Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra

Marco Ticse, Jesús Victoria Flores Salazar y Jorge Vivas-Pachas

A partir de la mirada vigilante de la Didáctica de la Matemática en la enseñanza del Cálculo, buscamos caracterizar el conocimiento y trabajo matemático emergente de estudiantes de educación secundaria cuando resuelven tareas sobre la tasa de variación mediado por GeoGebra. Desde la teoría de Espacio de trabajo matemático, analizamos la producción matemática de estudiantes chilenos (16-17 años) y concluimos que dar sentido a la tasa de variación parte de un trabajo basado en procesos algorítmicos y un enfoque de interpretación/experimentación a la idea de variación y cambio subrayando el rol del artefacto, siendo singular establecer procesos de prueba y demostración.

Términos clave: Educación secundaria; GeoGebra; Tasa de variación; Trabajo matemático

High School Students' Mathematical Work on Rate of Change Tasks by Using GeoGebra

From the Mathematical Didactics' viewpoint about teaching Calculus, this paper aims to characterize the knowledge and mathematical work that emerges when high school students solve tasks about the rate of change mediated by GeoGebra. Based on the theory of Mathematical Working Spaces, we analyze the mathematical production of Chilean students (16-17 years old) and conclude that making sense of the change rate starts from a work based on algorithmic processes and an interpretation/experimentation approach to the idea of variation and change emphasizing the role of the artefact, being particular to establish proof and demonstration processes.

Keywords: High school education; GeoGebra; Mathematical work; Rate of change

Ticse, M., Salazar, J. V. F. y Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. *PNA, 17*(4), 425-452. https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.24258

Trabalho matemático dos estudantes do ensino médio em tarefas com taxa de variação utilizando a GeoGebra

A partir da Didática da Matemática no ensino do Cálculo, procuramos caracterizar os conhecimentos e o trabalho matemático emergente dos estudantes do Ensino Médio quando eles resolvem tarefas sobre a taxa de variação mediada pelo GeoGebra. Partindo da teoria do Espaço de Trabalho Matemático, analisamos a produção matemática dos estudantes chilenos (16-17 anos) e concluímos que, o sentido da taxa de variação parte de um trabalho baseado em processos algorítmicos e uma abordagem de interpretação/experimentação à ideia de variação e câmbio, enfatizando o papel do artefato, sendo particular estabelecer os processos de prova e demonstração.

Palavras-chave: Ensino médio; GeoGebra; Taxa de variação; Trabalho matemático

Uno de los problemas centrales en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo es la dificultad de estudiantes universitarios en su transición del nivel secundario al superior. Diversos investigadores (Artigue, 1995; Azcárate, 2000; Dolores, 2000; García et al., 2012; Miranda y Pluvinage, 2014; Montoya-Delgadillo et al., 2018; Oktaç y Vivier, 2016; Vandebrouck y Leidwanger, 2016; Vrancken y Engler, 2014) indican que los estudiantes suelen tener dificultades en comprender conceptos asociados a números reales, funciones, límites, continuidad y derivadas, ya que un enfoque formal va acompañado de obstáculos conceptuales (Kidron, 2019).

Esta problemática ha sido tratada desde perspectivas teóricas y pragmáticas al diseñar situaciones didácticas mediadas con o sin recursos tecnológicos (Silva, 2012; Viseu, 2017), analizar programas curriculares (Dolores et al., 2020) o desde una formación continua de profesores (Andrade et al., 2020); no obstante, tales hechos no han dado solución al problema que continúa siendo vigente.

En ese contexto, es importante conocer cómo se enfoca el Cálculo en el nivel universitario y secundario; sin embargo, éste último usualmente hace referencia al Precálculo —curso presentado en algunas universidades bajo una suerte de introducción al Cálculo planeado para superar los resultados muchas veces insatisfactorios de su predecesor (Andrade et al., 2020)—, que cubre una variedad de objetos matemáticos, como ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades, funciones, logaritmos y exponenciales, límites y tasa de variación; todos ellos con un característico rigor matemático centrado en el conocimiento algebraico (Collingwood et al., 2016; Stewart, 2018; Stewart et al., 2012).

Desde la Didáctica de la Matemática, la tasa de variación ha cobrado trascendencia, pues es considerada una noción fundamental en el Cálculo (Dolores, 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2008) y una herramienta mediadora de conocimiento entre distintos niveles de educación (Dolores et al., 2019; Ticse, 2021). Por ejemplo, su significado e interpretación permite el estudio de la ecuación de la recta, la razón entre magnitudes y la construcción del concepto de derivada como velocidad movilizando la idea de límite (Apóstol, 2001; Hitt, 2018; Sánchez-Matamoros et al., 2006; Zandieh, 2000).

En ese sentido, desde hace dos décadas, se advierte que existen obstáculos epistemológicos por parte de estudiantes en el aprendizaje de este tema (Dolores, 2000). Investigaciones como Rivera y Dolores (2021), Roorda et al. (2016) y Viseu (2017) reportan una relación escasa entre los fenómenos de variación física y programas curriculares, falta de rigor al priorizar el lado algebraico y mecánico, así como dificultades en comprender su significado.

Desde la importancia de la tasa de variación *per se*, resulta relevante conocer qué conocimientos matemáticos del estudiante son puestos en juego precisamente para dar sentido a la noción de tasa de variación. En ese escenario, las tareas juegan un papel importante, hasta cierto punto protagónico, al promover un trabajo matemático bien construido, tal como lo afirma Kuzniak et al. (2016). Ahora bien, se subraya la importancia en el diseño de herramientas digitales y tareas adecuadas que exploren su potencial pedagógico (Drijvers, 2015), ya que aquellas tareas que implican el uso de tecnología permiten el equilibrio entre valores epistémicos y pragmáticos de las técnicas instrumentadas desarrolladas por los estudiantes (García-Cuéllar y Salazar, 2020).

En consecuencia, cuestionamos sobre cuál es el trabajo matemático y qué conocimientos están inmersos cuando estudiantes de educación secundaria resuelven tareas con la tasa de variación con el uso de un software como *GeoGebra*.

Antecedentes

Diversas investigaciones se han preocupado por estudiar el enfoque cognoscitivo y epistemológico del estudiante de educación secundaria cuando resuelve tareas con la tasa de variación, sobre todo en aquellas tareas que involucran el uso de tecnología digital. Como explica Azcárate (2000):

> *No hay que olvidar que los conceptos de pendiente, velocidad y tasa media de variación tienen gran importancia y utilidad en sí mismos y constituyen una parte esencial de la estructura profunda de las funciones y el análisis, frente a las habilidades en el manejo de expresiones algebraicas y símbolos en general […]* (Azcárate, 2000, p. 259).

Por ejemplo, la investigación de Silva (2012) realiza un estudio a ocho estudiantes brasileños (16-17 años) de último año de educación secundaria, donde sostiene que el proceso de construcción al significado de tasa de variación media e instantánea se realiza mediante la movilización simultánea de representaciones algebraicas, gráficas y tabulares con el uso de *GeoGebra*. Del mismo modo, Viseu (2017) muestra la importancia de las representaciones en la enseñanza y aprendizaje de la derivada como tasa de variación instantánea de una función con 21 estudiantes (16-18 años) de último año de educación secundaria de Portugal; sin embargo, el autor evidencia que los estudiantes difícilmente utilizan distintas representaciones en paralelo al resolver una tarea. Además, señala las dificultades en la manipulación de expresiones algebraicas en el cálculo de la tasa de variación media e instantánea en intervalos de tiempo $[1; 1 + h]$ cuando h se aproxima a cero, así como una falta de rigor matemático.

Por otra parte, Villa-Ochoa *et al.* (2018) justifican las contribuciones que los contextos y las tecnologías digitales ofrecen a la comprensión de la tasa de variación instantánea como forma de aproximarse a la derivada de una función en un punto mediante el uso de *GeoGebra y Modellus.* Así, considerando cuatro estudiantes de precálculo de una universidad colombiana, los autores señalan que, para que un estudiante admita la existencia de la tasa de variación, es sustancial la conexión entre un contexto de su propia experiencia y la posibilidad de examinar, representar y confrontar tales contextos con la mediación y vinculación de la tecnología y modelación desde un conjunto de experiencias, significados y representaciones.

Asimismo, bajo supuestos de la Aproximación instrumental, Roorda et al. (2016) indican sobre cómo el uso de la calculadora gráfica y la forma de pensamiento matemático de un estudiante holandés preuniversitario pueden ampliarse en el aprendizaje de la derivada como tasa de variación media e instantánea. Resultado de ello, los autores subrayan que la tecnología bien utilizada puede convertirse en parte integral del conocimiento conceptual del estudiante mientras se está aprendiendo un concepto, pudiendo influir en su conocimiento matemático.

