

Planeación de clase para enseñar simetrías: escenario para caracterizar el conocimiento didáctico de una profesora de matemáticas¹

Oscar Iván Paternina-Borja², Estela Juárez-Ruiz³

Resumen

Introducción. La planeación de clases es un aspecto importante en el ejercicio profesional del docente de matemáticas. En ella se incluyen estándares, actividades, preguntas, etc. que se van a implementar en el aula. Por tal motivo, la planeación se asume como una oportunidad relevante para estudiar el conocimiento del profesor en la intención de enseñar un contenido matemático. **Objetivo.** Caracterizar el conocimiento didáctico del contenido de una profesora de matemáticas al diseñar una planeación de clase para enseñar las simetrías. **Materiales y métodos.** Esta investigación es de enfoque cualitativo con un diseño de estudio de caso instrumental. La recolección de la información se hizo mediante una planeación de clase y una entrevista semiestructurada a

una profesora de matemáticas con posgrado en educación matemática y experiencia en el aula. **Resultados.** Se caracterizó el conocimiento didáctico de la profesora sobre teorías de aprendizaje de la matemática, estrategias y recursos para enseñar las simetrías y secuenciación de los temas en relación con los posteriores al contenido matemático. **Conclusiones.** Se valida la pertinencia y relevancia de la planeación de clase como una atmósfera adecuada para caracterizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y la importancia de tal conocimiento en la profesión docente.

Palabras clave: planeación de clase, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, conocimiento didáctico del contenido, enseñanza, simetrías.

1 Artículo original resultado del proyecto de investigación *Caracterización de relaciones en el conocimiento especializado de un profesor mexicano y uno colombiano en la enseñanza de las simetrías* de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ejecutado desde enero de 2021 hasta Julio de 2022 y financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT.

2 Estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Atlántico. Correo: oscar.paternina@alumno.buap.mx / Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9061-9680>

3 Doctora en Ciencias Matemáticas, Magíster en Ciencias Matemáticas y Licenciada en Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Docente e investigadora de la misma institución. Correo: estela.juarez@correo.buap.mx / Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2857-0772>

Autor para Correspondencia: Oscar Paternina-Borja. Correo: oscar.paternina@alumno.buap.mx

Recibido: 25/07/2022 Aceptado: 22/05/2023

*Los autores declaran que no tienen conflicto de interés

Lesson planning to teach symmetries: Scenario to characterize the Pedagogical Knowledge of a mathematics teacher

Abstract

Introduction. Lesson planning is an important aspect within the professional knowledge of the mathematics teacher. It includes standards, activities, questions, etc. that will be implemented in the classroom. For this reason, it is assumed as a relevant scenario to study the teacher's knowledge with the intention of teaching mathematical content. **Objective.** Characterize the Pedagogical Content Knowledge of a mathematics teacher when designing a lesson planning to teach symmetries. **Materials and**

methods. This research has a qualitative approach with an instrumental case study design. The information was collected through class planning and a semi-structured interview with a mathematics teacher with a postgraduate degree in mathematics education and classroom experience. **Results.** The pedagogical knowledge of the teacher on mathematics learning theories, strategies, and resources to teach symmetries and sequencing of topics in relation to those after the mathematical content was characterized. **Conclusions.** The pertinence and relevance of class planning is validated as a scenario to characterize the pedagogical knowledge of the mathematics teacher and the importance of such knowledge in the teaching profession.

Keywords: lesson planning, Mathematical Teacher's Specialized Knowledge, pedagogical content knowledge, teaching, symmetries

Planejamento de aula para ensinar simetrias: Cenário para caracterizar o Conhecimento Didático de um professor de matemática.

Resumo

Introdução. O planejamento de aulas é um aspecto importante dentro do conhecimento profissional do professor de matemática. Inclui padrões, atividades, perguntas etc. que será implementado em sala de aula. Por isso, assume-se como um cenário relevante para estudar os saberes do professor com o intuito de ensinar conteúdos matemáticos. **Objetivo.** Caracterizar o Conhecimento de Conteúdo Didático de um professor de matemática ao elaborar um plano de aula para ensinar simetrias. **Materiais e métodos.** Esta pesquisa

tem uma abordagem qualitativa com um desenho de estudo de caso instrumental. As informações foram coletadas por meio de planejamento de aula e entrevista semiestruturada com uma professora de matemática com pós-graduação em educação matemática e experiência em sala de aula. **Resultados.** Caracterizou-se o conhecimento didático do professor sobre teorias de aprendizagem matemática, estratégias e recursos para ensinar simetrias e sequenciamento de tópicos em relação àqueles posteriores ao conteúdo matemático. **Conclusões.** Valida-se a pertinência e relevância do planejamento de aulas como cenário para caracterizar o conhecimento didático do professor de matemática e a importância desse conhecimento na profissão docente.

