



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p078-089>

Um Conjunto de *Applets* do GeoGebra para o Ensino de Frações no Ensino Fundamental I¹

A set of GeoGebra *Applets* for Teaching Fractions in Elementary School

HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI²

<https://orcid.org/0000-0003-1212-6252>

WANDERLEY MOURA REZENDE³

<https://orcid.org/0000-0002-1884-1241>

RESUMO

Neste artigo apresentamos um conjunto de *applets* concebidos para subsidiar o livro de frações para o Ensino Fundamental I, produzido pelo projeto Um Livro Aberto (<https://bit.ly/3HLGi6V>). Procuraremos destacar como estes recursos digitais construídos com o GeoGebra complementam e potencializam as diferentes estratégias pedagógicas tradicionalmente sugeridas para o ensino de frações.

Palavras-chave: ensino de frações; tecnologias digitais; GeoGebra

ABSTRACT

In this article we present a set of *applets* designed to support the Book of Fractions for Elementary School, produced by the Open Book project (<https://bit.ly/3HLGi6V>). We will seek to highlight how these digital resources built with GeoGebra complement and enhance the different pedagogical strategies traditionally suggested for teaching fractions.

Keywords: teaching of fractions; digital technologies; GeoGebra.

Introdução

¹ Apoio: Projeto Livro Aberto/IMPA e OBMEP/Fundação Itaú Social

² Universidade Federal Fluminense – hjbortol@gmail.com

³ Universidade Federal Fluminense – wmrezende@id.uff.br

O Projeto: Um Livro Aberto

O projeto Um Livro Aberto (<https://bit.ly/3HLGi6V>), promovido pelo IMPA e pela OBMEP, é um esforço de professores de matemática e de estatística do ensino superior e da educação básica que visa desenvolver, de maneira colaborativa, livros didáticos de matemática com excelência acadêmica e licença aberta (RANGEL e SIMAS, 2021), garantindo a todo público interessado a livre reprodução, distribuição, modificações e derivações dos materiais produzidos.

O projeto teve início em 2016 com uma etapa piloto, que deu origem ao livro “*Frações no Ensino Fundamental – Volume 1*” (RIPOLL et al., 2019), que foi publicado em 2020. Este primeiro volume foi organizado pelos autores como uma proposta para “ser aplicada diretamente em sala de aula, como material didático destinado aos anos intermediários do ensino fundamental (do 4º ao 7º ano)” e “amparar a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática na educação básica”. O texto reúne as reflexões e as discussões dos autores, amparadas por evidências científicas sobre o tema e pela análise de livros didáticos de diversos países (RIPOLL et al., 2019).

A decisão de escolher o tópico de frações para a etapa piloto se deve ao desafio que o tema traz em si e, também, devido a sua importância no contexto escolar:

Existe uma correlação positiva forte ($r > 0.80$) entre o conhecimento de frações e o desempenho como um todo em matemática no Ensino Médio. De fato, o conhecimento de fração no quinto ano prediz como será o desempenho futuro em matemática do aluno melhor do que parâmetros como testes de QI, proficiência em leitura, capacidade de memória, renda e educação familiares e o conhecimento prévio dos números naturais. (SIEGLER et al., 2013).

Um elemento diferenciado do material, característica marcante do projeto Um Livro Aberto, é o diálogo com o professor.

No início de cada lição, há uma introdução dirigida especificamente ao professor que apresenta os objetivos da lição, uma discussão dos aspectos matemáticos que serão tratados, as dificuldades esperadas e algumas observações sobre os passos cognitivos envolvidos. Nesta proposta, a “conversa” com o professor é permanente. Em cada atividade são realizadas discussões sobre os objetivos a serem alcançados, recomendações, sugestões metodológicas para sua execução e, quando pertinente, uma discussão sobre algum desdobramento do assunto tratado. (RIPOLL et al., 2019).

Planejado com o objetivo de dar mais ênfase e atenção à construção de frações como novas quantidades numéricas, o livro explora o assunto a partir de atividades que visam à elaboração conceitual do tema, conduzindo os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão, sem a costumeira pressa didática de apresentar os algoritmos de suas operações. Somas e subtrações de frações, por exemplo, são discutidas apenas na quinta e última lição deste volume. Já as operações de multiplicação e divisão de frações foram deixadas para serem abordadas em um segundo volume da obra. Interessamos para a produção deste artigo apenas o contexto das quatro lições iniciais, justamente aquelas que são pouco valorizadas no cenário didático usual.