Con base en los antecedentes revisados, nos cuestionamos sobre ¿qué procesos cognitivos y componentes epistemológicas están inmersos en la producción matemática de estudiantes al resolver tareas con la tasa de variación? y ¿de qué manera podemos describir y organizar las articulaciones entre tales procesos y componentes?

Por consiguiente, orientamos nuestra investigación a analizar y caracterizar el trabajo matemático que privilegian estudiantes de educación secundaria al resolver tareas sobre tasa de variación. Para alcanzarlo, intencionamos el paso entre la tasa de variación, tasa de variación media y tasa de variación instantánea a partir de una situación de aprendizaje con el apoyo del software de geometría dinámica *GeoGebra* v5.0 (Hohenwarter, 2002). Para realizar el análisis, presentamos el marco teórico a usar.

MARCO CONCEPTUAL

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) se subraya como una herramienta teórica que permite analizar y caracterizar el conocimiento y la producción matemática del estudiante cuando enfrenta problemas matemáticos (Gómez-Chacón et al., 2016). Desde esta teoría, el trabajo matemático se entiende como el trabajo intelectual de producción, cuyo desenvolvimiento y finalidad es definido y apoyado por la matemática (Kuzniak, 2022), mientras que la noción de tarea comparte lo expresado por Sierpinska (2004), que la considera como cualquier tipo de problema matemático con preguntas correctamente planteadas para su solución en un tiempo predecible.

Ahora bien, para caracterizar el trabajo matemático que privilegia el individuo, se hace alusión a los paradigmas de un dominio matemático específico (Geometría, Álgebra, Análisis, entre otros) los cuales representan una combinación de creencias, técnicas, métodos y valores compartidos por un grupo científicos (Kuzniak et al., 2016).

Sobre la base de que todo quehacer matemático implica aspectos epistemológicos y cognitivos, en el ETM se concibe como el fruto de una interacción entre un individuo y las tareas en un ambiente organizado mediante la articulación de dos planos: epistemológico y cognitivo (Flores-González y Montoya-Delgadillo, 2016; Kuzniak y Richard, 2014). El primer plano guarda relación con el contenido matemático y su organización, mientras que el segundo plano se relaciona con el pensamiento del individuo. La organización de cada plano es triádica.

El plano epistemológico está constituido por el representamen o representante (signos y representaciones semióticas), el artefacto (herramientas materiales o simbólicas que serán o no utilizadas por un individuo) y el referencial (conjunto de propiedades, teoremas, definiciones y axiomas). Por otro lado, el plano cognitivo está conformado por los procesos de visualización (interpretación de signos y la construcción de la representación de los objetos y sus relaciones), construcción (observación, exploración y experimentación mediada por un artefacto junto con esquemas de uso para producir algo tangible) y prueba (proceso de justificación mediante herramientas teóricas) (Kuzniak et al., 2016).

En relación a las articulaciones de los planos epistemológico y cognitivo, se puntualiza que el tránsito entre dichos planos garantiza la comprensión de un saber (Kuzniak, 2011). Desde el ETM, tales articulaciones se evidencian mediante tres génesis (Figura 1).

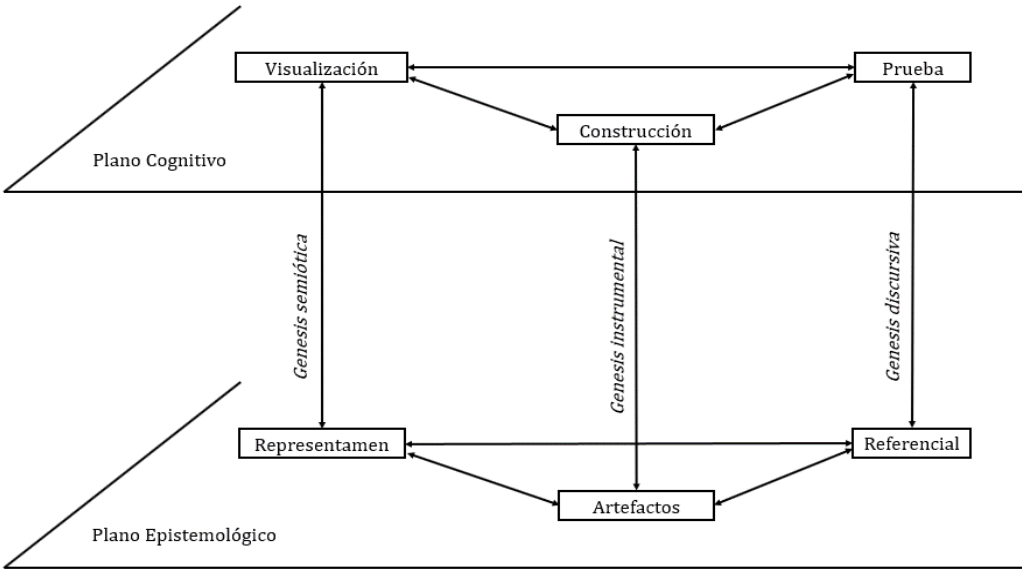


Figura 1. Diseño del ETM (Traducido de Kuzniak et al., 2016, p. 725)

La génesis semiótica, entendida como una decodificación e interpretación de signos donde una representación semiótica remite a su objeto bajo el proceso de visualización; la génesis instrumental, que permite operacionalizar los artefactos (material o simbólico) en el proceso construcción a partir de la instrumentalización e instrumentación; y la génesis discursiva, la cual enlaza el proceso de prueba con las herramientas teóricas, dando sentido a las propiedades para dejarlo al servicio del razonamiento matemático.

Estas articulaciones no deben ser entendidas como interacciones unidireccionales entre elementos del plano cognitivo y epistemológico, sino más bien como coordinaciones que varían según las génesis involucradas. Así, se definen los planos verticales (figura 2), como herramientas que representan las interrelaciones entre los aspectos del ETM, caracterizando las fases en los procesos de solución y analizando los cambios que se producen en el transcurso de tales procesos cuando se da más protagonismo a determinados aspectos (Kuzniak et al., 2016).

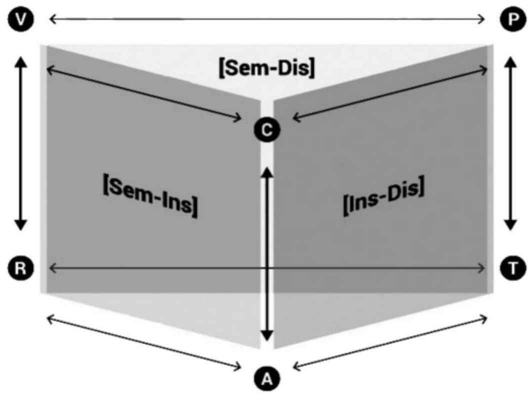


Figura 2. Planos verticales del ETM (Kuzniak et al., 2016, p. 727)

El plano Semiótico-Instrumental ([Sem-Ins]) privilegia la identificación y exploración de objetos, desarrollando una competencia ligada al descubrimiento orientado hacia la construcción de resultados e interpretaciones aportados por los artefactos. El plano Instrumental-Discursivo ([Ins-Dis]) refleja el razonamiento matemático y considera la cuestión de la prueba basado en experimentaciones o argumentaciones deductivas. El plano Semiótico-Discursivo ([Sem-Dis]) indica la comunicación matemática de resultados con base en el razonamiento perceptivo o el razonamiento hipotético y deductivo si la atención se centra en el lado semiótico o en la prueba, respectivamente (Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak y Richard, 2014).

En relación a los paradigmas, Montoya-Delgadillo y Vivier (2016) señalan que el trabajo matemático en el dominio del Análisis es caracterizado a través de tres paradigmas: Análisis-Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas en la Geometría, los cálculos aritméticos o el mundo real; Análisis-Calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos; y, Análisis-Real (AR), caracterizado por un trabajo de aproximación: supremos e ínfimos, cotas; una entrada más topológica: “cerca de ε”, “lo despreciable”.

En un contexto escolar, el ETM distingue: ETM de referencia, definido por una comunidad de forma ideal en función a criterios matemáticos; el ETM idóneo, definido en términos de la enseñanza en una institución dada; y, el ETM personal, definido a partir de la reflexión entre el conocimiento aprendido/ejecutado del individuo al resolver una tarea (Kuzniak et al., 2016).

De esta forma, nuestra investigación se sitúa en el dominio del Análisis y se centra en estudio del ETM personal, por lo que es necesario identificar qué elementos del plano epistemológico y cognitivo aparecen, cuál es la relación entre una génesis y otra, qué planos verticales están asociados a las génesis y qué paradigmas son privilegiados, todo ello a partir de una situación de aprendizaje compuesta por tareas con la tasa de variación.