Palavras-chave: planejamento de aula, conhecimento especializado do professor de matemática, conhecimento pedagógico do conteúdo, ensino, simetrias.

Introducción

El conocimiento del profesor de matemáticas se asume como una red compleja conformada por distintas dimensiones que se interrelacionan entre sí y que se movilizan durante la práctica docente. Tal constructo ha sido objeto de estudio por diversos autores que han desarrollado algunos modelos para lograr su análisis y comprensión (Ball *et al.*, 2008; Carrillo-Yañez *et al.*, 2018; Rowland *et al.*, 2005).

Específicamente, Carrillo *et al.* (2013) diseñaron el modelo *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, por sus siglas en inglés), como un marco teórico-metodológico para analizar, comprender y caracterizar la diversidad de elementos que el docente manifiesta en relación directa con el contenido matemático y su enseñanza. Desde este modelo, el conocimiento es una amplia red de conceptos, habilidades e imágenes que tienen y utilizan las personas para ejecutar cualquier tarea, resolver problemas y lograr metas en la enseñanza de las matemáticas (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

El profesor de matemáticas desarrolla su labor en distintos ambientes, cada uno con características particulares, donde moviliza su conocimiento profesional. Para Advíncula *et al.* (2021), el MTSK permite analizar el conocimiento que el docente pone en juego en escenarios como la planeación de clases, la enseñanza en el aula de clases, el análisis

posterior o la discusión entre pares. En este sentido, la planeación de clase de matemáticas se convierte, para esta investigación, en un escenario pertinente que brinda oportunidades para caracterizar tal conocimiento.

En la planificación, el profesor debe seleccionar y secuenciar los contenidos, analizar los aspectos cognitivos propios del aprendizaje de los estudiantes, diseñar tareas, escoger recursos y estrategias de enseñanza para alcanzar los estándares u objetivos de aprendizaje esperados (Ferreira y Alencar, 2017; González *et al.*, 2020; Pambas, 2021).

En esta investigación, el contenido a enseñar son las simetrías en geometría, que se imparten en el nivel secundaria. Esta temática ha cobrado importancia en los planes de estudios en varios países del mundo, incluido Colombia, pese a que no ha sido tradicional su enseñanza en el aula, sino que muchas veces se omite o se deja para el final del año escolar, por lo que los docentes no están preparados para enseñarla y deben consultar y movilizar alternativas didácticas para tal fin (Barrantes, 2019; Pascual *et al.*, 2021).

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Este estudio se fundamenta en el modelo MTSK (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018) conformado por los dominios *conocimiento matemático* (MK), *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) y *creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza-aprendizaje* (figura 1).

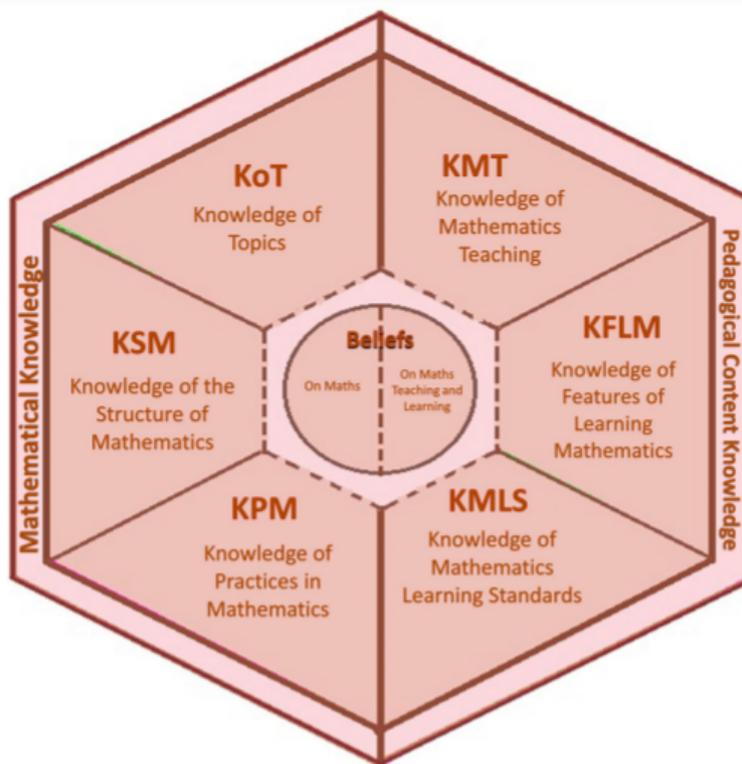


Figura 1. Modelo conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Nota: Carrillo-Yáñez *et al.* (2018)

Dado que el enfoque de esta investigación se centra en los subdominios del PCK, estos componentes se describen detalladamente a continuación.