Frações e registros de representação

O tópico de ensino e aprendizagem de frações já tem sido bem discutido nas várias comunidades científicas: por exemplo, no contexto da Teoria das representações semióticas, Duval faz uma análise do desenvolvimento cognitivo e estabelece que as dificuldades de aprendizagem dos números racionais estão relacionadas a três fenômenos interligados: (i) “existência de diversos registros de representação semiótica”: o registro simbólico-numérico (fracionário e decimal) - ou algébrico; o figural ou o pictórico (representação de partes de grandezas discretas ou contínuas); e o registro na língua natural; (ii) “diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica”; (iii) “coordenação entre diferentes registros de representação semiótica” (*apud* CAMARGO IGLIORI & MARANHÃO, 2003). Assim, dado o papel fundamental que desempenham os registros de representação semiótica no ensino e na aprendizagem de frações e os recursos de representação e articulação de registros que o GeoGebra oferece, a equipe de elaboração já tinha consciência do grande potencial do GeoGebra na construção de materiais instrucionais para acompanhar o texto.

Não é nosso objetivo fazer aqui uma revisão da literatura sobre o estado da arte de ensino e aprendizagem de frações. Mas cabe destacar que os três fenômenos destacados no parágrafo anterior foram considerados na concepção e organização das atividades do Livro de Frações no Ensino Fundamental – Volume 1 (RIPOLL et al., 2019). Para o leitor interessado recomendamos, dentre outras, as seguintes referências: (ZERO, OLIVEIRA, PAULO D’ALESSANDRO NETO, 2021) e (MAIA, 2022)

Observamos que o uso de diferentes registros de representação no livro de frações do Projeto Um Livro Aberto viabiliza:

1. **Uma compreensão multifacetada:** As frações são um conceito abstrato que pode ser representado de várias maneiras, como números, partes de um todo, pontos em retas numéricas, diagramas de setores, diagramas de barras, entre outros. Os diferentes registros

de representação semiótica permitem que os alunos desenvolvam uma compreensão mais ampla e multifacetada das frações, facilitando a conexão entre os aspectos conceituais e visuais.

2. **O acesso a diferentes estilos de aprendizagem:** Os alunos têm diferentes estilos de aprendizagem, e alguns podem se beneficiar mais de determinados registros de representação do que de outros. Ao utilizar uma variedade de registros, como símbolos, diagramas, gráficos ou modelos concretos, os educadores podem atender às necessidades individuais dos alunos e fornecer múltiplas formas de compreensão.
3. **Um apoio à construção de significado:** Os registros de representação semiótica ajudam os alunos a construir significados e fazerem conexões entre conceitos matemáticos. Ao trabalhar com diferentes representações de frações, os alunos são desafiados a relacionar os símbolos matemáticos com suas experiências e a conectar o conhecimento matemático com situações do mundo real.
4. **O desenvolvimento de fluência:** O uso de diferentes registros de representação ajuda os alunos a desenvolver fluência na manipulação de frações. Ao praticar a interpretação e criação de diferentes representações, eles fortalecem suas habilidades de raciocínio matemático e melhoram sua capacidade de resolver problemas envolvendo frações.
5. **A visualização e a comparação de frações:** Os registros visuais, como diagramas ou modelos concretos, permitem que os alunos visualizem e comparem frações de maneira mais tangível. Isso ajuda a construir uma base sólida para a compreensão das relações entre as frações e as operações envolvendo essas quantidades.
6. **A transição para conceitos avançados:** O uso de registros de representação semiótica durante o ensino de frações prepara os alunos para conceitos matemáticos mais avançados, como números decimais, porcentagens, razões e proporções. A familiaridade com diferentes representações facilita a transição e a compreensão desses tópicos relacionados.