METODOLOGÍA

La investigación es de corte cualitativa en el sentido de Hernández-Sampieri et al. (2014) y Sierra (2011), el cual considera un esquema de cinco fases: 1) problemática, 2) estudio del objeto tasa de variación, 3) ejecución de la parte experimental, 4) análisis de datos esperados y obtenidos y 5) principales resultados y conclusiones.

En la fase inicial, se identificó la problemática en el dominio del Análisis desde una revisión bibliográfica junto al programa curricular nacional de Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2019). Asimismo, se indicó los principales aspectos del ETM. En la fase siguiente, se presentó un breve estudio a la tasa de variación.

En la tercera fase, se diseñó y seleccionó instrumentos para registrar y recolectar la información (situación de aprendizaje, applets en *GeoGebra* y cámara de audio y video). La ejecución de la parte experimental constó de dos sesiones de clase de 80 y 60 minutos en momentos diferentes. Para cada sesión de clase, los investigadores estuvieron a cargo, mientras que el profesor no tuvo injerencia en las sesiones. En el estudio, participaron cinco estudiantes (15-17 años) del cuarto y último año de educación secundaria en una institución educativa de la ciudad de Valparaíso, Chile. Tales estudiantes fueron agrupados en dos duplas y uno individual y se les proporcionó la impresión de la situación de aprendizaje y un computador personal (que contenían applets en *GeoGebra*) para su resolución y manipulación, respectivamente. Se elige como objeto de análisis la producción matemática de las duplas denominadas D1 y D2.

Luego, en la cuarta fase, se detallaron los resultados obtenidos de los estudiantes y se realizó la transcripción de la información obtenida, tanto de los applets como del audio y video. Por último, se efectuó un análisis contrastando las acciones que esperamos obtener con las acciones obtenidas de la producción matemática a la luz del ETM.

La situación de aprendizaje puntualiza el problema de la velocidad (Apóstol, 2001), el cual resume determinar la velocidad instantánea de un objeto a partir de articular la construcción de la tasa de variación media e instantánea y el estudio de la pendiente de la recta secante y recta tangente a una curva, respectivamente. La tasa de variación es considerada como la variación o cambio de la velocidad en relación al tiempo (Córdoba et al., 2015; Villa-Ochoa et al., 2018; Viseu, 2017). Mostramos el problema asociado a la situación de aprendizaje en la figura 3.

LA CARRERA DE SACOS

Jorge es un participante en una carrera de sacos. Ayudados de un cronómetro sus amigos tomaron los datos de las distancias en cada segundo recorrido tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo en segundos (t)	0	2	4	5	7	10
Distancia en metros (d)	0	0,8	3,2	5	9,8	20

Siguiendo la estructura del juego de Jorge y los sacos, determinaremos cuánto es exactamente la velocidad en el instante cuando $t = 7$ segundos.

Figura 3. El problema presentado a los estudiantes (Ticse, 2021, p. 49)

Con base en el problema, se elaboran 18 tareas divididas en dos: parte 1 y parte 2. La primera parte, direcciona al estudiante a desarrollar intuitivamente el tránsito entre la variación y la tasa de variación media (velocidad media) y consta de ocho tareas. La segunda parte, está orientada a desarrollar intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea (velocidad instantánea) y consta de 10 tareas. Este artículo selecciona siete tareas (ver tabla 1) que evidencian de mejor manera los elementos privilegiados y activados en el ETM.

Tabla 1
Objetivo de tareas seleccionadas

Tarea		Objetivo de la tarea
Parte 1	3 y 4	Calcular y describir el procedimiento de cálculo de la velocidad media en un intervalo de tiempo específico.
	7	Interpretar y determinar a la velocidad media como la pendiente de la recta secante a la gráfica de la curva.
Parte 2	4 y 5	Establecer nociones de aproximación mediante la manipulación del artefacto deslizador (*GeoGebra*) cuando la amplitud de cada intervalo es pequeña (casi 0).
	8	Interpretar la relación de la velocidad en un instante específico y la pendiente de la recta tangente mediante la construcción/manipulación del artefacto tangente (*GeoGebra*).
	10	Establecer diferencias sobre cómo determinar la velocidad media e instantánea.

Algunas tareas se han unificado para alcanzar sus propósitos. Este hecho permite una mejor articulación e interacción entre componentes del ETM y, en consecuencia, una descripción y mejor análisis en la producción matemática de cada dupla.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Para realizar los análisis, se propone un análisis didáctico. Inicialmente, se realiza un análisis de las acciones esperadas (análisis-esperado) de la situación de aprendizaje. Luego, se muestra el análisis de lo ocurrido (análisis-obtenido) a la producción matemática de las duplas D1 y D2. Ambos análisis, bajo consideraciones del ETM.

Análisis de la Parte 1: tareas 3 y 4

3. Calcule la velocidad (velocidad media “v”) en los intervalos $[5; 7]$ y $[7; 10]$.
4. A partir de los resultados a las preguntas anteriores, diga con sus propias palabras. ¿Cómo podemos calcular la velocidad media?

Figura 4. Parte 1: tareas 3 y 4 (Ticse, 2021, p. 58)

La unificación de estas tareas orienta a los estudiantes a determinar y describir el procedimiento de cálculo de la velocidad media en un intervalo de tiempo específico. Se espera que los estudiantes declaren que, para determinar la velocidad media, se necesita la razón entre una porción de la distancia (ubicación inicial y final) y un intervalo de tiempo (tiempo inicial y final), esta última asociada a dicha distancia; todo ello, a partir de calcular la velocidad media en los intervalos de tiempo [5; 7] y [7; 10]:

$$v_{media}\,[5;7] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{9{,}8m - 5m}{7s - 5s} = \frac{4{,}8m}{2s} = 2{,}4\ m/s$$

$$v_{media}\,[7;10] = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_{final} - d_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{20m - 9{,}8m}{10s - 7s} = \frac{10{,}2m}{3s} = 3{,}4\ m/s$$

En términos del ETM, la génesis semiótica se activa cuando los estudiantes reconocen el artefacto fórmula de velocidad media, para luego realizar su tratamiento en el registro algebraico. Se considera que el proceso de instrumentalización proviene de la manipulación a tal fórmula, propiciando la dinámica en la génesis instrumental, donde el plano [Sem-Ins] es activado. La génesis discursiva se manifiesta cuando los estudiantes basan sus argumentaciones basadas en conceptos de la Cinemática o Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) a través de los procesos de exploración y experimentación a la fórmula de velocidad media, donde se activa el plano [Ins-Dis]. Adicionalmente, se espera que, al considerar procesos algorítmicos correspondientes a nociones de variación, se privilegiaría el paradigma AC.

Trabajo matemático de D1. Tareas 3 y 4

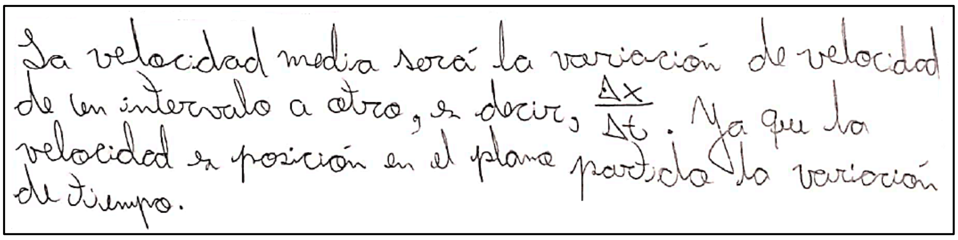
Para la tarea 3, la producción matemática evidencia el reconocimiento y manipulación del artefacto formula de velocidad media. Esta acción de construcción interna conlleva a una instrumentalización del artefacto, permitiéndole realizar observaciones y producir escritos en el registro algebraico para calcular el valor de las velocidades medias, es decir, las velocidades medias $2{,}4\ m/s$ y $3{,}4\ m/s$; queda en evidencia la activación de la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano [Sem-Ins].

En la tarea 4, la producción evidencia un razonamiento que explica cómo obtener la fórmula de velocidad media a partir de tareas predecesoras. Según la grabación de audio y video, D1 afirma que "para calcular la velocidad media, debemos calcular la velocidad en un intervalo de tiempo". Si bien esta validación empírica no se justifica en referenciales teóricos, la reflexión al resolver tareas anteriores nos permite determinar que se construye una definición a partir de un razonamiento inductivo. La génesis discursiva es activada y con ello el plano [Ins-Dis].

Trabajo matemático de D2. Tareas 3 y 4

En la tarea 3, la producción matemática de D2 es similar a D1, pues la instrumentalización del artefacto formula de velocidad media permite realizar escritos en el registro algebraico; sin embargo, notamos que D2 indica a la distancia recorrida como x y establece: "$\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq \frac{x}{t}$", hecho que nos lleva a considerar que las acciones para resolver las tareas predecesoras condujeron a esta dupla a establecer una relación de inigualdad entre la velocidad y velocidad media, lo cual no estaba en nuestros análisis de las acciones esperadas. A pesar de ello, las acciones evidencian la activación de las génesis semiótica e instrumental y con ello el plano [Sem-Ins].

