http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p043-061

O estudo da geometria analítica com a utilização do software GeoGebra

The study of analytical geometry using GeoGebra software

IVAN DE OLIVEIRA HOLANDA FILHO [1]

0000-0002-6368-9971

MARCOS PAULO MESQUITA DA CRUZ [2]

0000-0001-7390-6602

RESUMO

O presente ensaio apresenta uma experiência de metodologia baseada em um estudo da Geometria Analítica por meio do software GeoGebra. A ideia surgiu a partir da nossa primeira experiência como autores de livro em que trabalhamos a aplicação do software em soluções diferentes de uma mesma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Nesse sentido, investigamos a relação entre Filosofia, Ciência e Religião a partir de um contexto histórico em que se situa o surgimento da Geometria Analítica. Abordamos, também, alguns tópicos que englobam a BNCC e algumas práticas de sala de aula com o GeoGebra, todos em um cenário simbiótico com a matemática. Constatamos que as possibilidades podem direcionar a maneira pela qual o profissional da educação enxerga seu trabalho e que além das dificuldades da realidade educacional, ainda há sugestões de propostas que os docentes são capazes de realizar para a transformação de vidas.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática; Geometria Analítica; GeoGebra; Práticas Educacionais.*

ABSTRACT

This essay presents a methodology experience based on a study of Analytical Geometry through the GeoGebra software. The idea came from our first experience as authors of a book in which we followed the application of the software in different solutions of the same issue of the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools. In this sense, we investigated the relationship between Philosophy, Science and Religion from a historical context in which the emergence of Analytical Geometry is situated. We also approach some themes that encompass the BNCC and some classroom practices with GeoGebra, all in a symbiotic scenario with mathematics. We found that possibilities can direct the way in which education professionals see their work and that, in addition to the difficulties of the educational reality, there are still suggestions for proposals that teachers are capable of carrying out to transform lives.

Keywords: *Mathematics Teaching; Analytical Geometry; GeoGebra; Educational Practices.*

[1] Mestrando em Economia Rural (PPGER/UFC), Licenciado em Matemática (UECE). Professor da Rede Básica de ensino em Maracanaú e do estado do Ceará – ivanfilho@ymail.com

[2] Doutorando e Mestre em Economia Rural (PPGER/UFC), Bacharel em Ciências Contábeis (UECE) e em Engenharia Metalúrgica (UFC) – marcos_paulo_mesquita@hotmail.com

1. Introdução

Há um pouco mais de dois anos, realizamos a elaboração de um ensaio fundamentado em uma proposta de ensino a partir do software GeoGebra. Nesse contexto, trabalhamos com uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). Além dela, propomos temas como as possibilidades da tecnologia no ensino básico, as mudanças na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a contextualização das primeiras olimpíadas de matemática, o começo do software GeoGebra. Isso de maneira a sugerir como as implicações de uso de tal recurso promovem um ensino de melhor qualidade, entre outros fatores importantes (HOLANDA FILHO; CRUZ, 2019).

Depois de publicado o ensaio, recebemos o parecer de nossos leitores e amigos da área de matemática, o que nos permitiu enxergar não só outras abordagens de conteúdo como também ideias de pontos específicos associados às mudanças que já estão acontecendo no âmbito da educação. Assim, nasceu uma proposta de trabalho com o objetivo de resolver questões da Obmep (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares) através do software GeoGebra. Nesse sentido, o professor pode deixar soluções diferenciadas, além das propostas pelo site, com outros conteúdos, e, ainda, fazer revisões ou mesmo propor questionamentos a seus alunos com intuito de promover a reflexão dos alunos, com vistas a melhorar o ensino matemático.

O livro *GeoGebra: Soluções e Práticas na Geometria Analítica* apresenta uma discussão decomposta em três momentos: a primeira no âmbito da Filosofia, Ciência e Religião, baseada na interação entre ambas desde os povos gregos até o século XVII, com o aparecimento da Geometria Analítica a partir de René Descartes e Pierre de Fermat. A segunda abarca um maior aprofundamento no tema que abrange a BNCC e toda a sua formação a partir de outras propostas para o ensino brasileiro que envolve tecnologias. A última diz de uma metodologia de pesquisa que busca caracterizar a relevância do GeoGebra por meio da avaliação de artigos produzidos em uma plataforma de base científica, e algumas possibilidades de práticas do software no ensino de Geometria Analítica.

Nesse contexto, o presente estudo desenvolve um modelo de solução de uma questão da Obmep, interagindo a aplicação do software com conhecimentos prévios da Geometria Analítica, propondo ideias e questionamentos que envolvem desde replicar estas práticas ou como explorar o conteúdo de outros tópicos a partir de tais sugestões.