Destacamos ainda que O uso de múltiplos registros de representação semiótica no ensino e aprendizagem de frações na escola básica estabelece conexões com a **teoria hebbiana** em neurociência. De acordo com a teoria hebbiana, células nervosas no cérebro estabelecem conexões sinápticas mais fortes quando são ativadas simultaneamente (Singer, 2007). Ao utilizar diferentes registros, como símbolos, diagramas, gráficos e modelos concretos, os alunos são expostos a estímulos visuais e cognitivos variados. Essa variedade de estímulos

ativa diferentes áreas do cérebro, permitindo que as conexões sinápticas sejam fortalecidas e ampliando a capacidade de compreensão das frações. Dessa forma, o uso de múltiplos registros de representação semiótica no ensino de frações na escola básica pode otimizar o processo de aprendizagem, promovendo a formação de redes neurais mais robustas e facilitando a transferência de conhecimento matemático para situações do mundo real. Dito de outra maneira, ao utilizar diferentes registros de representação, como símbolos matemáticos, diagramas e modelos concretos, estamos fornecendo múltiplas formas de estimulação visual e cognitiva para o cérebro do aluno. Isso cria oportunidades para a formação de novas conexões sinápticas e o fortalecimento das conexões existentes, o que pode levar a uma maior retenção e transferência de conhecimento. Além disso, o uso de múltiplos registros de representação pode ajudar a construir uma base sólida de compreensão conceitual, que é fundamental para o aprendizado de frações e outras áreas da matemática. Em síntese, a utilização de múltiplos registros de representação semiótica no ensino de frações pode ser vista como uma forma de estimular o cérebro e criar oportunidades para o aprendizado duradouro e significativo.

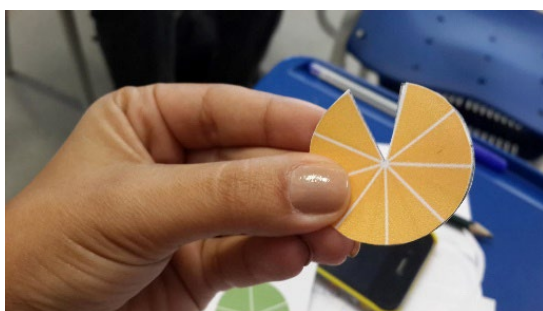
A Estrutura do Livro Aberto de Frações e as atividades selecionadas

As duas primeiras lições do livro de frações introduzem os conceitos elementares e a linguagem de frações a partir de situações concretas e de modelos contínuos, considerando o cotidiano do próprio aluno.

Na Lição 1, as frações emergem de situações concretas amparadas pela linguagem verbal. O conceito de fração aparece ligado a noções informais traduzidas por expressões como metade, terço, quartos, décimos e centésimos, por exemplo. Considerando o construto parte/todo, a expressão “fração unitária” nomeia cada uma das partes da divisão da unidade em partes iguais. Toma-se bastante cuidado com a determinação da unidade e com a noção de “equipartição” para a identificação de uma fração.

A notação simbólica de frações, bem como as frações não unitárias, inclusive as maiores do que a unidade, surgem apenas na Lição 2. Contudo, nas atividades dessas duas lições iniciais, o conceito de fração está fortemente vinculado a um objeto concreto (torta, pizza etc.), não sendo tratado ainda como uma abstração própria do conceito de número (isso só será feito na Lição 3 via reta numérica). Nesse sentido, cabe destacar que as representações pictóricas se tornam um apoio importante para essa construção do conceito de frações nas duas lições iniciais.

Na Lição 1 do Livro, por exemplo, várias atividades “mão na massa” com imagens pictóricas e materiais concretos de apoio são propostas para que os alunos construam e sedimentem o conceito de fração unitária (Figura 1).



Atividade 4

a) Quais dos oito retângulos a seguir foram partidos em quartos?

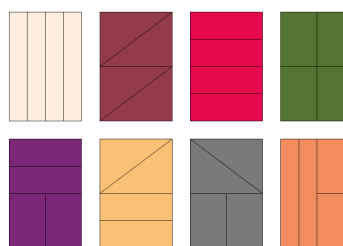


FIGURA 1: Atividades com materiais concretos e pictóricos.

FONTE: Os autores.

Na Lição 3, utiliza-se a reta numérica, enfatizando a associação do segmento unitário à unidade, para representar e comparar as frações com mesmo denominador. Os modelos visuais contínuos e a justaposição de partes correspondentes às frações unitárias são a base da proposta desenvolvida. A reta numérica é, com efeito, o instrumento didático que irá possibilitar o descolamento do significado de fração (número) do de “fração de objetos concretos”.