El conocimiento didáctico del contenido

El PCK ha sido caracterizado en varias investigaciones con respecto a la enseñanza de distintos contenidos matemáticos (Lo, 2020; Pascual *et al.*, 2021; Ramaligela *et al.*, 2019). Es más que la conjunción entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, es un estándar determinado de conocimiento de la pedagogía que proviene ante todo de las matemáticas (Carrillo-Yáñez *et al.*, 2018). Es

decir, se dejan de lado las heurísticas generales y las estrategias de manejo de grupo en el aula y se incluyen solo las que están intrínsecamente relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares. Además, el término PCK se ha mantenido en su original en inglés del modelo para reconocer el mérito a los antecedentes y fundamentos teóricos de donde surgió (Ball *et al.*, 2008; Shulman, 1986), teniendo un significado más consecuente con un conocimiento profesionalizado de las matemáticas hacia la intervención didáctica fundamentada (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020). Este dominio está compuesto por los siguientes subdominios y categorías:

• Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

En este subdominio se reconoce al contenido matemático como objeto de aprendizaje, es decir, el docente tiene la capacidad de anticiparse a las dificultades y errores que pueden tener los alumnos durante el aprendizaje del contenido, conoce las fortalezas y debilidades asociadas a este proceso, las formas en que interactúan con el objeto de estudio y las expectativas e intereses que tienen al abordar dicho tema. Asimismo, diseña oportunidades de aprendizaje para los estudiantes desde la base teórica formal o producto de su experiencia personal.

• Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio analiza el conocimiento del profesor acerca de las teorías formales de la enseñanza de las matemáticas, sin descartar las teorías personales desarrolladas durante

sus años de experiencia docente. Además, enmarca el conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático. Conocer sobre recursos materiales o virtuales también es parte de este análisis, tener claras sus ventajas, limitaciones, características y diferencias entre ellos.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Hace referencia al conocimiento del profesor sobre lo que es esperado que aprenda el estudiante, teniendo en cuenta los estándares de conocimiento proporcionados por la entidad administradora de educación o construcciones propias justificadas con un elemento de juicio. Además, conoce las características cognitivas de los estudiantes para desarrollar el contenido matemático con el grado de profundidad requerido para un determinado momento escolar. Asimismo, posee el conocimiento sobre la secuenciación de los temas en un mismo grado escolar o con respecto a otros niveles. En la **tabla 1** se resumen las categorías del PCK.

Tabla 1. Subdominios y categorías del PCK

Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático (formales y personales)	
KFLM	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático
	Formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje
	Intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático
KMT	Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático (formales y personales)
	Recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático
KMLS	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico
	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar
	Secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar

Nota: adaptada de Escudero-Ávila y Carrillo (2020).

Materiales y métodos

Esta investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo con un estudio de caso instrumental como diseño metodológico (Muñoz-Catalán, 2021; Stake, 2007), la información que proporcionó la informante permitió realizar un proceso de abstracción para analizar a profundidad su PCK y caracterizarlo. Se trata de una profesora novel de matemáticas, con cinco años de experiencia tanto en escuelas privadas como públicas en Colombia. En su corta experiencia ha enseñado el contenido matemático de simetrías y cuenta con estudios de posgrado en Educación Matemática. Además, mostró disposición y compromiso con la investigación desarrollada, siendo estas algunas características de los profesores expertos (Rojas *et al.*, 2012).

Para la recolección de la información se le proporcionó a la profesora un formato de planeación de clase, para que diseñara una o más sesiones de acuerdo con su calendario académico, con la intención de enseñar las simetrías en séptimo grado de secundaria (estudiantes con edades entre 11 y 13 años aproximadamente). Esta planeación se asumió como un escenario fuerte que brinda oportunidades para el análisis y caracterización del PCK (Flores *et al.*, 2013). En el formato se tuvieron en cuenta aspectos como el estándar de competencia en matemática a desarrollar, el derecho básico de aprendizaje relacionado con la temática, el propósito y los momentos de inicio, desarrollo y cierre de la clase. Cabe aclarar que no era obligatorio trabajar con este formato, dando libertad a la profesora de realizar modificaciones, adicionando o eliminando alguno de los aspectos mencionados anteriormente. La informante diseñó la planeación del tema la cual estuvo distribuida en cuatro sesiones, donde planteó

preguntas orientadoras y actividades con distintos materiales didácticos. Además, postuló como estándar: *Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.*

Después de recibir y analizar la planeación de la maestra, se diseñó un cuestionario de preguntas abiertas, el cual se aplicó en una entrevista semiestructurada con una duración de sesenta minutos que se ejecutó vía Google Meet debido a las restricciones ocasionadas por el confinamiento durante la pandemia de COVID-19. En ella se pudo profundizar en las distintas evidencias, indicios y oportunidades de conocimiento que mostró en la planeación de clase (Escudero-Ávila *et al.*, 2016). Se transcribieron los registros de la videograbación y se organizaron en unidades de análisis, se observó el conocimiento didáctico para enseñar las simetrías confrontando los datos recolectados con los dos instrumentos.