Além disso, temos como objetivos ampliar a resolução de questões da Obmep através do GeoGebra, fazer revisões ou mesmo propor questionamentos de assuntos já abordados, resolver questões da Obmep através do software GeoGebra em que o professor pode deixar soluções diferenciadas, compartilhando-as na plataforma do GeoGebra, além das propostas pelo site. O trabalho está dividido em quatro seções, além da introdução. Na próxima seção, fazemos uma abordagem filosófica para o desenvolvimento da matemática no contexto da Geometria Analítica. Logo em seguida, uma seção dedicada ao software GeoGebra com a sua importância e aplicações. Logo depois, apresentam-se as considerações finais e referências.

2. Fundamentação Teórica

Nesta seção, será apresentada uma síntese da importância da filosofia para o desenvolvimento da matemática no contexto da Geometria Analítica. A proposta dos principais percussores de tal disciplina foi investigar se os métodos da época estavam equivocados em relação à maneira de relacionar os estudos de geometria com álgebra. Cabe ressaltar, contudo, que nunca foi a intenção deles criar uma ciência, visto que cultivavam apenas o saber.

2.1 A filosofia no desenvolvimento da matemática

Muitas pessoas se perguntam e/ou já se perguntaram por que estudar filosofia? Vamos analisar essa pergunta. Antes disso, é valido explicar o seu significado. A palavra filosofia vem dos termos gregos: philos (φίλος) e sophia (σοφία) que significam "amigo" e "sabedoria", respectivamente. Portanto, filosofia é tudo que está ligada ao saber ou sabedoria, mas o que a torna diferente de outras ciências ou disciplinas? A explicação para essa indagação é que o saber está ligado a todas as ciências, de certo modo a filosofia está ligada a tudo, pois a mesma busca a verdade a partir de questionamentos e análises, conforme Souza (2012, p.4):

> ... a Filosofia é o estudo de problemas fundamentais relacionados à existência, ao conhecimento, à verdade, aos valores morais e estéticos, à mente e à linguagem. Ao abordar esses problemas, a filosofia se distingue da mitologia e da religião por sua ênfase em argumentos racionais; por outro lado, diferencia-se das pesquisas científicas por geralmente não recorrer a procedimentos empíricos em suas investigações. Entre seus métodos estão a argumentação lógica, a análise conceitual, a argumentação lógica, a análise conceitual, as experiências de pensamento e outros métodos a priori.

Logo, na tentativa de responder à primeira pergunta, a filosofia tem uma enorme abrangência, pois está ligada a todas as disciplinas. Além disso, uma área da filosofia chamada lógica tem grande valia em áreas como: matemática, semântica, ciências da computação e em cursos de direito advocatício, por exemplo. Percebe-se ainda em Souza (2012, p. 25) a sinergia entre a matemática e a filosofia:

> Em relação à filosofia a lógica tem grande importância, uma vez que os filósofos procuram a verdade e apenas consideram certo aquilo que é verdadeiro universalmente. Assim, como a lógica procura encontrar a verdade há uma relação estreita entre a lógica e a filosofia. Apesar desta relação, os lógicos são geralmente os matemáticos, dada à elevada tecnicidade e precisão de que se serve a lógica para encontrar conhecimentos verdadeiros. Existe, por isso, também uma relação estreita entre a lógica e a matemática.

A lógica tem uma grande importância na matemática. Diversas áreas da matemática, como a geometria, se desenvolveram pela lógica, por exemplo. A partir disso, em seus estudos, Howard (2004, p.94) explica que:

> Pela primeira vez na Matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como 'Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?' e 'Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?'. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como não mais bastavam para indagações mais científicas na forma de porquê. Algumas experiências como o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano.

O questionar, tecer análises e deduzir algo a partir dessas ideias, faz parte dos filósofos e matemáticos, que tentam a busca por verdade e/ou soluções em suas observações. Não é de se admirar que muitos filósofos da Antiguidade como Platão, Aristóteles e Pitágoras eram também matemáticos, pois, eram mestres na arte de fazer questionamentos.

2.2 A filosofia no desenvolvimento da Geometria Analítica

A cultura grega é reconhecida pela sua tamanha influência em povos antigos nas mais diversas áreas, como na filosofia. A chamada filosofia aristotélica perdurou-se por toda época medieval até a transição para a Filosofia Escolástica, que trata da reflexão sobre a existência de Deus, da alma humana e imortalidade, o conhecimento pelo empirismo e a lógica, e a Filosofia Moderna, que prevalece a determinação da razão como autossuficiente para solucionar problemas humanos (HOLANDA FILHO; CRUZ, 2020).

A ruptura foi possível por meio das ideias de René Descartes (1596-1650) que possibilitaram uma nova interpretação da filosofia do Idealismo a partir de questões da existência e a busca pela verdade. Nesse contexto, a matemática torna-se importante, pois para Descartes os matemáticos utilizam de cadeia de razões "tão simples e fáceis" para se chegar a "difíceis" demonstrações. Para Costa (2017, p.38), essa influência matemática pode ser vista:

> Estas longas cadeias de razões, tão simples e fáceis, e das quais os geômetras costumam servir-se para chegar ás suas mais difíceis demonstrações, haviam-me dado ocasião de imaginar que todas as coisas que podem cair sob conhecimento dos homens se encadeiam do mesmo modo e, desde que nos abstenhamos somente de aceitar por verdadeira alguma que o não seja, e respeitemos sempre a ordem necessária para deduzi-las umas das outras, nenhuma pode haver tão afastadas ás quais não possamos por fim chegar, nem tão ocultas que não podemos descobrir.