A comparação de duas frações quaisquer é abordada apenas na Lição 4, utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares, em modelos de área circulares e na reta numérica. A inclusão de modelos diferentes é proposital, de modo que o aluno possa abstrair a igualdade de frações por meio da observação de frações equivalentes em contextos diferentes. Finalizando a lição, são propostas atividades que conduzem à exploração da propriedade de densidade (dadas duas frações diferentes, é sempre possível determinar uma terceira fração que está entre elas).

O volume 1 encerra-se com a Lição 5, onde se faz uma abordagem inicial sobre adição e subtração de frações. De modo sintético, pode-se afirmar que a proposta didática do texto é inovadora, procurando desenvolver o raciocínio matemático amparado por reflexões e uma participação ativa do estudante no seu processo de aprendizagem. As atividades estão organizadas considerando uma ordem crescente de dificuldade, valorizando a capacidade cognitiva dos estudantes, desafiando e procurando levar os alunos a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados. No lugar de uma extensa quantidade de exercícios, são propostas poucas atividades que exigem maior reflexão e aprofundamento dos conceitos. Assim, evitam-se atividades de simples observação e repetição de modelos e os tradicionais “exercícios de fixação”, procurando investir mais na diversificação de abordagens sobre o assunto em evidência. O uso de materiais concretos, jogos e de atividades interativas é incentivado.

Neste artigo daremos destaque às atividades que se utilizam do software GeoGebra. Duas delas já foram encaminhadas como propostas no próprio corpo do livro, mais especificamente as atividades 2 e 7, na Lição 4. As outras duas foram elaboradas como suporte para o encerramento/sistematização das atividades realizadas em oficinas (de formação continuada com os professores que ensinam matemática) sobre o conteúdo da Lição 1. O processo de revisão do material elaborado é contínuo, tal como sugere a própria filosofia do projeto Um Livro Aberto. A cada oficina realizada e aplicação, novas sugestões são incorporadas, muitas delas associadas ao uso de novas tecnologias. Enquanto alguns estudos apontam para um aprendizado melhor em determinadas situações com o uso de materiais digitais (YURNIWATI, HARTANTI e JACQUILINE, 2022), nosso posicionamento se alinha com o de (SARAMA e CLEMENTS, 2009): um tipo de material (concreto ou virtual) não substitui o outro – eles podem ser complementares – pois cada tipo pode proporcionar experiências pedagógicas próprias. Mais importante é a maneira como os materiais são integrados na aprendizagem da criança que dá aos materiais valor e significância.

Passemos então à análise dessas atividades que se utilizam dos recursos do GeoGebra.

1. Frações unitárias: modelos circulares e retangulares

A Lição 1 do livro de Frações no Ensino Fundamental introduz o tema a partir do conceito de fração unitária. Para que os alunos construam e consolidem esse conceito, são propostas atividades com materiais concretos, que se utilizam de diversas representações pictóricas (Figura 1). A partir das experiências realizadas com professores da educação básica, foram desenvolvidos e sugeridos, para uso pelo professor/aluno no encerramento/sistematização da Lição 1, dois *applets* GeoGebra, um com o modelo circular (<https://bit.ly/3otQiHJ>), outro com o modelo retangular (<https://bit.ly/3Bmvbjj>) (Figura 2).

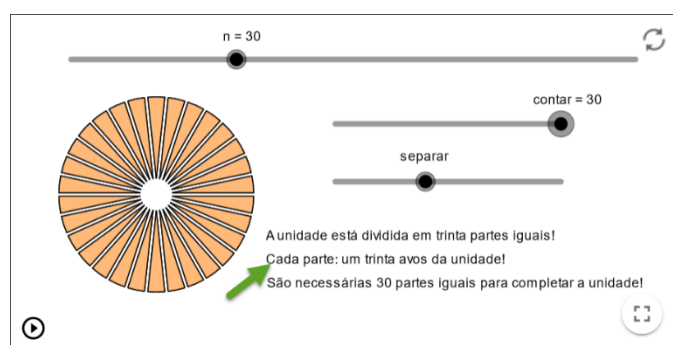


FIGURA 2A: *Applet* GeoGebra para frações unitárias (<https://bit.ly/3otQiHJ>)

FONTE: Os autores.

