiene en cuenta el paréntesis.

Por otro lado, vemos que, así como en el postest 2 la resta se convierte en el signo del 5, aquí distingue entre signo de la cantidad y la operación, aunque esto le supone un problema pues no sabe como resolver la resta.

Finalmente, la pregunta 8 se refiere a operaciones algebraicas aditivas.

En el pretest, no contesta ninguno de los ítemes. En el postest 1 (Figura 14), manipula físicamente el Puzzle, pero no dibuja.

a) $x+x+3b+5x=7x+3b$
b) $4+3y=7y$
c) $(y-b)+b=+y$
d) $3y-(b-2y)=1y-b$
e) $5x-(b-x+y)=4x-b+y$
f) $b+(x+b)=2b+x$
g) $(x-b+y)-(b-x+y)=$

Figura 14

Como se puede observar, en esta pregunta contesta correctamente aquellos ítemes que no implican un menos delante del paréntesis, salvo en el ítem (8.b), en el que aún siente la necesidad de clausura. Sin embargo, cuando aparece un menos delante del paréntesis, actúa como si el paréntesis no existiese. Éste es un error que ya cometió en los ejercicios referentes a cantidades positivas y negativas.

En el postest 2 (Figura 15), manipula el Puzzle físicamente y no dibuja.

a) $x+x+3b+5x=7x+3b$ ✓
b) $4+3y=4+3y$ ✓
c) $(y-b)+b=+y$ ✓
d) $3y-(b-2y)=3y-b$ ✓
e) $5x-(b-x+y)=5x-b+y$ ✓
f) $b+(x+b)=+2b+x$ ✓
g) $(x-b+y)-(b-x+y)=$

Figura 15

Como se observa, ahora no tiene problemas en las operaciones aditivas que no implican un signo menos delante del paréntesis y además, resuelve su problema de clausura.

Respecto a las operaciones con un menos delante del paréntesis, sigue sin resolverlas correctamente, aunque la manera de proceder ha cambiado. Omite las letras que están dentro del paréntesis cuando han aparecido previamente y convierte la resta en una suma. Como resta quitando, consideramos que, para ella esta palabra es sinónima de eliminar.

En la entrevista, además de manipular el puzzle, lo dibuja. Los ítemes que había resuelto correctamente, sigue teniéndolos bien. Veamos, a modo de ejemplo, la transcripción de la entrevista en el ítem (8.d) que es el primero en el que hay un menos delante del paréntesis.

...

D: Pongo tres “y” y una “b”.

P: ¿Tienes que añadir una “b”?

D: Una b negativa ¿no?

P: ¿Y por qué negativa? ...Sigue, añades una b negativa ¿y?

D: Dos y.

P: ¿dos y positivas o negativas?

D: Negativas

P: ¿Por qué?

D: Silencio.

Se observa que nuevamente vuelve a actuar como si el paréntesis no existiera. Consideramos que este error tiene dos motivos: el primero es que Deborah siempre resta quitando en lugar de sumando el opuesto, y emplear la idea de quitar con expresiones algebraicas se le vuelve complicado. El

segundo motivo es el tipo de instrucción, ya que a lo largo de ésta, siempre queda muy claro cuál es la operación y cuál el signo de la cantidad.

Tras un largo silencio, la profesora resuelve el ítem utilizando tanto la idea de quitar como la del opuesto.

Handwritten algebraic expression: $d) 3y - (b - 2y) =$. Below the expression, there are three boxes containing 'y.' and two empty boxes, representing the decomposition of the expression into terms.

Handwritten algebraic expression: $\rightarrow 3y + \text{op}(b - 2y) =$
 $= 3y + (-b + 2y)$. Below the expression, there are three boxes containing 'y.' and two boxes containing 'b.' and 'y.', representing the decomposition of the expression into terms.

Figura 16

A continuación se le plantea que realice la siguiente operación y la resuelve perfectamente usando la idea de quitar. Entendemos que Deborah en este momento resuelve un conflicto que el Puzzle le había ayudado a generar y que era necesario para darle sentido a este tipo de operaciones.

Clasificación y análisis de los errores

En primer lugar recogemos en la tabla 1 un resumen los errores cometidos por Deborah. La primera columna muestra la denominación de cada tipo de error y las siguientes se refieren al número de errores de cada tipo

respecto a los contenidos tratados (números enteros y expresiones algebraicas) en las diferentes pruebas, respectivamente.

Error	Pretest			Postest 1		Postest 2	
Mayor menos menor	5	-	-	-	1	-	
Opera y pone signo del mayor	-	-	-	-	1	-	
Omite paréntesis	2	-	-	5	-	-	
Proceso incompleto	-	-	8	-	-	-	
Suma - y +	-	-	2	-	3	-	
Inversión de la resta	-	-	-	-	3	-	
Escribe mal el proceso	-	-	-	-	-	-	
Convierte · en +	-	-	-	-	-	1	
Clausura	-	-	-	-	-	-	
Quita sumandos que ya han aparecido	-	-	-	-	-	2	
+ · - = +	-	-	-	-	-	2	
Confunde signo cantidad con operación	-	-	2	-	-	-	

Tabla 1

Ahora vamos a organizar los errores respecto a su origen. Nos limitaremos a situar el origen de los errores en relación con las preguntas relativas a las expresiones algebraicas. En la siguiente tabla 2 se expresa tanto el tipo de error como el origen.