O princípio da dúvida foi o que inspirou o francês em seu ensaio Discurso do Método com base na evidência, análise, síntese, enumeração e imortalizou a sua conhecida frase: *Cogito ergo sum* (Penso, logo existo).

2.3 A união da Geometria e da Álgebra para o desenvolvimento da Geometria Analítica: René Descartes e Fermat

Sabe-se que Apolônio – O Grande Geômetra – deu as primeiras contribuições na geometria analítica com as *Secções Cônicas,* considerado uma das principais obras científicas da Antiguidade e, por isso, foi admirada por inúmeros matemáticos em função da tamanha contribuição dada à Geometria, após Os Elementos de Euclides (HOLANDA FILHO; CRUZ, 2020). Porém, o desenvolvimento dessa geometria ganhou desataque com René Descartes e Pierre de Fermat. Howard (2004, p. 383) destaca a importância dos autores:

> As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica. Assim, parece mais correto concordar com a maiorias dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados.

Descartes inventou um novo ramo matemático conhecido como Geometria Analítica, integrando álgebra à geometria. O francês escreveu o livro *Discurso do Método para Bem conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências*. Acompanhadas por três apêndices, o *La Géometrie (*Descartes 1637) é o único desses apêndices matemáticos. Nele, verifica-se o estudo de curvas e o estudo de construção de tangentes a curvas e de equações de grau maior que dois.

O texto do apêndice *La Géometrie* foi escrito com uma difícil linguagem, o que complica a sua leitura e interpretação. Pode-se perceber que Descartes não se preocupou em ser compreendido. Pelo contrário, tanto que as palavras "abscissa” e “ordenada" foram incorporadas pelo matemático Leibniz apenas em 1692, conforme Howard (2004, p. 388):

> La Géometrie não é, de maneira nenhuma, um desenvolvimento sistemático do método analítico, e o leitor é obrigado a quase construir o método por si mesmo, a partir de certas informações isolada. Há trinta e duas figuras no livro, mas em nenhuma delas se encontram colocadas explicitamente os eixos coordenados.

Outro francês que se destacou no estudo da analítica foi Pierre de Fermat (1607- 1665), um matemático e cientista francês no qual muitos de seus estudos foram descobertos pela correspondência de cartas a amigos e/ou anotações em seus registros, pois Fermat não tinha interesse em publicações. Verifica-se que Fermat contribuiu muitíssimo para a Geometria Analítica, pois o método abordado em seus estudos é muito mais próximo daquele que é usufruído atualmente. Em Carl (2012. p. 246) tem-se que:

> Como Descartes, Fermat percebia a existência de uma geometria analítica em mais de duas dimensões, pois em outra conexão ele escreve:
> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares geométricos. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só: esses são os problemas, de lugares geométricos. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares geométricos etc.

Fermat continuou os seus estudos algébricos-geométricos em um tratado chamado Método para achar máximos e mínimos. A ideia era considerar lugares geométricos por equações $y = x^n$, hoje conhecidas como "parábolas de Fermat", se n for positivo ou "hipérboles de Fermat" se n for negativo. Ainda em Boyer (2012. p. 246), observa-se o desenvolvimento da Geometria Analítica nos estudos de Fermat:

> Durante os anos em que Fermat Estava desenvolvendo sua geometria analítica, ele descobriu também como aplicar valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. Se P é um ponto da curva y = f(x) em que se procura a tangente, e se as coordenadas de P são (a, b), então um ponto próximo na curva, com coordenadas x= $a + E, y = f(a + E)$, estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente sobre a tangente além de sobre a curva.

Em suma, utilizar ferramentas algébricas para lidar com problemas geométricos, ou vice-versa, foram um dos grandes feitos de Fermat e Descartes, sendo assim, lembrados por essa tamanha descoberta.

3. O GeoGebra na solução de questões de geometria analítica

Nesta seção, apresentamos a resolução de uma questão que sugere o conteúdo da Geometria Analítica. Tenta-se mostrar a importância do software

GeoGebra para uma metodologia baseada na aplicabilidade de softwares matemáticos e na maior interatividade no ensino. Além disso, o GeoGebra é usado para facilitar o ensino e a aprendizagem, no qual é possível reconstruir figuras em outras posições. Esse fato é importante, pois muitas vezes é possível encontrar muitos materiais no formato PDF em que não é possível fazer adaptações ou mudanças com intuito de melhorar a aprendizagem.