Para analizar la información, se construyeron descriptores de conocimiento para cada una de las categorías de los distintos subdominios del PCK y de acuerdo con Escudero-Ávila y Carrillo (2020), se caracterizó dicho dominio siguiendo las bases teóricas y metodológicas para tal fin.

Resultados

A partir del análisis realizado a la planeación y triangulando la información con la entrevista y los descriptores, se pudieron evidenciar los siguientes resultados, de acuerdo con la caracterización de Escudero-Ávila y Carrillo (2020).

• Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFL)

En el apartado de la metodología de aprendizaje de la planeación de clase, la profesora describió unas fases y niveles en los que se apoyó para diseñar la planeación (**figura 2**).

Metodología de aprendizaje

Fase de apertura: Se muestra a los estudiantes un análisis histórico de la simetría, y a partir de este enfoque histórico se responde a una actividad inicial. (Nivel 0)

Fase conceptual: Niveles 1, 2 y 3.

Fase metodológica: Uso de figuras geométricas dadas y otras figuras con applets de GeoGebra.

Nivel 0 (visualización): En este nivel los alumnos reconocen las figuras y las nombran basándose en las características visuales globales que tienen. Los alumnos que razonan según este nivel son capaces de hacer mediciones e incluso de hablar sobre propiedades de las formas, pero no piensan explícitamente sobre estas propiedades.

Nivel 1 (análisis): En este nivel los estudiantes son capaces de considerar todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular.

Nivel 2 (deducción informal): En este nivel los estudiantes comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos sin las restricciones de un objeto particular son capaces de desarrollar relaciones entre estas propiedades.

Nivel 3 (Deducción): En este nivel los estudiantes son capaces de examinar algo más que las propiedades de las formas.

Figura 2. Extracto de la metodología de aprendizaje de la planeación de clase

Nota: elaboración propia basada en la planeación de clase de la informante.

Al respecto, se le preguntó:

I: En el apartado de metodología tiene unas fases de apertura, conceptual, metodológica y unos niveles que están descritos ¿Se basó en alguna teoría sea de enseñanza o aprendizaje para diseñar la planeación?

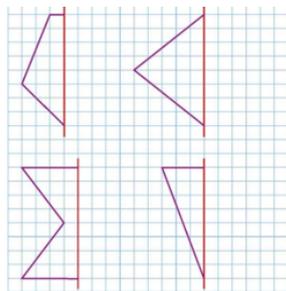
P: Sí, me basé en la teoría de Van Hiele, precisamente diseñada para adaptarla a la geometría y creo que para este caso

de la simetría se acomodaba muy bien siguiendo los niveles descritos en la planeación (profesora, comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

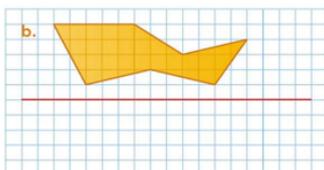
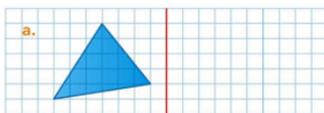
En este fragmento se pudo evidenciar el conocimiento movilizado por la profesora sobre el modelo de Van Hiele y su incidencia en el aprendizaje de la geometría, adaptando la planeación de clase a dichos niveles, para lograr la construcción del aprendizaje de las simetrías en los estudiantes. Este

conocimiento es caracterizado en la categoría *Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático*.

Otro aspecto de la planeación que fue oportunidad de análisis estuvo dado por la actividad número 2 donde el estudiante debía completar la figura mostrada (**figura 3**).



- 2) Comenta con tus compañeros lo que observas en estas figuras después de terminar de dibujarlas.
- 3) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 1?
- 4) Dibuja la figura correspondiente con respecto al eje rojo.



- 5) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 4?

Figura 3. Actividad número 2 de la planeación de clase

Nota: tomada de la planeación de clase de la informante

En la entrevista se le preguntó:

I: ¿Qué características deben tener en cuenta los estudiantes para completar las figuras?