En la tarea siguiente, D2 denota a la velocidad media como $\Delta x/\Delta t$, a diferencia de D1. Particularmente, señala que "la velocidad media será la variación de velocidad de un intervalo a otro, es decir, $\Delta x/\Delta t$". Posterior a esta afirmación, usa la expresión *partido* para describir el cociente entre la variación de distancia y tiempo (ver figura 5).



[La velocidad media será la variación de velocidad de un intervalo a otro, es decir, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.Ya que la velocidad es posición en el plano partido la variación de tiempo]

Figura 5. Producción matemática de D2, Parte 1 - Tarea 4

A pesar que no esté basada en algún referencial teórico específico del MRU, decimos que existe un razonamiento inductivo que conlleva a una definición empírica de la velocidad media. De la experimentación en la tarea 3 y la descripción realizada en el registro de lenguaje natural en la tarea 4, la génesis discursiva es activada y con ello el plano [Ins-Dis].

Asimismo, decimos que se privilegió el paradigma AC en ambos pares, pues realizaron procesos algorítmicos correspondientes a la variación en el desarrollo de cómo hallar la velocidad media.

Análisis de la Parte 1: tarea 7

7. ¿Qué relación existe entre: los valores hallados en "3." y las medidas de las pendientes halladas en "5.d."? Explique detalladamente

Figura 6. Parte 1 - Tarea 7 (Ticse, 2021, p. 66)

Esta tarea dirige a los estudiantes a interpretar y representar la velocidad media como pendiente de la recta secante a la curva graficada en *GeoGebra*, pues al resolver las tareas predecesoras, la fórmula de velocidad media es representada como la razón entre la variación de la distancia y la variación del tiempo. Se espera que los estudiantes afirmen que la velocidad media sea determinada por esta otra representación.

Desde el ETM, la génesis semiótica se activa cuando el proceso de visualización es orientado por la percepción de los estudiantes a partir de observaciones y exploraciones, tanto al resultado de los cálculos hechos en la tarea 3 como a las pendientes de las rectas secantes graficadas en *GeoGebra*. Estas acciones dan pie al tránsito entre una representación a otra. Luego, se activa el plano [Sem-Ins]. Además, se considera que, al utilizar la gráfica de la curva para realizar interpretaciones nacidas en la Geometría, se privilegiaría el paradigma AG.

Trabajo matemático de D1. Tarea 7

La producción matemática evidencia que la observación y reconocimiento icónico de los objetos velocidad media (como razón de magnitudes) y pendiente de la recta secante guían el proceso de visualización. Según la producción escrita de la dupla D1, "las pendientes halladas en 5d (en *GeoGebra*) son iguales a las velocidades medias de los intervalos de tiempo propuestos en el ejercicio 3" (ver figura 7).

De acuerdo con la grabación de audio y video, D1 comenta: "la pendiente indica la velocidad media en un intervalo y está representado por eso (refiriéndose a la pendiente)". En consecuencia, se desarrolla un razonamiento perceptivo, permitiendo a la dupla establecer la relación de igualdad entre la velocidad media y la pendiente de la recta secante. La génesis semiótica e instrumental se activaron y, con ello, el plano [Sem-Ins].

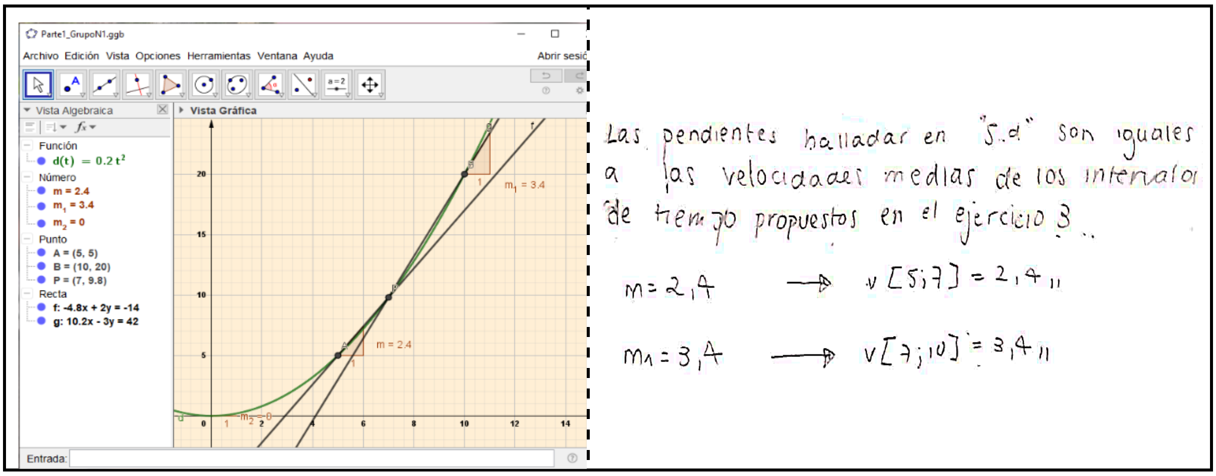
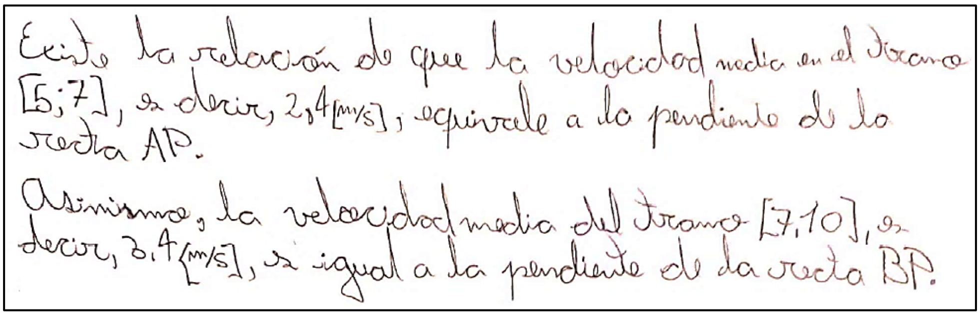


Figura 7. Producción matemática de D1, Parte 1 - Tarea 7

Trabajo matemático de D2. Tarea 7

La producción matemática de D2 es análoga a D1, pues se evidencia que el proceso de visualización fue guiado a partir de observaciones y exploraciones a los resultados anteriores (tarea 3 y al valor de las pendientes graficadas en *GeoGebra*). De acuerdo al par, "la velocidad media en el tramo (intervalo de tiempo) equivale a la pendiente de recta" (ver figura 8).

Nos pareció interesante el asombro de la dupla al encontrar tal igualdad bajo la interacción con *GeoGebra*, ya que, según la grabación de audio y video, D2 comenta: "¡mira las pendientes! ¡esto es magia!", haciendo referencia que ambas cantidades coincidían.



[Existe la relación de que la velocidad media en el tramo [5; 7], es decir, 2,4[m/s], equivale a lapendiente de la recta *AP*. Asimismo, la velocidad media del tramo [7; 10], es decir, 3,4[m/s], es igual a la pendiente de la recta *BP*]

Figura 8. Producción matemática de D2, Parte 1 - Tarea 7

Luego, se evidencia un razonamiento perceptivo que establece la representación de la velocidad media como pendiente de la recta secante; las génesis semiótica e instrumental son activadas y, con ello, el plano [Sem-Ins]. Consideramos que se privilegió el paradigma AG tanto en D1 como en D2, puesto que del proceso de visualización se realizaron interpretaciones sobre la representación de la velocidad media como razón entre variaciones y pendiente de recta secante.

Análisis de la parte 2: tareas 4 y 5

La integración de las tareas 4 y 5 (ver figura 9) orienta a los estudiantes a establecer nociones de aproximación mediante la manipulación del artefacto deslizador de *GeoGebra* cuando la amplitud h de cada intervalo es más pequeña, es decir, aproximadamente 0. Para completar la tabla en la tarea 4, se espera que los estudiantes manipulen el deslizador de forma progresiva para determinar la amplitud de h y, en consecuencia, el valor de la velocidad media como pendiente de la recta secante en cada intervalo de tiempo pedido. Como consecuencia, se espera que la tabla sea utilizada como una herramienta para reflexionar sobre el comportamiento de la velocidad media cuando el valor de h se aproxima a 0 y, con ello, afirmar que la recta secante se aproxima hacia una recta tangente.

4. Con la ayuda del GeoGebra utilice el deslizador "a" para acercar el punto A hacia el punto P, complete las tablas. En la última fila responda lo pedido en la flecha.

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[7; 10]$		
$[7; 8]$		
$[7; 7{,}5]$		
$[7; 7{,}1]$		
$[7; 7{,}01]$		
$[7; 7{,}001]$		
⋮		

¿Los valores del intervalo, de h y la velocidad media se acercan hacia qué números?