3.1 GeoGebra como ferramenta de resoluções de questões da geometria analítica

A utilização do GeoGebra como ferramenta para resolução de exercício tem grande importância, pois é justamente neles que se percebe o real entendimento da matéria ou o que pode ser melhorado. Com o software, o tempo de construção de exercícios é menor, pois o professor pode criar previamente a resolução e fazer questionamentos a partir desta. Assim sendo, o tempo de copiar e desenhar a questão em sala poderia ser utilizado para outros momentos, pois a solução ou prática com a questão já estaria pronta e o tempo seria otimizado. Vale ressaltar que o acompanhamento do professor é fundamental para preencher lacunas não compreendidas e dar confiança ao discente. Importante ressaltar que conceitos como fácil e difícil são relativos. Em resoluções de exercícios matemáticos, principalmente, na geometria, podem existir muitas “saídas”, porém há somente uma única solução. O software contribui justamente nessas “saídas” (estratégias de soluções) com desenhos, notações de ângulos, e detalhes que podem ser assimilados com ele. A aprendizagem é, portanto, um processo em contínua evolução, é um “aprender crítico”. Muitas vezes, falta criticidade aos nossos docentes. Por isso,resulta sempre importante fazer mais questionamentos nas aulas de matemática e indagar sobre suas próprias soluções ou do professor.Todas essas ações fazem parte do ensino matemático.

Em Freire (1996, p.14), pode-se perceber a importância da construção e reconstrução do saber:

> Faz parte das condições em que aprender criticamente é possível a pressuposição por parte dos educandos de que o educador já teve ou continua tendo experiência da produção de certos saberes e que estes não podem a eles, os educandos, ser simplesmente transferidos. Pelo contrário, nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo.

> Só assim podemos falar realmente de saber ensinado, em que o objeto ensinado é apreendido na sua razão de ser e, portanto, aprendido pelos educandos”

O docente deve estar atento aos conteúdos que leciona, fazer seus planejamentos, procurar estar atento a possibilidades como: ferramentas e softwares educacionais, ou utilizar metodologias que buscam uma aprendizagem mais homogênea e igualitária em sua sala de aula. Isto é, busca englobar a todos os alunos. Sendo assim, na questão de resolução de problemas, ações colaborativas podem incentivar a prática de resolução de problemas. Em Leite (2018, p. 18), nota-se a importância dessas ações:

> O trabalho colaborativo deve ser incentivado com foco na resolução de problemas, respeitando o contexto sociocultural do aluno. Suas ideias devem ser respeitadas e não consideradas certas e erradas. O ideal é que, por meio delas, os alunos reflitam e debatam a forma mais democrática para a resolução das atividades. Com isso haverá uma gama de soluções possíveis, o que levará o professor a nortear construção dos raciocínios dos seus alunos, deixando de ser autoridade do saber e sendo membro integrante dos grupos de trabalho.

3.2 Resolução de questão: Obmep, GeoGebra e geometria analítica

Antes de iniciar a resolução da questão é importante que o docente compreenda a importância da resolução de problemas na matemática, pois ele pode tirar dúvidas do conteúdo, verificar o entendimento dos discentes e revisar conteúdos anteriores. A variação de resolução também é um outro fator importante, principalmente na Geometria, haja vista que um único problema pode ter inúmeras abordagens, porém uma mesma solução.

Corroborando com Brandt et al., (2016), para os professores, existe uma falha no ensino inicial dos alunos que vai crescendo à medida que a vida escolar se desenvolve em não unir conteúdo com a prática, além da falta de atualização e aperfeiçoamento de técnicas que despertem no estudante interesse pela matemática através da sua aplicação. Dessa forma, a resolução de exercícios unido à prática pode ser ação importante na aprendizagem matemática, tornando o aluno mais consciente do seu desenvolvimento na disciplina.

Na figura, os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ medem 120°, o ângulo $B\hat{A}D$ é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero ABCD em cm²?

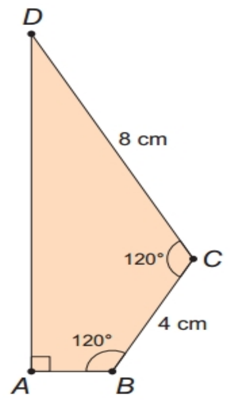

FIGURA 1: Questão da prova obmep 2017.
FONTE: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

A) $14\sqrt{3}$

B) $28\sqrt{3}$

C) $32\sqrt{3}$

D) $36\sqrt{3}$

E) $40\sqrt{3}$

SOLUÇÃO

Primeiramente, precisa-se de uma melhor interpretação da questão para sua resolução. Por isso, o software GeoGebra detém ampla justificativa para o seu uso no sentido de facilitar o entendimento. Verifica-se que o quadrilátero possui ângulo $A\widehat{D}C = 30°$, pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero mede 360º. Após isso, traça-se a altura $\overline{CE}$ no qual o triângulo $C\widehat{D}E$ ($\blacktriangle_{CDE}$) é retângulo com ângulos de 30º, 60° e 90º.