P: Lo ideal sería que tuviera en cuenta la actividad anterior, donde tenía trazada una línea vertical, el lado opuesto estaba similar o era el mismo, pero al otro lado,

estoy hablando como el estudiante. Puede empezar a contar los cuadritos por eso hablaba de utilizar la regla, desplazar, dónde debo ubicar los puntos para que me quede la figura de este lado igual a la figura del otro lado para que haya esa correspondencia con esa línea vertical que está trazada ahí. Se le pregunta ¿Este dibujo que acabaste de hacer, de completar, qué nombre le colocarías? Se me ocurre que podría decir “es como un

espejo” estoy dando un ejemplo de una posible respuesta, los niños tienen mucha imaginación, otros podrían decir “reflejar” (profesora, comunicación personal, 23 de noviembre 2021)

En este apartado se evidencian varios elementos. Primero, la profesora moviliza su conocimiento sobre los posibles términos mencionados por los estudiantes al interactuar con las simetrías como son: similar, el mismo, espejo, reflejar. Segundo, conoce estrategias no convencionales que los estudiantes pueden implementar para completar la figura mostrada, contando cuadritos y utilizando regla para lograr la correspondencia con la línea vertical. Estos elementos están caracterizados en la categoría *Formas de*

interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje.

• **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)**

En la planeación mostrada en la **figura 3** y en el extracto de entrevista transcrito, también se logra observar que la profesora evidencia su conocimiento sobre preguntas orientadoras como estrategia de enseñanza al interrogar: ¿Qué nombre le colocarías al dibujo que realizaste? Lo que le permitió movilizar elementos de la categoría *Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*. Por otro lado, en el momento de *inicio* de la planeación se observó un esquema cronológico sobre geometría y el concepto de simetría (**figura 4**).

<p>INICIO: I. En primer lugar se quiere mostrar al estudiante que el estudio de la simetría no fue algo que apareció de un momento a otro, sino que ha sido algo que siempre ha existido y se remonta desde la antigua Grecia. Esto se muestra con ayuda de este esquema.</p>	<p>Antigua Grecia</p>  	<ul style="list-style-type: none"> • Los libros de los elementos de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), constan de 13 libros. • Destacamos el Libro I: Los Fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área. • Se definen los criterios de congruencia e igualdad de triángulos a partir de la Geometría Estática, al revés, de cómo se explican en estos momentos a partir de una Geometría Dinámica.
	<p>Mundo Árabe</p>  	<ul style="list-style-type: none"> • La geometría es muy importante en el Islam. • La forma perfecta es el círculo, que representa a Dios y se utiliza como patrón para realizar otros motivos. • Los patrones geométricos más destacados, que son utilizados en el arte y decoración islámica, son: <ul style="list-style-type: none"> ~ El uso de polígonos estrellados ~ La superposición de teselaciones en planos paralelos.
	<p>Alhambra</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Ciudad, fortaleza y palacio de los reyes de la dinastía Nazarí, sus salas y jardines son la máxima expresión del arte musulmán en Europa. • En la decoración de la Alhambra podemos encontrar los 17 grupos de simetría del plano.
	<p>Edad Media</p> 	<p>Filippo Brunelleschi (1377 – 1416): Fue el primer artista que estudió y utilizó intensivamente las matemáticas. Su pasión por ellas le llevo al descubrimiento de la perspectiva cónica.</p>

Figura 4. Extracto del inicio de la planeación de clase

Nota: tomada de la planeación de clase de la informante.

Este apartado proporcionó una oportunidad de conocimiento que se convirtió en evidencia cuando se le preguntó:

I: En el momento de inicio de la clase incluyó un esquema cronológico sobre la historia de la simetría ¿Cuál es la intención de la historia en el inicio de la clase?

P: Yo trabajo en la línea de investigación *Historia de las matemáticas* y para mí es importante que a los estudiantes se les mencione esta parte de la historia cuando se va a iniciar un tema, en este caso, las simetrías. Es importante que ellos identifiquen que esto no es algo que surgió de la nada, no es un concepto que se desarrolló de la nada, sino que tiene sus antecedentes y diferentes matemáticos empezaron a analizar a observar, que hay un recorrido, incluso desde mucho antes de nuestra era. Los griegos dan ese acercamiento empezando con Euclides, ya sabemos que fue un promotor en la geometría, un matemático muy importante y todo está plasmado en su libro *Los elementos*. Gracias a esos aportes de estos matemáticos podemos conocer hoy en día la simetría y sus diferentes aspectos, si no, ni existiría ni pensaríamos en eso.

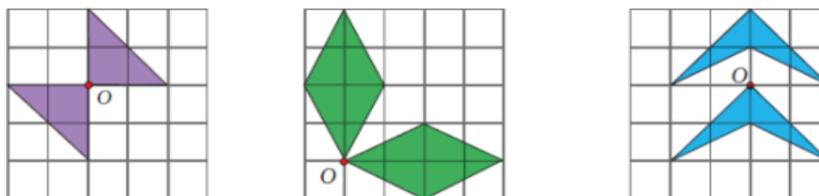
I: ¿Trabajó con dos teorías de la educación matemática?