Intervalo de tiempo	h	Velocidad media
$[5; 7]$		
$[6; 7]$		
$[6{,}5; 7]$		
$[6{,}9; 7]$		
$[6{,}99; 7]$		
$[6{,}999; 7]$		
⋮		

5. Utilizando el deslizador "a" para acercar el punto A hacia el punto P, responda ¿Cómo varió "h", la pendiente de la recta secante AP y el intervalo de tiempo? y ¿Cómo va cambiando la recta secante AP?

Figura 9. Parte 2 - Tarea 4 y 5 (Ticse, 2021, p. 79)

De acuerdo al ETM, la génesis semiótica se activa cuando los estudiantes representan, mediante los procesos de visualización y codificación, la velocidad media como pendiente de la recta secante a la curva graficada en *GeoGebra*. Estos procesos permiten la instrumentalización del artefacto deslizador con el fin de hallar el valor de h y la velocidad media 0 y 2,8 m/s, respectivamente. Asimismo, la tabla de valores obtenida se convierte en un artefacto simbólico, pues sirve también como medio para observar y explorar el crecimiento y descrecimiento de la variación que ocurre entre las cantidades h y velocidad media, determinando la dinámica en la génesis instrumental. Luego, la génesis instrumental es activada y, con ello, el plano [Sem-Ins].

Consecuencia de lo anterior, en la tarea 5, se espera que los estudiantes reflexionen y/o conjeturen sobre la noción de aproximación de cantidades a partir del proceso de construcción mediado por el (o los) artefacto(s), cuyo proceso se da mediante la instrumentalización a la herramienta deslizador y/o tabla de valores; el plano [Ins-Dis] es activado.

Después, al utilizar la gráfica de la curva en *GeoGebra* para realizar interpretaciones y realizar trabajos que implican aproximación de variables, así como la manipulación de los artefactos ya mencionados, se considera que se privilegian los paradigmas AR y AG, respectivamente.

Trabajo matemático de D1. Tareas 4 y 5

La producción matemática evidencia que en la tarea 4, mediante los procesos de visualización y codificación, se considera a la velocidad media como la pendiente de la recta secante. Tales procesos guían la dinámica en la génesis instrumental a partir de la instrumentalización al artefacto deslizador con el fin de determinar el valor de h y la velocidad media. Asimismo, al completar la tarea 4, la dupla considera como segundo artefacto a la tabla en dicha tarea. La génesis semiótica e instrumental es activada y, con ello, el plano [Sem-Ins].

Con respecto a la tarea 5, D1 evidencia que, a partir de la experimentación y exploración con el artefacto (deslizador y/o tabla de la tarea 4) para determinar cómo varia h y la pendiente de la recta secante, surgen validaciones sobre aproximación, lo cual se puede ver cuando usan el término tiende, refiriéndose a un acercamiento a la noción de límites. Textualmente, D1 señala que: “la pendiente de la recta secante tiende a 2,8”. Luego, el plano [Ins-Dis] es activado.

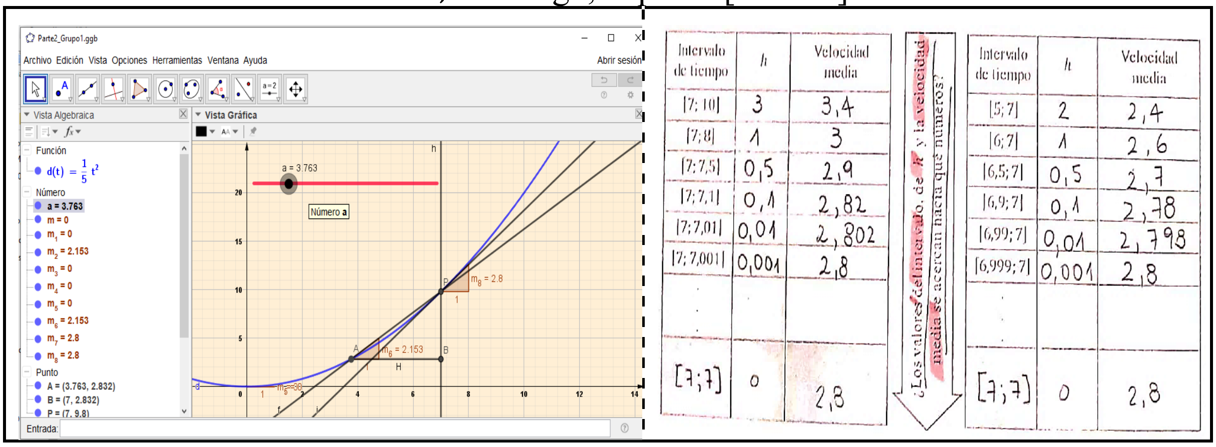


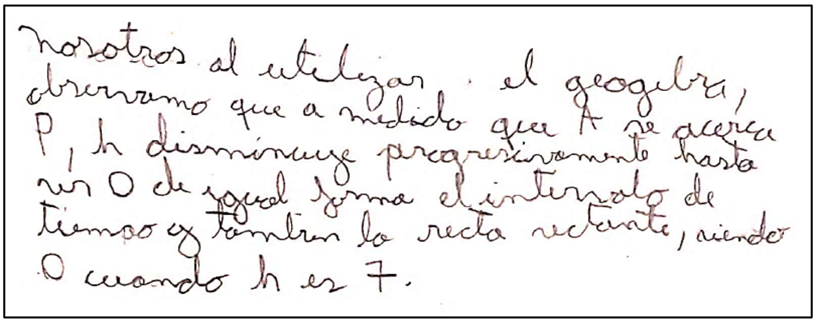
Figura 10. Producción matemática de D1, Parte 2 - Tarea 4

Con relación a los paradigmas, el realizar manipulaciones a los artefactos ya mencionados, surgen interpretaciones salidas de la geometría, como la idea de aproximación cuando un número se hace pequeño. Así, se evidencia que D1 privilegia el paradigma AG; sin embargo, el paradigma AR no es privilegiado, ya que el hecho de que la dupla utilice el término “tiende” no es suficiente. Para ello, se tendría que señalar organizadamente que la recta secante se aproxima a una recta tangente cuando h tiende a 0.

Trabajo matemático de D2. Tareas 4 y 5

Para el desarrollo de la tarea 4, D2 realiza similares procedimientos que D1 al utilizar el artefacto deslizador mediante el proceso de visualización y decodificación para representar la velocidad media como pendiente de la recta secante. Luego, la dinámica en la génesis instrumental al instrumentalizar dicho artefacto permite determinar el valor de h y la velocidad media, consiguiendo completar la tabla. Se activa la génesis semiótica e instrumental y con ello el plano [Sem-Ins].

En la tarea 5, D2 muestra que la experimentación y exploración con el artefacto deslizador permite declarar algunas argumentaciones sobre nociones de aproximación; sin embargo, a diferencia de D1, D2 no realiza experimentaciones con el artefacto: tabla de valores (de la tarea 4). Ante esto, declaran que “nosotros al utilizar *GeoGebra*, observamos que a medida que A se acerca a P, h disminuye progresivamente hasta ser 0. De igual forma, el intervalo de tiempo y también la recta secante, siendo 0 cuando h es 7” (ver figura 11). Estas afirmaciones no permiten que la dupla concluya correctamente sobre la aproximación de la velocidad media, ya que sus argumentaciones no provienen de un razonamiento inductivo. En consecuencia, la génesis discursiva no es activada.



nosotros al utilizar el geogebra,
observamo que a medida que A se acerca
P, h disminuye progresivamente hasta
ser 0 de igual forma el intervalo de
tiempo y tambien la recta secante, siendo
0 cuando h es 7.

[Nosotros al utilizar el geogebra, observamo que a medida que *A* se acerca *P*, *h* disminuye progresivamente hasta ser 0 de igual forma el intervalo de tempo y también la recta sectante, siendo O cuando h es 7]

Figura 11. Producción matemática de D2, Parte 2 - Tarea 5

A pesar de que D2, no manipula el artefacto tabla de valores y no concluya correctamente lo pedido en la tarea 5, el hecho que use el deslizador como medio para realizar interpretaciones salidas de la geometría, como la idea de aproximación cuando un número se hace pequeño, evidencia que privilegia el paradigma AG.

Análisis de la parte 2: tarea 8

8. En el GeoGebra, con la herramienta tangente halle la ecuación de la recta tangente de la gráfica $d(t) = \frac{1}{5}t^2$ en el punto P. Posteriormente calcule la pendiente de tal recta tangente.
   a. ¿Qué se puede decir sobre lo construido y la pregunta 7.?
   b. ¿Cuánto es exactamente la velocidad en un instante específico, es decir la velocidad instantánea cuando $t = 7$ segundos?