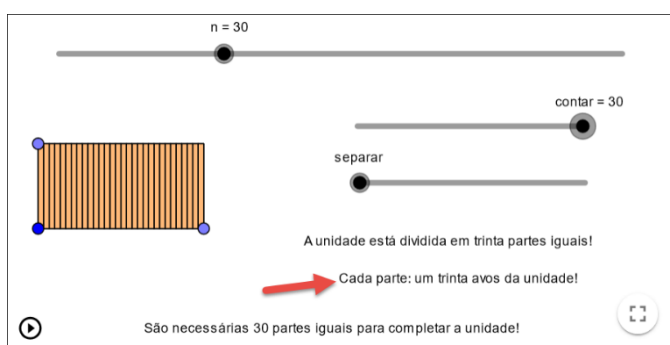


FIGURA 2B: Applet GeoGebra para frações unitárias (<https://bit.ly/3Bmvbjj>).

FONTE: Os autores.

Como já dito anteriormente, essas versões digitais construídas com o GeoGebra não substituem as atividades originais, mas contribuem significativamente para o aprendizado do assunto. Contudo, neste caso, quais seriam as vantagens dos *applets* GeoGebra frente aos materiais concretos e pictóricos estáticos?

Primeiramente, os *applets* GeoGebra permitem articular representações múltiplas, no caso, os modelos pictóricos contínuos e a **linguagem natural** com os nomes das frações unitárias (indicadas pelas setas vermelhas na Figura 2). A notação simbólica não foi incluída nestas construções pois ela será apresentada propositalmente apenas na lição seguinte. Depois, as construções permitem aos alunos experimentar e visualizar frações unitárias **difíceis de se construir com materiais concretos ou de se desenhar no quadro** como a fração $1/99$ de um disco (os *applets* viabilizam o contato com estas frações com denominadores). Além disso, ao usar o controle deslizante n nos *applets*, o aluno poderá perceber que quanto maior o número de partes em que a unidade é dividida, menor será cada uma das partes. O controle deslizante *separar*, por sua vez, permite separar as n partes em que a unidade foi dividida, um aspecto que não é possível de se contemplar com imagens pictóricas estáticas.

2. Equivalência de frações

O conceito de igualdade de frações é abordado na lição 4 por meio de representações equivalentes em modelos de área retangulares, ou em modelos de área circulares ou na reta numérica. O software GeoGebra é usado especificamente em duas atividades (atividade 2 e atividade 8).

A Figura 3 exibe uma atividade que explora a equivalência de frações via dobraduras de uma folha de papel e a tela da extensão para o GeoGebra (<https://bit.ly/3oQCzei>).

O recurso à dobradura, por si só, já garante um caráter inovador à atividade. Não obstante, com a versão da atividade no GeoGebra é possível modelar dobras que não poderiam ser executadas com o papel físico e, também, ajustar o formato

da folha de papel. Além disso, a contagem dos retângulos é realizada automaticamente, o que minimiza o esforço cognitivo do aluno, liberando sua atenção para o que realmente deve ser observado.

