SAPIENTIAE: Ciências Sociais, Humanas e Engenharias
Universidade Óscar Ribas, Luanda, Angola
ISSN Versão Impressa 2183-5063 ISSN Versão Digital 2184-061X
Vol. 9 (1). Julho-Dezembro 2023
http://publicacoes.uor.ed.ao/index.php/sapientiae/

ELEMENTOS DA 2-ÁLGEBRA HOMOMÉTRICA E SUAS REPRESENTAÇÕES. PARTE I

Francisco Lubota Bufeca Zau[1]
https://orcid.org/0000-0003-4627-0375

Recebido: 29.03.2023
Aceito: 19.06.2023
Publicado: 15.07.2023

RESUMO
Este artigo apresenta uma proposta científica sobre uma nova álgebra, a 2-Álgebra Homométrica, cujo produto de vectores é denominado 2-produto vectorial homométrico, o qual transforma dois vectores multiplicativos de um espaço vectorial dado em um vector axial deste mesmo espaço vectorial, essencialmente caracterizado como vector axial simultaneamente ortogonal aos dois vectores multiplicativos. Este 2-produto vectorial homométrico cumpre com outras propriedades fundamentais como antissimetria, identidade de Lagrange, não sendo a identidade de Jacobi válida, em geral. Além disso, este 2-produto vectorial homométrico admite o produto vectorial de Gibbs e Heaviside como caso particular que ocorre em espaços vectoriais reais tridimensionais, o que permite afirmar que a 2-Álgebra Homométrica é uma generalização natural da Álgebra de Gibbs e Heaviside para espaços n-dimensionais e para o corpo dos números complexos. Destarte, este trabalho objectiva, em geral, analisar fundamentos científicos da 2-Álgebra Homométrica, suas propriedades, funcionalidades e algumas aplicações na gestão financeira, no contexto de espaços vectoriais homométricos. Para este fim, foi utilizada uma pesquisa de tipologia teórico-exploratória, a qual emprega o método lógico-dedutivo para a conceituação da 2-Álgebra Homométrica, relacionando-a com outras estruturas algébricas, ao mesmo tempo que são identificados os seus principais fundamentos científicos e algumas aplicações no contexto da gestão financeira.
Palavras-chave: 2-Álgebra Homométrica, 2-produto vectorial homométrico, contracção dimensional sistemática, ponto de equilíbrio dinâmico.

Elementos del 2-álgebra homométrica y sus representaciones. Parte I

RESUMEN
Este artículo presenta una propuesta científica sobre una nueva álgebra, el 2-Álgebra Homométrica, cuyo producto vectorial se denomina producto vectorial 2-homométrico, que transforma dos vectores multiplicativos de un espacio vectorial dado en un vector axial de este mismo espacio vectorial, caracterizado esencialmente como vector axial simultáneamente ortogonal a los dos vectores multiplicativos. Este producto homométrico de 2 vectores cumple otras propiedades fundamentales como la antisimetría, la identidad de Lagrange y la identidad de Jacobi no es válida en general. Además, este producto homométrico de 2 vectores admite el producto vectorial de Gibbs y Heaviside como un caso particular que ocurre en espacios vectoriales reales tridimensionales, lo que nos permite afirmar que el álgebra 2-homométrica es una generalización natural del álgebra de Gibbs y Heaviside a espacios n-dimensionales y al cuerpo de números complejos. Por lo tanto, este trabajo tiene como objetivo, en general, analizar los fundamentos científicos del Álgebra 2-Homométrica, sus propiedades, funcionalidades y algunas aplicaciones en la gestión financiera, en el contexto de espacios vectoriales homométricos. Para ello se utilizó una investigación de tipología teórico-exploratoria, que emplea el método lógico-deductivo para la conceptualización del 2-Álgebra Homométrica, relacionándolo con otras estructuras algebraicas, al mismo tiempo que se identifican sus principales fundamentos científicos y algunas aplicaciones en el contexto de la gestión financiera.
Palabras clave: 2-álgebra homométrica, producto vectorial 2-homométrico, contracción dimensional sistemática, punto de equilibrio dinámico.