A partir do $\blacktriangle_{CDE,}$ calcula-se os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$por meio do assunto de trigonometria. Aplica-se as relações de seno e cosseno para o ângulo de 30°:

$$seno\ 30° = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CE}}{8} \rightarrow 2.\overline{CE} = 8 \ \rightarrow \boldsymbol{\overline{CE} = 4}$$

$$cosseno\ 30° = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DE}}{8} \rightarrow 2\overline{DE} = 8\sqrt{3} \rightarrow \boldsymbol{\overline{DE} = 4\sqrt{3}}$$

Outra forma de calcular $\overline{DE}$ é aplicando a lei dos senos:

$$\frac{DE}{Sen90º} = \frac{CE}{Sen30º}$$

$$\frac{8}{1} = \frac{CE}{\frac{1}{2}}$$

$$CE = 1.\frac{8}{2}$$

$$\overline{CE} = 4$$

$\overline{CE}$= é 4 cm e por lei dos senos no triângulo DCF novamente, tem-se:

$$\frac{DC}{Sen90º} = \frac{DE}{Sen60º}$$

$$\frac{8}{1} = \frac{DF}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\overline{DE} = \frac{8}{1}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{DE} = 4\sqrt{3}cm$$

Com as informações encontradas, parte-se dos conceitos e práticas da Geometria Analítica. Os pontos D, E, A, B e C pode-se atribuir qualquer valor para o plano cartesiano, então, adota-se o ponto D origem (0,0), coordenadas E$(4\sqrt{3}, 0)$ e C$(4\sqrt{3}, 4)$ de acordo com a Figura 2.

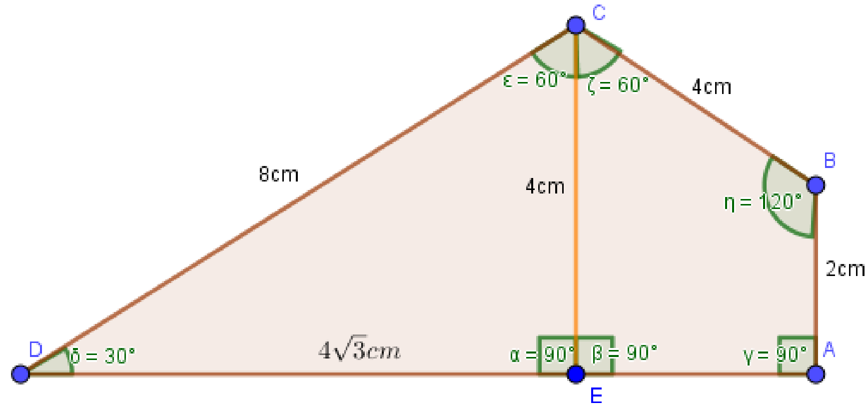

FIGURA 2: Resolução com o GeoGebra I.
FONTE: os autores

O próximo passo é projetar o segmento $\overline{BE}$ para a formação do triângulo CBE. Constata-se que o triângulo possui os lados $\overline{CE}$e $\overline{CB}$ iguais, de 4 centímetros e com o ângulo $E\hat{C}B$de 60°. Pode-se concluir que ▲$_{\text{CBE}}$ é um triângulo equilátero conforme o destaque em cor laranja (Figuras 3 e 4). Essas figuras foram construídas pelos autores com base nos dados da questão inicial (Figura 1), da Obmep de 2017, com o objetivo de verificar assuntos já revistos com o conteúdo de Geometria Plana e reforçar os conteúdos assimilados recentes na Geometria.

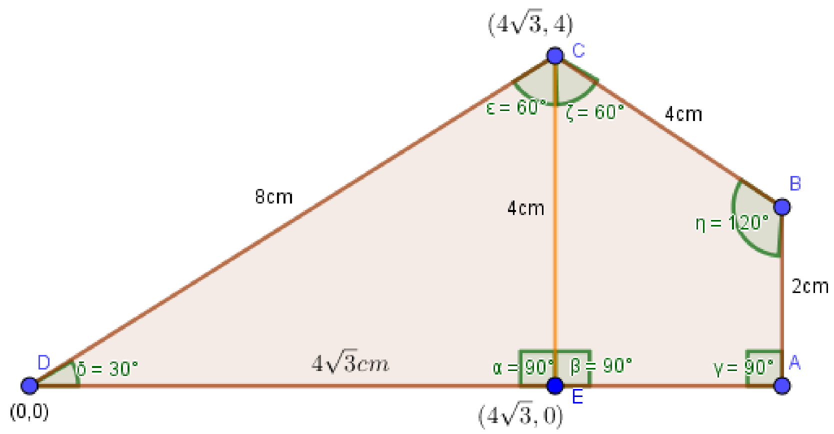

FIGURA 3: Resolução com o GeoGebra II.
FONTE: os autores

Com o ▲CBE, calcula-se os segmentos$\overline{AB}$e $\overline{EA}$, visto que o ângulo $B\hat{E}A$ tem valor de 30°. Aplica-se as relações de seno e cosseno para este ângulo:

$$seno\ 30° = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AB}}{4} \rightarrow 2.\overline{AB} = 4 \ \rightarrow \boldsymbol{\overline{AB}} = \mathbf{2}$$

$$cosseno\ 30° = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EA}}{4} \rightarrow 2\overline{EA} = 4\sqrt{3} \rightarrow \boldsymbol{\overline{DE}} = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

A partir dos valores obtidos, têm-se a definição dos pontos A $6\sqrt{3}, 0)$ e B $6\sqrt{3}, 2)$.