P: No es que yo haya unido dos marcos teóricos. Simplemente traté de implementar la historia en los niveles de Van Hiele. Por ejemplo, en esa parte de la historia también juega el nivel cero, el nivel de visualización. Aquí no se están visualizando figuras, pero sí se está hablando de esa visualización, de este recorrido histórico, de esta línea de tiempo. Es como una pequeña introducción, para tener idea de qué está pasando aquí (profesora, comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

Lo anterior es evidencia del conocimiento que la profesora moviliza sobre la línea de investigación *Historia de las matemáticas* en la que ha trabajado e implementa como estrategia de enseñanza mediante una línea de tiempo, en el nivel cero del modelo de Van Hiele, para representar o mostrar el surgimiento y formalización de las simetrías. Este elemento es caracterizado en la categoría *Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*.

Continuando con el análisis de las actividades propuestas en la planeación, una de ellas tenía figuras en una cuadrícula y varias preguntas para responder, como se observa en la **figura 5**. Esta información permitió ahondar más sobre el conocimiento de la profesora con respecto a los materiales didácticos.

10) Analiza las siguientes figuras:



11) ¿Qué identificas en cada figura?

Figura 5. Actividad propuesta para la rotación

Nota: tomada de la elaboración de clase de la informante

I: Los ítems 10 y 11 se refieren a la rotación y están unas figuras en unas cuadrículas ¿Por qué escogió gráficas en una cuadrícula? ¿Pensó en utilizar GeoGebra?

P: Porque el estudiante tiene acercamiento con el plano cartesiano y con su cuaderno cuadrículado, esto le permite visualizar mejor esta parte. GeoGebra lo utilizo más adelante porque creo no le permitiría verlo o visualizarlo mejor porque él ya tiene su cuaderno que es cuadrículado y conocimiento del plano cartesiano. Esto le puede permitir mejor lo que quiere visualizar. No quiero decir que con GeoGebra no se puede ni con material manipulativo no se puede, podrían intentarse, pero desde mi punto de vista lo preferí así, creo que se adapta mejor (Profesora, Comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

En el relato anterior, se moviliza el conocimiento de la profesora sobre los recursos didácticos que prefiere implementar para el diseño de sus actividades para la enseñanza de las simetrías, conociendo desde su experiencia, las incidencias positivas o negativas que pueden tener en el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, conoce las potencialidades y limitaciones de tales recursos para la enseñanza del contenido matemático en mención, caracterizándolo en la categoría *Recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático*.

• Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Otro aspecto que permitió profundizar la entrevista con respecto a la información obtenida de la planeación estuvo relacionado con los temas posteriores a las simetrías.

I: ¿Para qué temas posteriores serviría la simetría sea en el mismo curso o en niveles avanzados?

P: En este grado no le veo mucho sino para posteriores. Cuando los estudiantes empiezan a trabajar con funciones, al dibujarlas en el plano cartesiano deben tener en cuenta esta parte de la simetría, por ejemplo, con las parábolas. También en este curso de funciones se le pide al estudiante que traslade la parábola tantas unidades a la derecha o la izquierda, tantas unidades hacia arriba o abajo. Se le pide este conocimiento de orientación y también se pregunta con respecto a qué eje del plano cartesiano son simétricas las funciones. En trigonometría cuando se habla de seno, coseno y tangente también se debe considerar esta parte. En las cónicas en un año escolar más adelante con la hipérbola, la parábola, la elipse aquí en esta parte también. Cuando se va a hablar del cálculo que se ve en un nivel superior también hay que tener en cuenta, la derivada, si es creciente o decreciente, los puntos de inflexión, porque cuesta mucho. Todas estas herramientas que se han construido gradualmente con las simetrías se emplean para los cursos de cálculo. Con simetrías abriría el panorama de los estudiantes en visualizar las figuras geométricas desde otro punto, algo que se va a mover que no va a ser algo quieto, sino que puede tener sus transformaciones y de acuerdo con el nivel educativo que se encuentre van a ser transformaciones más complicadas. De hecho, en Cálculo II cuando esté con integrales se ven estas figuras en 3D, ya hay programas especializados para eso, pero uno tiene que analizar porque ahí también se pregunta de la simetría, rotar estas figuras (profesora, Comunicación personal, 23 de noviembre 2022).

De acuerdo con lo anterior, la profesora movilizó su conocimiento sobre los temas posteriores a las simetrías en otros niveles escolares e incluso niveles superiores. Estos elementos son caracterizados en la categoría *Secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar*.