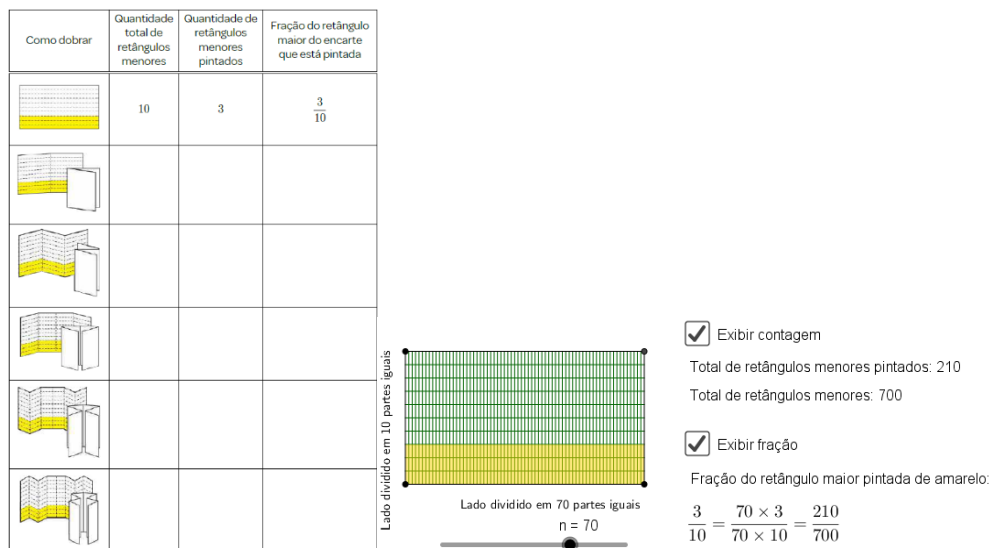


FIGURA 3: Equivalência via dobraduras (<https://bit.ly/3oQCzei>).

FONTE: Os autores.

A noção de equivalência também é trabalhada no contexto da reta numérica com imagens pictóricas e o GeoGebra (<https://bit.ly/3OULwhh>) (Figura 4). A vantagem do GeoGebra neste caso reside na notação simbólica automática para as várias subdivisões.

Atividade 7

a) Preencha os quadradinhos com numeradores adequados de modo que cada fração corresponda sua respectiva marca em cada reta numérica.

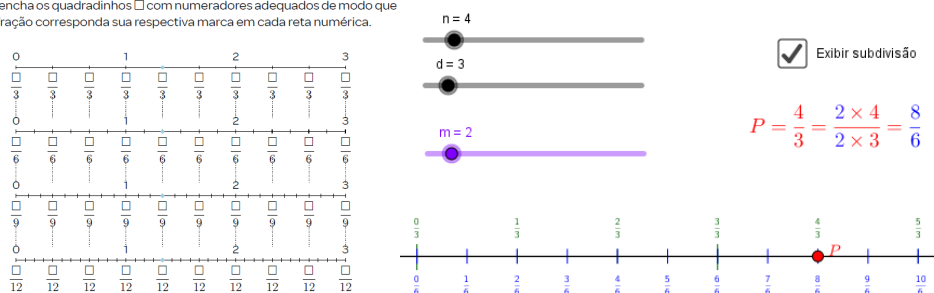


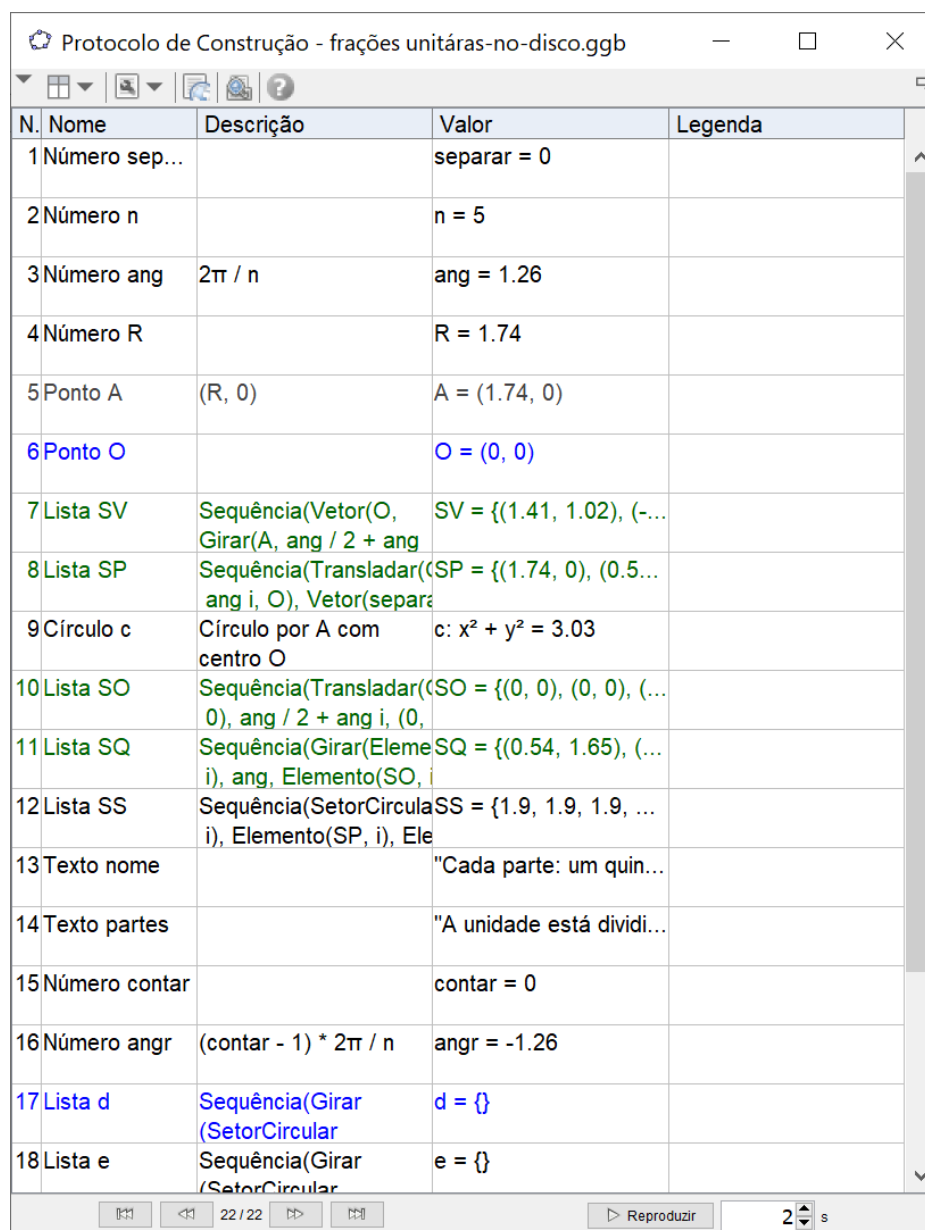
FIGURA 4: Equivalência via retas numéricas (<https://bit.ly/3OULwhh>)