ORIGEN		TIPO DE ERROR
Actitudes afectivas		$(+) \cdot (-) = +$
Ausencia de sentido	Aritmética	Omisión de paréntesis
	Procedimiento	Convierte · en +
Obstáculo	Didáctico	Quita los sumandos que ya han aparecido
	Cognitivo	Clausura

Tabla 2

El error que hemos denominado “ $(+) \cdot (-) = +$ ”, en este caso, tiene su origen en la actitud de la alumna. Cometió este error cuando además tenía que aplicar la propiedad distributiva y no en el resto de las situaciones; por eso

pensamos que estaba más preocupada por distribuir correctamente que en las reglas de los signos.

Inicialmente habíamos conjeturado que la omisión del paréntesis podía tener dos orígenes: ausencia de sentido debido a cuestiones que habían quedado sin resolver en el campo numérico y obstáculo didáctico. En concreto, para Deborah, el origen de este error está en una ausencia de sentido. Inicialmente cometía este error en el campo numérico, parece que el Puzzle la había ayudado a solucionarlo, pero lo único que ha ocurrido es que se ha trasladado. Cuando se le plantean nuevos retos vuelve a proceder como solía hacer con anterioridad.

El error que hemos denominado “Convierte en +” tiene su origen en una ausencia de sentido. Deborah tiene problemas con la multiplicación y como la suma no le ocasiona dificultades, transforma el producto en suma.

El error denominado “Quita los sumandos que ya han aparecido” tiene su origen en un obstáculo didáctico. Como comprobamos en la entrevista, Deborah realiza la resta quitando en lugar de sumando el opuesto y entiende que la palabra quitar como sinónima de eliminar. Así consideramos importante hacer hincapié en los distintos métodos para realizar la resta y poner sumo cuidado en las palabras que elegimos a la hora de explicarla, puesto que los alumnos no siempre entienden lo mismo que nosotros queremos decir.

La clausura es un error que tiene su origen en un obstáculo cognitivo, Deborah no ve las expresiones algebraicas como enunciados que a veces son incompletos, los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse.

Valoraciones e Implicaciones didácticas

En primer lugar, respecto a la metodología de la entrevista, queremos explicitar que, a través del análisis del proceso de enseñanza aprendizaje por medio de las producciones de la alumna, y en particular del análisis de la entrevista, nos hemos dado cuenta de lo importante que es definir a priori los modelos de competencia para el análisis.

En relación con el nivel cognitivo, consideramos que ha habido una evolución tanto conceptual como de procedimientos, si bien, este avance es muy lento y viene condicionado por las concepciones previas de la alumna. Así, cuando encuentra dificultad en el razonamiento, no basa su proceder en lo recién aprendido, sino en su manera de hacer previa a la instrucción. Por esta razón los errores se van trasladando de un contenido a otro.

Consideramos que una representación analógica como el Puzzle Algebraico, ayuda a resolver problemas como la necesidad de clausura, los errores en la aplicación de la propiedad distributiva y parece que la sintaxis de esta representación analógica ha ayudado a evolucionar en la sintaxis de la representación formal.

La entrevista nos permite un análisis más minucioso tanto de los errores como del proceso de enseñanza aprendizaje. Esto es beneficioso no sólo desde el punto de vista de la investigación, sino desde el punto de vista de la docencia, ya que al conocer el origen de los errores podemos desarrollar estrategias que ayuden a superarlos. Por ejemplo, desde el punto de vista docente, si hubiera descubierto con anterioridad que la alumna entendía quitar como eliminar o priorizar del modo que lo hacía podía haberlo corregido. Aún siendo conscientes de que la retroalimentación que permite una entrevista es inviable en una clase, nos gustaría destacar como consecuencia didáctica lo importante que es incidir constantemente en la clase, en el lenguaje oral y

escrito, haciendo que los alumnos expresen formalmente, tanto en el lenguaje natural como en el algebraico, cada paso que dan. Pues, por un lado, ayuda a razonar correctamente y por otro, el no hacerlo puede suponer una ruptura en la cadena de razonamientos.

Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico). México: Siglo Veintiuno.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*, Madrid: La Muralla.
- Domínguez, E. (2003). *La innovación como mejora de la enseñanza. El papel de los materiales concretos en clase de Matemáticas*. Tesina de licenciatura. Universidad de La Laguna. Sin Publicar.
- Domínguez, E.; Muñoz, M.; Ruano, R.; Socas, M. M. (2004). Números enteros y expresiones algebraicas en 2º de ESO. Experiencia Didáctica con el Puzzle algebraico. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 6, 107-134.
- Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna. Sin publicar.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2000). *Guía del Puzzle Algebraico*. La Laguna: Campus.