Figura 12. Parte 2 - Tarea 8 (Ticse, 2021, p. 88)

Esta tarea tiene por finalidad que los estudiantes interpreten la relación entre la velocidad en un instante específico y la pendiente de la recta tangente a partir de la construcción y manipulación de la herramienta tangente en *GeoGebra*, el cual direcciona a responder el problema planteado en la situación de aprendizaje. Específicamente, la velocidad, en un instante específico, es $2{,}8\, m/s$ y es representada como la pendiente de recta la tangente a una curva (Figura 13).

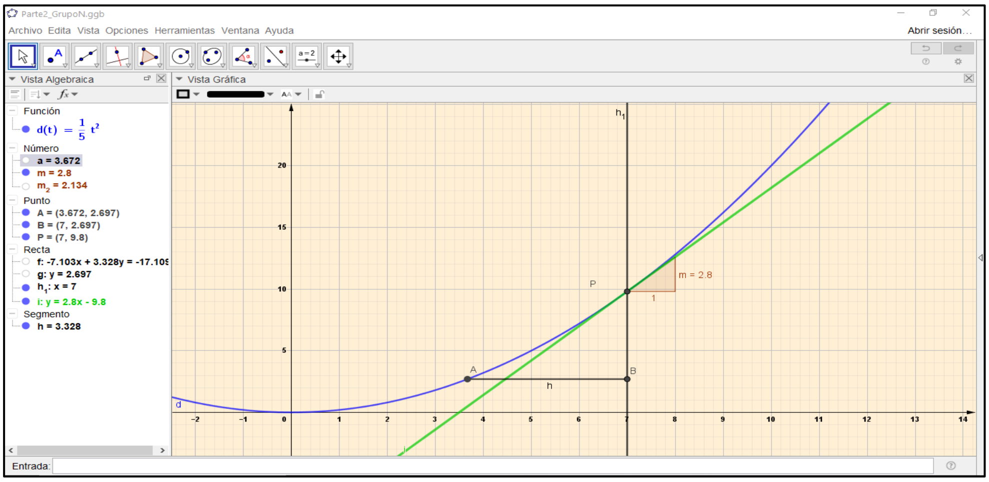


Figura 13. Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva en el punto P

Desde el ETM, la génesis instrumental se activa a partir de la exploración al artefacto pendiente de la recta tangente, permitiendo realizar observaciones e interpretaciones para dar forma a la representación de la noción de velocidad instantánea. Consecuencia de ello, la génesis semiótica se activa a partir de la representación de la velocidad en un instante específico como pendiente de la recta tangente en el punto P de la curva. La exploración y dinámica en la génesis instrumental guían la activación del plano [Sem-Ins]. También, como la gráfica de la curva permite realizar interpretaciones y exploraciones, consideramos que se privilegia el paradigma AG.

Trabajo matemático de D1. Tarea 8

Observamos que D1 sigue la secuencia de pasos para graficar la recta tangente y su pendiente en el punto fijado de la curva en *GeoGebra*. Se evidencia que el artefacto pendiente de la recta tangente, le permite realizar exploraciones y, con ello, interpretar la velocidad en un instante específico; sin embargo, a pesar de que estas acciones no determinan concretamente si existe o no un razonamiento inductivo por parte de la dupla, es importante señalar que, a partir la declaración textual del equipo: “la pendiente es el valor al que se acercan las velocidades medias”, se hace referencia a que este último valor es una aproximación. Así, en la tarea 8.b, D1 determina la velocidad instantánea 2,8 m/s. El proceso de construcción y exploración promueven la dinámica en la génesis semiótica y, con ello, el plano [Sem-Ins].

Trabajo matemático de D2. Tarea 8

Luego de ejecutar las instrucciones en *GeoGebra*, la producción del par evidencia que el artefacto pendiente de la recta tangente permite realizar exploraciones para la interpretación de la velocidad en un instante específico como pendiente de la recta tangente a la curva.

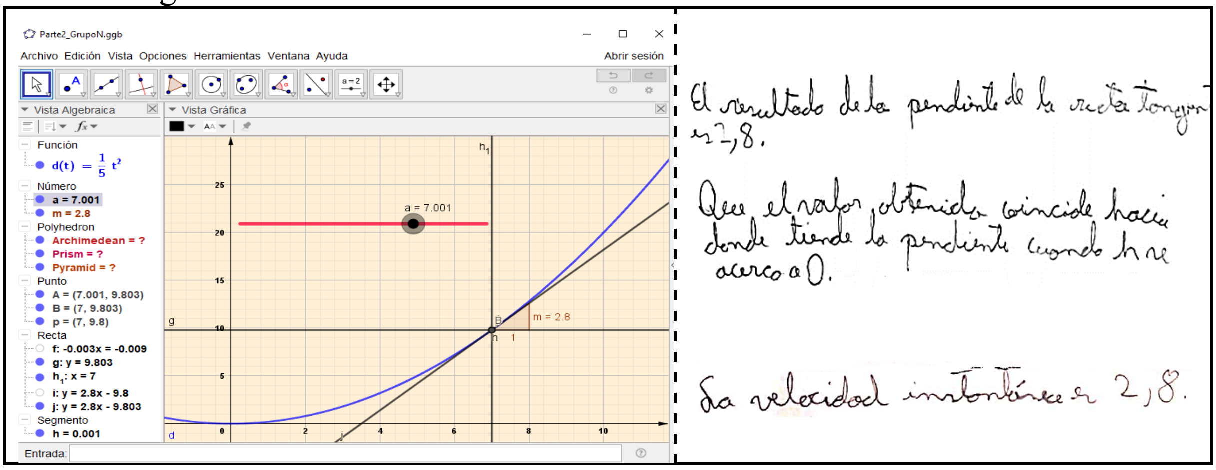


Figura 14. Producción matemática de D2, Parte 2 - Tarea 8b

Al igual que D1, las acciones no establecen concretamente un razonamiento inductivo por parte de la dupla; sin embargo, según D2: “el valor obtenido coincide hacia donde tiende la pendiente cuando h se acerca a 0”, se interpreta como la aproximación del valor de la pendiente de la recta tangente (ver figura 14). Con ello, para la tarea 8.b, el equipo concluye que el valor 2,8, que es el aproximado de tal pendiente, corresponde al valor de la velocidad instantánea. De esta forma, la dinámica en la génesis semiótica es inducida por el proceso de construcción y exploración. Luego, el plano [Sem-Ins] es activado.

La producción matemática de ambas duplas evidencia que se utiliza la gráfica de la curva en *GeoGebra* para interpretar la representación de la velocidad instantánea como pendiente de la recta tangente. Con ello, se privilegia el paradigma AG.

Análisis de la parte 2: Tarea 10

La tarea 10, que se muestra en la figura 15, direcciona a los estudiantes a establecer diferencias sobre cómo determinar la velocidad media e instantánea al establecer organizadamente que la velocidad media e instantánea corresponden a la pendiente de la recta secante y tangente de una curva, respectivamente.

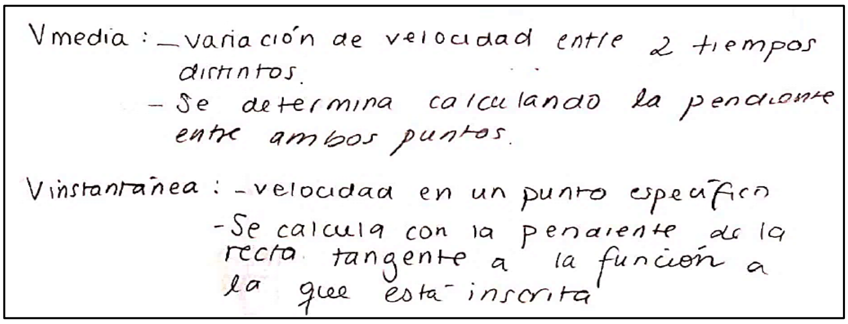
10. Diga con sus palabras la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea especificando cómo se determinan ambas velocidades.

Figura 15. Parte 2 - Tarea 10 (Ticse, 2021, p. 91)

De acuerdo al ETM, la génesis semiótica es activada mediante el proceso de visualización e interpretación a la gráfica de la curva en *GeoGebra* y las pendientes (obtenidas en las tareas anteriores). Por consiguiente, a partir de la dinámica de la génesis semiótica, se desarrolla un razonamiento perceptivo que permite identificar y construir organizadamente la definición de la velocidad media e instantánea como una pendiente de recta secante y tangente respectivamente. Así, la génesis discursiva es activada y, con ello, el plano [Sem-Dis]. Por su parte, consideramos que, al realizar interpretaciones y validaciones justificadas en el significado de las velocidades medias e instantáneas, se estaría privilegiando el paradigma AR.