FONTE: Os autores.

3. Sobre a construção dos *applets* GeoGebra

A interatividade dos *applets* construídos foi implementada via **controles deslizantes** que permitem definir numerador e denominador rapidamente; a generalidade na divisão da unidade é concebida via o comando *Sequência[]*

(equivalente ao comando *for* das linguagens de programação usuais). O leitor interessado na sintaxe exata dos comandos pode usar o Protocolo de Construção (Figura 5) do GeoGebra, um recurso muito útil para se estudar e entender como construções no GeoGebra foram feitas especificamente.



N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Número sep...		separar = 0	
2	Número n		n = 5	
3	Número ang	$2\pi / n$	ang = 1.26	
4	Número R		R = 1.74	
5	Ponto A	(R, 0)	A = (1.74, 0)	
6	Ponto O		O = (0, 0)	
7	Lista SV	Sequência(Vetor(O, Girar(A, ang / 2 + ang	SV = {(1.41, 1.02), (-...	
8	Lista SP	Sequência(Transladar((SP = {(1.74, 0), (0.5... ang i, O), Vetor(separ		
9	Círculo c	Círculo por A com centro O	c: $x^2 + y^2 = 3.03$	
10	Lista SO	Sequência(Transladar((SO = {(0, 0), (0, 0), (... 0), ang / 2 + ang i, (0,		
11	Lista SQ	Sequência(Girar(ElемеSQ = {(0.54, 1.65), (... i), ang, Elemento(SO, i		
12	Lista SS	Sequência(SetorCircularSS = {1.9, 1.9, 1.9, ... i), Elemento(SP, i), Ele		
13	Texto nome		"Cada parte: um quin...	
14	Texto partes		"A unidade está dividi...	
15	Número contar		contar = 0	
16	Número angr	$(contar - 1) * 2\pi / n$	angr = -1.26	
17	Lista d	Sequência(Girar (SetorCircular	d = {}	
18	Lista e	Sequência(Girar (SetorCircular	e = {}	

FIGURA 5: Protocolo de construção do *applet* da Figura 4

FONTE: Os autores.

O *applet* da Figura 1 foi construído usando-se a opção de programação JavaScript do GeoGebra, uma vez que esta linguagem oferece mais recursos de

manipulação de *strings* (textos), algo necessário para representar as frações pelos seus nomes em linguagem natural.