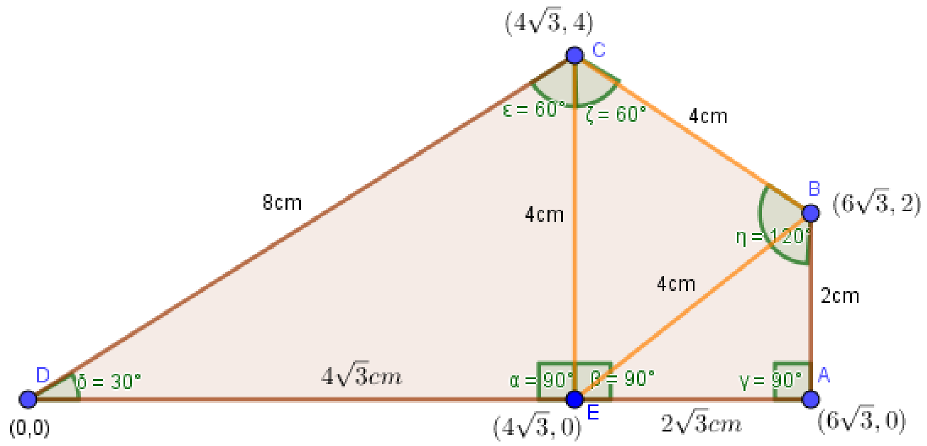

FIGURA 4: Resolução com o GeoGebra III.
FONTE: os autores

Com a definição de todos os pontos que determinam o quadrilátero, observa-se que o valor equivalente à sua Área (ÁREA■ ABCD) é o mesmo que somar as áreas dos três triângulos:

ÁREA■ABCD = ÁREA▲CDE + ÁREA▲CBE + ÁREA▲EBA

Para o cálculo das áreas dos triângulos, tem-se a Regra de Sarrus que possibilita o cálculo de cada área do triângulo a partir de suas coordenadas:

$$A = \frac{\begin{Vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{Vmatrix}}{2}$$

São apresentados os procedimentos para a obtenção dos resultados das áreas ▲CDE, ▲CBE,e ▲EBA, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 4\sqrt{3} & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4\sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & 4 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{D} = 0 + 4\sqrt{3} + 16\sqrt{3} - \left(0 + 4\sqrt{3} + 0\right) \rightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{16\sqrt{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 6\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 6\sqrt{3} & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 6\sqrt{3} & 0 \\ 6\sqrt{3} & 2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{D} = 0 + 0 + 12\sqrt{3} - \left(0 + 8\sqrt{3} + 0\right) \rightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{4\sqrt{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 6\sqrt{3} & 2 & 1 \\ 4\sqrt{3} & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 6\sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & 4 \end{matrix}$$

$$D = 8\sqrt{3} + 0 + 24\sqrt{3} - (0 + 16\sqrt{3} + 8\sqrt{3)}) \rightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{8}\sqrt{3}$$

Uma forma de fazer o cálculo de determinante é utilizar o “Cálculo Simbólico CAS” do GeoGebra, criando uma matriz, como mostra a Figura 5abaixo. De acordo com Oliveira (2022), “a Janela CAS é pouco explorada, mas eles declaram que é uma excelente ferramenta que consiste em um ambiente dividido em células que interagem entre si onde podem realizar operações algébricas envolvendo diversas funções”.

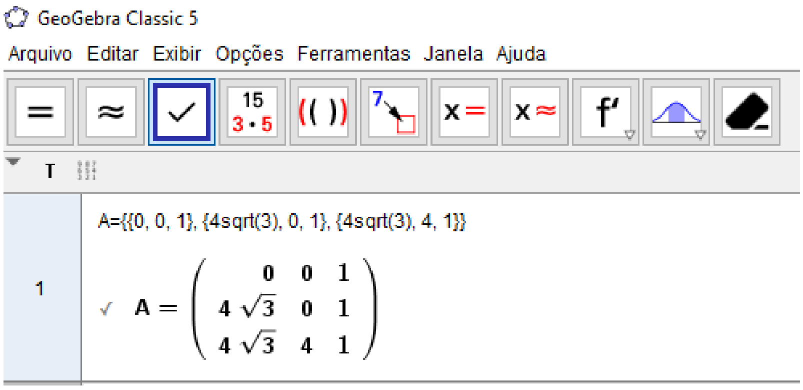

FIGURA 5: Criação de uma matriz com a Janela CAS.
FONTE: os autores

Em seguida, calcula-se o determinante da matriz representado na Figura 6.