Discusión

Gracias a la anterior caracterización, se pudieron establecer los descriptores para las categorías de conocimiento movilizadas por la profesora, como se observa en la **tabla 2**.

Tabla 2. Descriptores de las evidencias del PCK de la profesora

Subdominio	Categoría	Descriptor
KFLM	Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.	Conoce teorías de aprendizaje en educación matemática que le permiten comprender cómo los estudiantes construyen los conceptos de simetrías.
	Formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje.	Conoce las estrategias convencionales o no convencionales que los estudiantes utilizan para hacer simetrías. Conoce el lenguaje y vocabulario común que utilizan los estudiantes para designar las simetrías.
KMT	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.	Conoce estrategias de enseñanza a través de preguntas orientadoras y de cuestionamiento para representar las simetrías. Conoce estrategias de enseñanza a través de explicaciones y líneas de tiempo para representar las simetrías.
	Recursos materiales y/o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático.	Conoce recursos materiales o virtuales y su potencialidad y limitaciones para la enseñanza de las simetrías.
KMLS	Secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar.	Conoce la secuenciación del tema de simetrías que se va a enseñar con respecto a los temas previos y posteriores en cuanto a los conocimientos y habilidades requeridos para la tarea.

Nota: elaboración propia.

La **tabla 2** muestra la potencialidad que tiene la planeación de clase como escenario para caracterizar el PCK del profesor de matemáticas, prueba de ello es la presencia de todos los subdominios que lo conforman y varias de sus respectivas categorías, lo cual es apoyado por las investigaciones de Carreño y

Climent (2019) y Carreño *et al.* (2017), quienes también realizaron reflexiones sobre el plan de clase como ambiente para caracterizar el PCK.

El PCK incluye el conocimiento del profesor sobre teorías de aprendizaje formal en educación matemática, lo que le

permite diseñar planificaciones, actividades o secuencias pensando en el razonamiento de los estudiantes (Parra-Sandoval, 2020). En el caso de la profesora, se observó cómo el modelo de Van Hiele guio el diseño de su planeación implementando actividades de acuerdo con el nivel a trabajar e introducir al siguiente. Este modelo estudia cómo se produce el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo ayudar a mejorar su calidad, brindando orientaciones para estructurar el currículo educativo, base para la planeación, ayudando al estudiante a avanzar de un nivel a otro (Vargas y Gamboa, 2013).

La profesora también movilizó sus conocimientos sobre la manera en que los estudiantes interactúan con las simetrías, teniendo presentes las estrategias no convencionales como el conteo de cuadrillos para mover o completar una figura en una cuadrícula. Asimismo, evidenció conocer los posibles términos utilizados por los alumnos al referirse a la simetría como “similar” o “reflejar”. Estos términos pueden surgir de la estrategia de preguntas o cuestionamientos implementada por ella durante el desarrollo de la actividad. Para Zakaryan *et al.* (2018), el conocimiento sobre el vocabulario común y las estrategias no convencionales utilizadas por los estudiantes puede llevar a implementar cuestionamientos para validar sus propios planteamientos y flexibilizar el pensamiento de los alumnos. En este sentido, la planeación de clase permite evidenciar y caracterizar conocimientos tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, se logra analizar cómo el KFLM y el KMT presentan una interdependencia o relación mutua resultado una conexión entre los distintos subdominios del PCK (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020).

Otro aspecto importante en esta investigación es la implementación de la historia de la matemática como estrategia de

enseñanza e introducción a las simetrías. Su aplicación varía desde el uso de momentos históricos antes de desarrollar un tema, tal como se incorporó en la planeación, hasta investigaciones en diferentes campos de la matemática, que tienen por objetivo cambiar la forma tradicional de la enseñanza (Castro-Soto *et al.*, 2016). Este conocimiento de la profesora es gracias a su trabajo de investigación en sus estudios de posgrado, que le proporciona acercamientos a varios enfoques y marcos teóricos tal como lo menciona Zakaryan *et al.* (2018). Además, la planeación de clase le permitió movilizar su conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de los recursos con los que diseñó sus actividades y el estudiante puede estar familiarizado. Para Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón (2022), conocer tales aspectos sobre los recursos didácticos permite una mejor comprensión y visualización de los aprendices con respecto al contenido matemático.

Por otro lado, se evidenció el conocimiento de la profesora sobre temas posteriores a las simetrías, específicamente en aquellos cuyas actividades requieren este contenido matemático para su desarrollo, tales como trasladar gráficamente funciones o rotar figuras tridimensionales. Estos elementos son importantes al diseñar la planeación porque permiten una consecución de temas de manera lógica y organizada, en concordancia con Zakaryan y Ribeiro (2016).