Trabajo matemático de D1. Tarea 10

De su producción, se evidencia el proceso de visualización e interpretación a la pendiente de la recta secante y tangente como la representación de las velocidades pedidas. En particular, D1 reconoce la diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de cómo fueron obtenidas (ver figura 16). Con ello, la dinámica en la génesis semiótica le permite a D1 estructurar y organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es activado el plano [Sem-Dis].


Vmedia: – variación de velocidad entre 2 tiempos distintos.
– Se determina calculando la pendiente entre ambos puntos.
Vinstantánea: – velocidad en un punto específico
– Se calcula con la pendiente de la recta tangente a la función a la que está inscrita

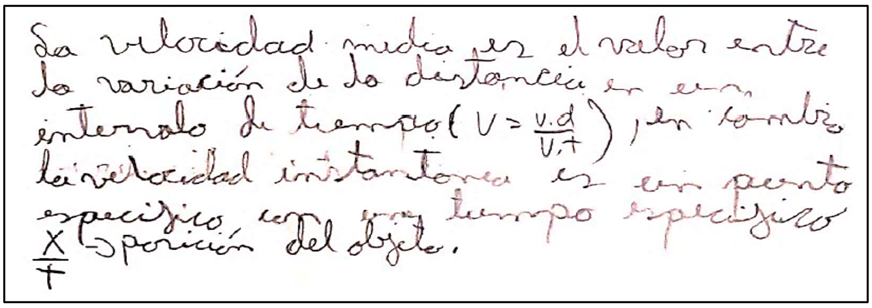
[Vmedia: - variación de velocidad entre 2 tiempos distintos. - Se determina calculando la pendiente entre ambos puntos.
Vinstantánea: - velocidad en un punto específico. - Se calcula con la pendiente de la recta tangente a la función a la que está inscrita]

Figura 16. Producción matemática de D1, Parte 2 - Tarea 10

Por otro lado, la dupla realiza interpretaciones y validaciones a partir de la gráfica con el fin de justificar y estructurar organizadamente el significado de las velocidades medias e instantáneas en relación a las pendientes de la recta secante y tangente, respectivamente. Con ello, se evidencia que se privilegió el paradigma AR.

Trabajo matemático de D2. Tarea 10

Observamos que D2 establece una diferencia entre la velocidad media e instantánea a partir de sus respectivas definiciones. Según la dupla, “la velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo $(V = vd/vt)$, en cambio, la velocidad instantánea es un punto específico, con un tiempo específico $\frac{X}{T} \rightarrow posición\ del\ objeto$” (ver figura 17). Así, se evidencia el proceso de visualización e interpretación de la velocidad media e instantánea representada como la razón entre la variación de distancia y tiempo. Luego, la génesis semiótica es activada.


La velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo ($V = \frac{v.d}{V.t}$), en cambio la velocidad instantanea es un punto especifico con un tiempo especifico $\frac{X}{T}$ → posición del objeto.

[La velocidad media es el valor entre la variación de la distancia en un intervalo de tiempo (v=$\frac{v \cdot d}{v \cdot t}$), en cambio la velocidad instantánea es un punto específico, con un tiempo específico $\frac{x}{t}$ →posición del objeto]

Figura 17. Producción matemática de D2, Parte 2 - Tarea 10

Si bien la dupla no responde en base a nuestro análisis de las acciones esperadas, ya que representa a las velocidades pedidas como el cociente entre las magnitudes de distancia-tiempo y no involucra un trabajo con pendientes, la dinámica en la génesis semiótica le permite al par organizar la definición de tales velocidades, con lo cual es activado el plano [Sem-Dis].

CONCLUSIONES

Luego de realizar los análisis a las producciones matemáticas de los estudiantes en cada tarea presentada, el ETM nos permitió delimitar y caracterizar el espacio de trabajo matemático de los estudiantes a partir de la articulación e interacción de componentes epistemológicas y procesos cognitivos mediados por el uso de *GeoGebra*. Para presentar de mejor forma esta sección, explicaremos algunas reflexiones que el ETM generó al caracterizar dicho trabajo matemático, para seguidamente puntualizar dificultades y recomendaciones para el aprendizaje de la tasa de variación.

Este estudio evidencia que dar sentido a la noción de tasa de variación media e instantánea parte de un enfoque intuitivo a la idea de variación y cambio (Vrancken y Engler, 2014). Esto se muestra ya que los estudiantes realizan exploraciones e interpretaciones simultaneas a diferentes objetos y/o artefactos como la tabla de valores, fórmula de la variación y velocidad, deslizador, pendiente y vista gráfica de *GeoGebra*, exponiendo así la activación de la génesis semiótica (Silva, 2012; Viseu, 2017) e instrumental (Roorda et al., 2016); sin embargo, percibimos que los aprendizajes de tales enfoques no se dieron de forma inmediata, pues algunas nociones matemáticas (función, planteo y solución de ecuaciones lineales) que se creían como parte de los conocimientos previos de los estudiantes, no fueron movilizados.

Así, podríamos entender un tópico del Cálculo (o Precálculo) como piezas de dominó alineadas, donde cada pieza es un saber matemático o conocimiento previo; la caída de alguna pieza representaría alguna dificultad o conocimiento no aprendido. Estas caídas o rupturas (Artigue,1995) afirman la importancia de las conexiones e interacciones internas entre cada saber matemático (Oktaç y Vivier, 2016) como, por ejemplo, la coordinación de registros de representación en objetos como tangente y límite (Montoya-Delgadillo et al., 2018). Entre tanto, en la búsqueda del discurso matemático, la importancia recae sobre qué conocimientos previos se tienen como herramientas y la experimentación entre tales saberes, aunque esta labor no siempre es suficiente.

Para ilustrar lo anterior, la producción matemática de los estudiantes en la tarea 7 (parte 1) permite justificar la activación de algunas génesis; sin embargo, es posible que algunas de ellas se confundan con otra, tal es el caso de la génesis semiótica y discursiva. Los estudiantes responden a partir de exploraciones y observaciones a las tareas previas considerando la tabla de valores y fórmula de velocidad media. Este hecho permite la dinámica en la génesis semiótica e instrumental, no obstante, las respuestas obtenidas (discurso) son explicaciones de lo sucedido en el registro de representación de lenguaje natural y no se justifican bajo algún conocimiento teóricamente organizado, debido a lo cual la génesis discursiva no fue activada.

En esa dirección, identificamos que la argumentación de justificaciones y definiciones obtenidas por los estudiantes se manifiesta a partir de la exploración y experimentación mediante el uso de artefactos, pero también desde un razonamiento perceptivo que permite validar nociones de aproximación (planos [Ins-Dis] y [Sem-Dis], respectivamente). Aun así, puede resultar difícil trazar una línea que delimite claramente un trabajo matemático que conste de argumentaciones, justificaciones, explicaciones y descripciones.

Refiriéndonos a los paradigmas en el dominio del Análisis (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016), estos permitieron dar cuenta de qué nociones propician el surgimiento de conceptos relacionados a la variación y tasa de variación. No hay que olvidar que nuestra investigación está dirigida a estudiantes de educación secundaria –a diferencia de los trabajos de Roorda et al. (2016) y Villa-Ochoa et al. (2018)– por lo que era de esperarse que se privilegiara, en mayor medida, el paradigma AG.

A pesar de ello, notamos que realizar un trabajo algorítmico basado en nociones nacidas en la física, como lo es la velocidad, permitieron movilizar y privilegiar el paradigma AC. Es decir, los estudiantes priorizan el paradigma AG al realizar interpretaciones basados en la geometría y nociones de variación, especialmente al explorar y caracterizar las gráficas desarrolladas en *GeoGebra*, mientras que el paradigma AC se prioriza principalmente cuando realizan cálculos algorítmicos a partir de nociones de variación y la fórmula de velocidad media.

Teniendo en cuenta la propuesta didáctica de Dolores (2000) y Dolores et al. (2019), así como el estudio de Sánchez-Matamoros et al. (2008), un trabajo matemático con la tasa de variación depende claramente del tipo de función que se considere, sea lineal o cuadrática para determinar la pendiente, velocidad y aceleración. Ahora bien, tal consideración se debe dar bajo una terminología acorde al nivel de estudio sin los conceptos formales que propone el Cálculo, pero introduciendo nociones que hagan referencia a éstos. Tales acciones permitirían a los estudiantes entender definiciones formales económicamente, como la representación de derivada en términos de ε, δ y Δx (Apóstol, 2001; Stewart, 2018).