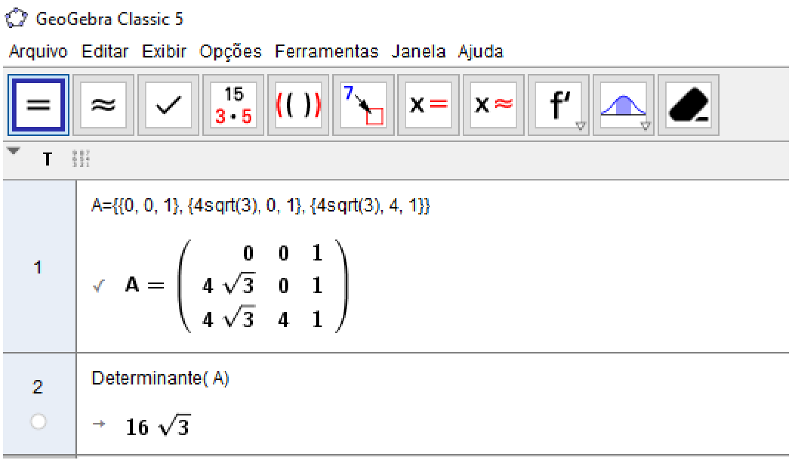

FIGURA 6: Cálculo do Determinante de uma matriz a janela CAS.
FONTE: os autores

$$\text{ÁREA}^{\blacksquare}_{\text{ABCD}} = \text{ÁREA}\,\blacktriangle_{\text{CDE}} + \text{ÁREA}\,\blacktriangle_{\text{CBE}} + \text{ÁREA}\,\blacktriangle_{\text{EBA}}$$

$$\text{ÁREA}^{\blacksquare}_{\text{ABCD}} = \frac{|16\sqrt{3}|}{2} + \frac{|4\sqrt{3}|}{2} + \frac{|8\sqrt{3}|}{2}$$

$$\text{ÁREA}^{\blacksquare}_{\text{ABCD}} = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}, \text{ logo:}$$

$$\text{ÁREA}^{\blacksquare}_{\text{ABCD}} = 14\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

RESPOSTA: Item A.

A solução proposta acima pode ser publicada no site *geogebra.org,* em que cada usuário tem um perfil e pode compartilhar trabalhos, projetos e estudos. A plataforma *online* contempla mais de um milhão de recursos gratuitos os quais ajudam para a melhoria de projetos e pesquisas. A utilização do GeoGebra possibilita outras formas de visualizar um problema de Geometria, por exemplo. Um aluno que tem um nível intermediário ou ótimo poderá fazer a sua própria construção de solução no GeoGebra com a tutoria e/ou ajuda do professor. Esse mesmo aluno poderá compartilhar a sua solução para outros ou em grupos específicos com intuito de aprimorar sua solução. O aluno que não tem ainda esse nível poderá ser motivado. Com consciência da importância dos seus estudos, poderá criar as suas soluções com ajuda de outros estudantes e professores, pois existem diversas comunidades e fóruns de aprendizagem matemática para tal fim. A utilização de diferentes recursos no software pode também ser um fator importante, pois a Janela CAS foi usada, mas outros recursos podem ser explorados como a janela Algébrica e Geométrica, inicialmente.

Importante deixar claro que a resolução poderia ser feita, sim, no quadro tradicional em 15 ou 20 minutos. Mas, poderia ser compartilhada em forma de link como no GeoGera.org ou em fóruns de aprendizagem matemática? A questão do tempo também já foi mencionada e, sem dúvida, é importante.

Considerações finais

O que é a Geometria Analítica? E por que alguns alunos acham essa geometria tão difícil ou desinteressante? A analítica é uma área da matemática em que é possível representar pontos, retas, triângulos e curvas, por exemplo, utilizando expressões algébricas. O estudo dessa disciplina é realmente bastante amplo e utilizar conceitos e/ou práticas da álgebra e da geometria fazem com que o aluno, muitas vezes, se sinta desmotivado. Nesse sentido, há deficiências de anos anteriores, o que dificulta o aprendizado, não somente da analítica, mas de qualquer conteúdo matemático.

O ensino de Geometria Analítica faz parte do ensino médio, porém a geometria plana se faz presente em muitos momentos. Por isso, a base matemática é muito importante. É preciso evidenciar também que os professores precisam de formações contínuas, revisar conteúdos em seus planejamentos, ter o hábito de resolver exercícios, se necessário de mais de uma maneira, fazer links de conteúdos estudados ao longo do ano. Outras formas de aprender surgem a todo momento e o ensino da matemática também faz parte desse processo.

Utilizar a história da matemática pode ser um começo para uma introdução de assuntos e pode ajudar a conectar alunos à matéria. Além desse recurso a proposta de utilizar softwares matemáticos em aulas vem crescendo nos últimos anos, pois ajuda a estreitar os elos entre matéria, professor e aluno. A interação entre aluno e exercício também pode ser desenvolvida, já que com o software o discente consegue construir figuras ou desenhos os quais auxiliam na resolução do problema, integrando o usa das janelas Algébricas e Geométricas, de modo a ser muito útil na aprendizagem matemática.