3. Considerações Finais

Mesmo com tópicos mais elementares do Ensino Básico, o GeoGebra pode se mostrar um aliado poderoso instrumento didático ao permitir generalizações e cálculos automáticos que podem ser usados em sala de aula em complemento aos materiais concretos e pictóricos tradicionalmente usados, seja pelo professor, via um projetor multimídia, ou seja pelos próprios alunos, via GeoGebra para *Smartphones* (veja o vídeo <https://bit.ly/3zTByZa> para uma demonstração).

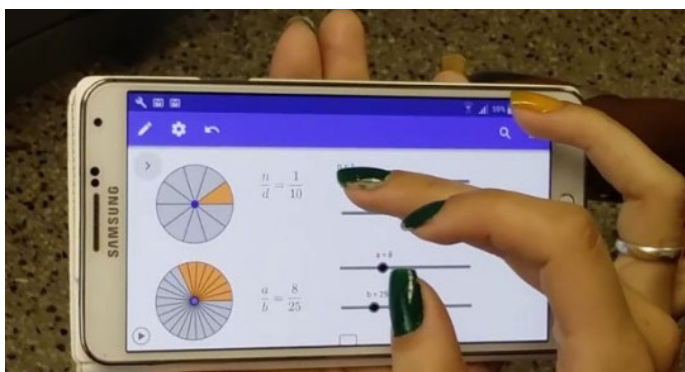


FIGURA 4: Um *applet* GeoGebra de frações no celular.

FONTE: Os autores.

Em oficinas realizadas presencialmente e a distância com professores em formação inicial e em formação continuada, recebemos um *feedback* positivo dos *applets* propostos no sentido de eles generalizarem as atividades idealizadas com materiais concretos e de poderem ser executados em *smartphones* o que, em geral, atrai e desperta o interesse dos alunos, segundo os professores.

Em trabalhos futuros, pretendemos nos *applets* iniciais incluir a fala via sintetizador de voz dos nomes das frações e, também, propor atividades diretamente com o uso dos *applets* GeoGebra.

4. Agradecimentos

Agradecemos aos dois pareceristas anônimos pelas várias sugestões dadas que contribuíram para o aprimoramento do texto e à Fundação Itaú pelo apoio ao Projeto.

Referências

IGLIORI, S. B. C.; MARANHÃO, M. C. S.A. Registros de Representação e Números Racionais. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**. Registros de Representação Semiótica. São Paulo, Papyrus, 2003.

MAIA, D. **Estado da Arte de Pesquisas sobre o Ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais no Brasil (1997 – 2021)**: um olhar sobre materiais e tecnologias. Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2022.

RANGEL, L.; SIMAS, F. B. Um Livro aberto para a Matemática. **Revista Ciência Hoje**. 2021. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/artigo/um-livro-aberto-para-a-matematica/>. Acesso em: 26 de julho de 2022.

RIPOLL, C. C. et al., **Frações no Ensino Fundamental: volume 1**. Rio de Janeiro: Projeto Livro Aberto 2019. Disponível em: <https://umlivroaberto.org/producao/fracoes/>. Acesso em: 26 de julho de 2022.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. 'Concrete' computer manipulatives in mathematics education. **Child Development Perspectives**, v.3 n. 3: p.145–150. 2009.

SIEGLER, ROBERT S. et al. *Fractions: The new Frontier for Theories of Numerical Development*. **Trends in Cognitive Sciences**, bn. 7, n.1, pp.13-19, 2013. doi: 10.1016/j.tics.2012.11.004

SINGER, F. M. (2007). *Beyond conceptual change: Using representations to integrate domain-specific structural models in learning mathematics*. **Mind, Brain, and Education**, 1(2), 84-97. <https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2007.00009.x>

YURNIWATI; HARTANTI, P.; JACQUILINE, S. *Comparing Virtual and Concrete Manipulative on 5th Grades Students in Fraction Performance* **AIP Conference Proceedings** **2479**, 020025, 2022.

ZERO, B. de M.; OLIVEIRA, P. C.; D'ALESSANDRO NETO, R.. Conhecimento matemático para o ensino através do Estado da Arte envolvendo Números Racionais em pesquisas brasileiras. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n.1, p. 1-23, 2021.