Conclusiones

Esta investigación permitió establecer, una vez más, la planeación de clase en un ambiente o escenario pertinente para estudiar y caracterizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. En el caso de la profesora, se pudieron establecer descriptores de conocimiento correspondientes a las categorías de los subdominios KFLM, KMT

y KMLS del PCK. Estos conocimientos caracterizados son muestra de la importancia que tiene un diseño de planeación para enseñar un contenido matemático basado en teorías de enseñanza o aprendizaje mediante la implementación de estrategias y recursos para el desarrollo de una actividad propuesta, tomando los temas anteriores, como base, y previendo los posteriores que didácticamente necesiten de los conocimientos en construcción.

Un aspecto por destacar en el presente trabajo es la complementariedad de dos enfoques teóricos. La profesora supo cómo implementar su línea de investigación de historia de las matemáticas como estrategia para enseñar las simetrías en el nivel cero del modelo de Van Hiele. Este es un conocimiento clave para el diseño de su planeación que establece conexiones entre distintas visiones, con elementos quizá coincidentes para enseñar y aprender geometría.

Asimismo, este estudio aporta a la base teórica del MTSK al reflexionar sobre la relevancia y potencial que tiene el PCK y su caracterización, incidiendo en la construcción de programas profesionales más especializados en didáctica de las matemáticas, el trabajo resalta la importancia que también tiene el conocimiento matemático dentro del conocimiento profesional del docente. Ambos son parte del carácter especializado que desde el MTSK tienen los profesores de matemáticas (Carrillo-Yáñez *et al.*, 2018).

Agradecimientos

A CONACYT y su convocatoria Becas Nacionales 2021 por permitir el desarrollo de esta investigación.

Referencias

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Ball, D., Thames, H. and Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://bit.ly/3NhlpCO>
- Barrantes, H. (2019). Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 235-246.
- Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23-53. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265>
- Carreño, E., Climent, N. y Flores-Medrano, E. (2017). *Conocimiento geométrico especializado de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria al cursar la asignatura práctica profesional: una reflexión sobre el plan de clase y su desarrollo*. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 274-284). FESPM.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. and Muñoz, M. (2013). *Determining specialized*

- knowledge for mathematics*. <https://bit.ly/3Lxuwzv>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. and Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro-Soto, L., Cortés-Campo, P., Guzmán-Gómez, R., Lezcano-Arias, N., Mora-Coto, G., Rosales-Fernández, N. y Picado-Alfaro, M. (2016). La historia como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas desde las directrices curriculares para la educación secundaria en Costa Rica (1949-2012). *Uniciencia*, 30(2), 1-19. <https://bit.ly/3oDDfHg>
- Delgado-Rebolledo, R. and Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Escudero-Ávila, D. y Carrillo, J. (2020). El conocimiento didáctico del contenido: bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 8-38. <https://bit.ly/3H5LBNZ>
- Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.
- Ferreira, F. y Alencar, E. (2017). Juegos para enseñar matemáticas en la planificación para los profesores de educación infantil. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 2(1), 30-38. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/256>
- Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Seiem.
- González, M., Gómez, P. and Pinzón, A. (2020). Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers. *Teaching Education*, 31(3), 260-278. <https://bit.ly/3L38040>
- Lo, W. Y. (2020). Unpacking Mathematics Pedagogical Content Knowledge for Elementary Number Theory: The Case of Arithmetic Word Problems. *Mathematics*, 8(10), 1-13. <https://doi.org/10.3390/math8101750>
- Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en educación matemática. En P. Diago, D. Yañez, M. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65-80). Seiem. <https://seiem.es/docs/actas/24/ActasXXIVSEIEM.pdf>

- Padilla-Escorcía, I. y Acevedo-Rincón, J. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la modelación de la elipse a través de recursos tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, 19(1), 67-83. <https://bit.ly/3Lo17Xd>
- Pambas, T. (2021). Early grade lesson preparation in Tanzania: Teachers' focus and perceived benefits. *International Journal of Early Years Education*, 29, 1-15. <https://doi.org/10.1080/09669760.2021.2013170>
- Parra-Sandoval, H. (2020). Problematización y conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. *Paradigma*, 61, 251-270. <https://bit.ly/3N924Vy>
- Pascual, M., Montes, M. and Contreras, L. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics*, 9(11), 1-13. <https://doi.org/10.3390/math9111241>
- Ramaligela, S., Ogbonnaya, U. and Mji, A. (2019). Comparing Pre-Service Teachers' PCK Through 9E Instructional Practice: A Case of Mathematics and Technology Pre-Service Teachers. *Africa Education Review*, 16(3), 101-116.
- Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). Seiem.
- Rowland, T., Huckstep, P. and Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudios de caso*. Morata.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <https://bit.ly/3oDFz0W>
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321. <https://bit.ly/40vgW3z>