Sendo assim, o estudo da Geometria Analítica faz-se importante com o software GeoGebra, uma vez que possibilita infinitas práticas. Além disso, ajuda a desenvolver práticas ou exercícios que, se detalhadas com rigor em um papel, demoram enquanto com ferramenta essa mesma prática é feita de modo mais rápido e prático. Cabe aqui destacar que o professor tem papel fundamental nesse processo. É ele que faz desenvolver todo o potencial de nossa juventude. É bem verdade que ensinar matemática em nosso país não é fácil, além da falta de estrutura nas salas de aula, faltam melhorias como laboratório de informática, melhores condições de planejamento aos professores, e ofertas de cursos de capacitação a alunos e docentes. Um outro grande problema que "assombra" a educação brasileira é a falta de uma homogeneização em nosso país. Para diminuir ou mesmo extinguir esse problema, está sendo implementado a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que traz um norte do que deve ser visto em cada série do ensino fundamental e médio por meio de competências e habilidades. O documento normativo procura trazer mais igualdade no sistema de ensino com objetivos claros de todas as disciplinas. A BNCC integra em sua competência a cultura digital, pensamento científico, crítico-criativo e argumentação. Tais competências estão bastante presentes não somente na matemática da Geometria a Analítica, mas também em todas as disciplinas.

Por isso, fazer uso de software, não necessariamente o GeoGebra, fazer uso da história da matemática, trazer práticas diferentes aos alunos, fazer uso da interdisciplinaridade como forma de integrar conteúdos, trazer a matemática para mais próxima do mundo real dos alunos, podem ser processos bastantes benéficos ao ensino matemático, contribuindo para a aprendizagem matemática. Por último, mas não menos importante, o estudo da Geometria Analítica pode ter início no ensino médio, com alguns conceitos ainda no ensino fundamental. É desenvolvida no ensino superior com estudo de cálculo diferencial integral, a qual é pré-requisito para muitas outras disciplinas e/ou cadeiras que utilizam os conceitos do cálculo, O desenvolvimento e estudo do cálculo por meio de softwares traz a compreensão de muitas ideias abstratas de muitos cursos como engenharia, arquitetura e física, por exemplo. Pode-se concluir, que o GeoGebra tem grande valia no processo de ensino e aprendizagem matemática e muitas práticas podem ser feitas e/ou adaptadas com o software.

Referências

BOYER, C. B. História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard
Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 2012. 252 p.

BRANDT, CELIA FINCK; BURAK, D; KlUBER, TIAGO. Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações.2ed.rev.ampl. Ponta Grossa. Editora UEPG,2016.

COSTA, J. C. Discurso do Método Cientifico/ René Descartes; tradução, prefácio e notas de João Cruz Costa, professores de filosofia da Universidade de São Paulo. Ed especial. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2017.

DESCARTES, RENÉ (2006) [1637]. Um discurso sobre o método de conduzir corretamente a razão e buscar a verdade nas ciências. Traduzido por Ian Maclean. Imprensa da Universidade de Oxford. ISBN 0-19-282514-3.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora Unesp. São Paulo. 2009.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25.ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. 76 p.

HOLANDA FILHO, I. O.; CRUZ, M. P. M. GeoGebra Soluções e Práticas na Geometria Analítica. -1.ed-Curitiba: Appris,2020.

HOWARD, E. Introdução à história da matemática.Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 843p.

HOLANDA FILHO, I. O.; CRUZ, M. P. M.**Variação de Soluções na Geometria com a Utilização do GeoGebra**. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 08, n.02, p. 78-101, 2019.

HOLANDA FILHO, I. O.; CRUZ, M. P. M. **GeoGebra**: Soluções na Geometria. Curitiba: Appris, 2019.

HOLANDA FILHO, I. O.; CRUZ, M. P. M. **GeoGebra**: Soluções e Práticas na Geometria Analítica. Curitiba: Appris, 2020.

LEITE, R. F. C.; NASCIMENTO, L. M. **Atividades matemáticas no GeoGebra para educação básica:** uma proposta de aula com o suporte do google forms e do GeoGebra. 1.ed. Rio de Janeiro: Gramma Editora, 2018. 120 p.

OLIVEIRA, VINICÍUS CAMPOS de. **Ensino da Função Afim do Software GeoGebra para Estudantes da Educação Profissional Técnica de Nível Médio**. Rio de Janeiro,RJ:Autografia,2022.

SOUZA, D. A. No caminho da Filosofia: uma breve introdução filosófica. Santa Catarina: Editora Clube de Autores, 2012, 89 p.

SITES

Disponível em: https://www.geogebra.org/classic - Acesso em 13/12/2020.

Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/pro-bncc/material-de-apoio/- Acesso em 1/12/2020.

Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_BNCC_2018_atualizacao_2020_cap_1_ao_6_interativo_28.pdf- Acesso em 1/12/2020.

Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/pro-bncc/material-de-apoio/- Acesso em 1/12/2020.

Disponível em:http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm - Acesso em 16/12/2020.

Disponível em: https://www.geogebra.org/m/faamxyqs - Acesso em 17/12/2020.