A pesar que se subraya la importancia y necesidad en el uso de herramientas tecnológicas, coincidimos con Drijvers (2015), Roorda et al. (2016) y Villa-Ochoa et al. (2018), quienes afirman la integración de tal tecnología como parte del quehacer matemático para un conocimiento integral de conceptos desde sus significados y representaciones. De este modo, percibimos que el aprendizaje de la tasa de variación depende particularmente del diseño de una situación de aprendizaje, vale decir las tareas, las cuales estructuren la interpretación y significado de la tasa de variación como velocidad bajo herramientas de *GeoGebra*. Este diseño debe permitir comprender el comportamiento de las representaciones de rectas secantes con sus respectivas pendientes en intervalos cada vez más pequeños (representaciones y signos), propiciando conjeturas sobre ideas de aproximación y límites.

Por otra parte, consideramos que la cantidad de tareas de la situación de aprendizaje presentada debe ser refinada privilegiando el rol del artefacto que propicie argumentaciones válidas basadas en su experimentación. Así, afirmamos que junto al artefacto deslizador, la herramienta zoom (de alejamiento y acercamiento) de *GeoGebra* facilitaría la visualización y comprensión del comportamiento de cada pendiente de recta secante en diferentes intervalos.

En definitiva, la tasa de variación cumple un papel significativo, no sólo como herramienta mediadora de conocimiento entre distintos niveles de educación, sino también para el acceso hacia otras áreas. Es por ello que, al operacionalizar el ETM y subrayar el papel de la tarea y los recursos tecnológicos, concluimos natural asociar y estudiar estas concepciones variacionales en áreas como en la Economía o la Estadística, haciendo énfasis en los cambios de dominio y resaltando la función de los paradigmas privilegiados en el trabajo matemático. Al mismo tiempo, alertamos que en el Cálculo se definen ciertas reglas que guían un trabajo matemático basado en procesos algorítmicos –aunque sobre estos procesos no se reflexione– dejando de lado los procesos de prueba y demostración.

Recomendamos, para futuras investigaciones, cuestionar: ¿de qué forma los recursos tecnológicos guían el proceso de prueba en la génesis discursiva y favorecen que emerjan los diferentes paradigmas en el dominio del Análisis?

Agradecimientos

A la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en especial al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP). A la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA) y a la Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG).

Referencias

Andrade, F., Oliveira, A. y Esquincalha, A. (2020). O que dizem os professores das licenciaturas em matemática sobre suas práticas e percepções em Pré-cálculo? *Educação Matemática Pesquisa, 22*(2), 573-603. http://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p573-603

Apóstol, T. (2001). *Cálculus Vol.1. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al Álgebra lineal.* (2nd ed.). Editorial Reverté.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. (2000). El Precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Números* (43 y 44), 259-262.

Collingwood, D., Prince, K. y Conroy, M. (2016). *Precalculus*. Universidad de Washington.

Córdoba, Y., Ruiz, Y. y Rendón C. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *RECME: revista colombiana de matemática educativa*, *1*(1), 125-130. https://oa.mg/work/2763201728

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 155-181). Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Rivera, M. y García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(3), 369-389. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050

Dolores, C., Rivera, M. y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *120*(2), 104-115. https://doi.org/10.1111/ssm.12389

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). En S. Cho (ed.) *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 135-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Flores-González, M. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática*, *28*(2), 85-117. https://doi.org/10.24844/EM2802.04

Hernández-Sampieri R., Fernández C. y Baptista P. (2014*). Metodología de la Investigación* (6ª ed.). Mcgraw-Hill.

Hitt, F. (2018). Nuevas tendencias en la enseñanza del Cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista electrónica AMIUTEM*, *2*(2), 1-19.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra* (Versión 5.0) [Software o aplicación móvil]. https://www.geogebra.org

García, M., Gavilán, J. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n3.684

García-Cuéllar, D. y Salazar, J. V. F. (2020). Aproximação Instrumental: sua origem e seu desenvolvimento no Peru. En M. Basniak y S. Rubio-Pizzorno (Coords.), *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na educação matemática: o GeoGebra em foco* (pp. 46-66). Pimenta Cultural. https://doi.org/10.31560/pimentacultural/2020.472.45-66

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de educação matemática, 30*(54), 1-22. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Kidron I. (2019). Calculus Teaching and Learning. En S. Lerman (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_18-2

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043/document

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P.R. Richard (eds) *Mathematical work in educational context. Mathematics education in the digital era*, vol 18 (pp. 3-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17, 29-39. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Ministerio de Educación de Chile (2019). *Plan de estudios para 3° y 4° año medio: Formación general humanístico-científica, técnico-profesional y artística y formación diferenciada humanístico-científica*. Región Metropolitana de Santiago. Mineduc. https://hdl.handle.net/20.500.12365/14415

Miranda, V. y Pluvinage, F. (2014). Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME*, *17*(4-2), 267-286. https://doi.org/10.12802/relime.13.17413

Montoya-Delgadillo, E., Páez, R., Vandebrouck, F. y Vivier L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International journal of research in undergraduate mathematics education*, *4*(1), 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM—the international journal on mathematics education*, *48*(6), 739-754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Oktaç, A. y Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… in research about analysis. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak y J. B. Lagrange (eds.), *The didactics of mathematics: approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (pp. 87-122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_5

Rivera, M. y Dolores, C. (2021). Preconcepciones de pendiente en estudiantes de Educación Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(1), 195-217. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3045

Roorda, G., Vos, P., Drijvers, P. y Goedhart, M. (2016). Solving rate of change tasks with a graphing calculator: A case study on instrumental genesis. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *2*(3), 228-252. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0022-8

Sánchez–Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85–98. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3816

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296. http://hdl.handle.net/11441/16348

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7-15. http://www.jstor.org/stable/40248450

Sierra, M. (2011). Investigación en educación matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173-198. https://revistas.um.es/educatio/article/view/133021/122721

Silva, E. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no ensino médio* [Tesis de Maestria, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo] https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10934

Stewart, J. (2018). *Cálculo Trascendentes Tempranas* (8 ed.). Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo matemáticas para el Cálculo*. (6ª ed.). Cengage Learning.

Ticse, M. (2021). *La tasa de variación de una función real de variable real: trabajo matemático de estudiantes de Educación Secundaria.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/17963

Vandebrouck, F. y Leidwanger, S. (2016). Students' visualization of functions from secondary to tertiary level. En E. Nardi, C. Winsløw y T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the first conference of the international network for didactic research in university mathematics* (pp. 153-162). University of Montpellier and INDRUM.

Villa-Ochoa, J. A., Gonzáles-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y tecnología en el estudio de la tasa de variación instantánea en matemáticas. *Formación Universitaria, 11*(2), 25-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetike, 25*(2), 265-288. http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i2.8649274

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una Introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. H. Shoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV. CBMS issues in mathematics education* (vol. 8, pp. 103-127). American Mathematical Society.

Marco Antonio Ticse Aucahuasi
Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil
marco.ticse@pucp.edu.pe

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
jvflores@pucp.pe

Jorge Luis Vivas Pachas
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
jorge.vivas@pucp.edu.pe

Recibido: marzo, 2022. Aceptado: abril, 2023
doi: 10.30827/pna.v17i4.24258
BY NC ND
ISSN: 1887-3987

High School Students' Mathematical Work on Rate of Change Tasks by Using GeoGebra

Marco Ticse, Jesús Victoria Flores Salazar y Jorge Vivas-Pachas

In the teaching and learning of Calculus, one of the central and current problems is the difficulty of university students transitioning from secondary to higher education. In this situation, the *rate of change* has gained importance because it is considered a fundamental notion in calculus and a tool for mediating knowledge between these levels of education. At the same time, the tasks and the design of digital tools have played a crucial role in promoting mathematical work and balancing epistemic and pragmatic values of the instrumented techniques developed by the students. Therefore, since the importance of the rate of change *per se*, we asked what cognitive processes and epistemological components are immersed in the mathematical production of students when solving tasks with the rate of change using GeoGebra? and how can we describe and organize the articulations between such processes and components? To answer these questions, based on the theory of Mathematical Working Space (MWS), we analyze and characterize the mathematical production of two pairs of Chilean students (15-17 years old) when solving 18 tasks of a learning situation concerning the determination and association of the average and instantaneous velocity of an object with the construction of the slope of the secant line and tangent line to a curve with the support of GeoGebra. Thus, this article presents seven tasks of the learning situation and shows that the students' mathematical workspace is characterized by the articulation and interaction of epistemological components and cognitive processes mediated by tools and artifacts. In addition, it's evident the importance of the intuitive approach to the idea of variation and change to make sense of the notions of average and instantaneous rate of change. Furthermore, in the search for mathematical discourse, the importance depends on what previous knowledge one has as tools and its experimentation, even though it is difficult to draw a line that delimits a mathematical work consisting of arguments, justifications, explanations, and descriptions. Consequently, the learning of the rate of change depends, particularly, on the design of a learning situation that allows one to reflect and understand the behavior of the representations of secant lines with their respective slopes in successively smaller intervals, allowing conjectures on ideas of approximation and limits –even when it is singular to establish proof and demonstration processes–, emphasizing the role of the artifact and technological resources.