[1] Doutor em Ciências da Administração pelo Programa de Pós-Graduação da Universidad de De Desarrollo Sustentable (UDS). Chefe do Departamento de Investigação Científica, Inovação, Empreendedorismo e Pós-Graduação do Instituto Superior Politécnico do Cazenga (ISPOCA). zaufrancisco@gmail.com

Elements of homometric 2-algebra and their representations
Part I

ABSTRACT
This paper presents a scientific proposal on a new algebra, the Homometric 2-Algebra, whose product of vectors is called homometric vector 2-product, which transforms two multiplicative vectors of a given vector space into an axial vector of this same vector space, essentially characterized as an axial vector simultaneously orthogonal to the two multiplicative vectors. This homometric vector 2-product fulfills other fundamental properties such as antisymmetry, Lagrange identity, and Jacobi identity is not valid, in general. Moreover, this homometric vector 2-product admits the Gibbs and Heaviside vector product as a particular case that occurs in three-dimensional real vector spaces, which allows us to state that the Homometric 2-Algebra is a natural generalization of the Gibbs and Heaviside algebra for n-dimensional spaces and for the body of complex numbers. Thus, this paper aims, in general, to analyze the scientific foundations of Homometric 2-Algebra, its properties, functionalities and some applications in financial management, in the context of homometric vector spaces. To this end, research of theoretical-exploratory typology was used, which employs the logical-deductive method for the conceptualization of Homometric 2-Algebra, relating it to other algebraic structures, while its main scientific foundations and some applications in the context of financial management are identified.
Keywords: Homometric 2-Algebra, homometric vector 2-product, systematic dimensional contraction, dynamic break-even point.

Introdução

A Álgebra Moderna nasceu na primeira metade do século passado sob um enfoque especial de "estudar um conjunto, não pela natureza de seus elementos, mas sim, pelas propriedades de suas operações (…). Neste contexto, a ênfase está na estrutura algébrica do conjunto, isto é, nos axiomas satisfeitos pelas operações do conjunto." (Janesch & Taneja, 2011, p. 18).
Destes autores se percebe que a vantagem da abordagem acima está no facto de se obter propriedades para muitos conjuntos de uma só vez, devendo estes conjuntos ter operações que satisfaçam axiomas previamente estabelecidos. Exemplo, o conhecimento de propriedades obtidas por axiomas de um anel possibilita identificar conjuntos que satisfazem estes axiomas, os quais podem integrar elementos de natureza variada.
Nesta visão, a 2-Álgebra Homométrica surge como uma proposta científica que acrescenta – a este ideal da Álgebra Abstracta de enfatizar as estruturas algébricas dos conjuntos e estudar estes conjuntos pelas propriedades das suas operações – as propriedades que podem caracterizar cada conjunto considerado, isto sim, estudos de propriedades das operações definidas em conjuntos não excluem a possibilidade de se contextualizar tais conjuntos através da definição de um vector de propriedades ou vector característico aqui denominado de vector-inicial.
Assim, este artigo apresenta esta proposta científica relativa a uma nova álgebra – a 2-Álgebra Homométrica – cujo produto de vectores, denominado 2-produto vectorial homométrico, gera um terceiro vector simultaneamente ortogonal aos dois vectores dados, válido em espaços vectoriais reais ou complexos n-dimensionais. Assim, urge natural generalizar este produto vetorial clássico, definido por Gibbs e Heaviside, para espaços vectoriais n-dimensionais reais ou complexos, colmatando limitações deste produto clássico confinado apenas em espaços vectoriais reais tridimensionais.
Nesta conformidade, a 2-Álgebra Homométrica não pode ser confundida com álgebras afins, como Álgebras de Lie e Álgebra Exterior. As principais diferenças entre estas estruturas algébricas são abordadas no item 1.4, o qual circunscreve a 2-Álgebra Homométrica dentre as álgebras mais afins, como as referenciadas neste parágrafo. Destarte, a álgebra mais próxima da 2-Álgebra Homométrica é a Álgebra de Gibbs e Heaviside destacada anteriormente e válida apenas em espaços vectoriais reais tridimensionais, a qual, tal como já acenado, é um caso particular desta 2-Álgebra Homométrica para estes espaços vectoriais reais tridimensionais.
Por conseguinte, este trabalho objectiva, em geral, analisar fundamentos científicos da 2-Álgebra Homométrica, suas propriedades, funcionalidades e algumas aplicações na gestão financeira, no

contexto de espaços vectoriais homométricos. Para este fim, foi empregue uma pesquisa, quanto aos objectivos, de tipologia teórico-exploratória, a qual enfatiza o método lógico-dedutivo, visando conceituar a 2-Álgebra Homométrica e descrever as suas principais propriedades, relacionando-a com outras estruturas algébricas, ao mesmo tempo que se identifica os seus principais fundamentos científicos e aplicações na gestão financeira.

Referencial teórico

Tal como será abordado mais adiante, a 2-Álgebra Homométrica pode ser compreendida como uma generalização natural da Álgebra de Gibbs e Heaviside para espaços vectoriais n-dimensionais e para o corpo dos números complexos, o que permite observar que, nos espaços vectoriais tridimensionais, a 2-Álgebra Homométrica comporta-se como esta Álgebra usual dos espaços euclidianos tridimensionais. Esta constatação exprime o facto segundo o qual a Álgebra de Gibbs e Heaviside é um caso particular da 2-Álgebra Homométrica, tal como será mais tarde demonstrado.

Assim, considerando uma base canônica do espaço vectorial euclidiano tridimensional $B = \langle \boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_2 \rangle$ ou $B = \langle \boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_3 \rangle$, para a qual $\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, tem-se o vector axial $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}$ abaixo, obtido a partir deste vector axial 2-produto homométrico de espaços vectoriais tetradimensionais, considerando a coordenada x_4 e seu versor $\boldsymbol{e}_4$ inexistentes e anulando as coordenadas a_4 e b_4, ou seja, $\forall \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v} = (a_2 b_3 - b_2 a_3;\ a_3 b_1 - a_1 b_3;\ a_1 b_2 - a_2 b_1;\ a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

De facto, vê-se desta expressão acima que o produto vectorial $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}$ é um caso particular do 2-produto vectorial homométrico $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}$, que acontece em espaços vectoriais reais euclidianos tridimensionais onde este produto vectorial usual está definido. E, esta observação vale para todas as identidades e expressões matemáticas que envolvem este produto vectorial, as quais se tornam válidas para o 2-produto vectorial homométrico no contexto destes espaços vectoriais reais tridimensionais.

Entretanto, a 2-Álgebra Homométrica não pode ser confundida com outras estruturas algébricas, como por exemplo, Álgebras de Lie e Álgebra Tensorial. Nas linhas textuais abaixo serão analisadas, sumariamente, algumas diferenças e semelhanças entre os produtos destas álgebras em relação ao 2-produto vectorial homométrico. Nesta conformidade, uma álgebra de Lie, sobre um corpo $\mathbb{K}$, pode ser definida como um espaço vectorial $\mathfrak{g}$ que integra uma operação $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ (x; y) \mapsto [x, y], \forall x, y \in \mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, e que satisfaz os seguintes axiomas:

BILINEARIDADE. Para $x, y, z, t \in \mathfrak{g}$, vale:

$$[x + y, z + t] = [x, z] + [x, t] + [y, z] + [y, t];$$

ANTISSIMETRIA. Para $x, y \in \mathfrak{g}$, vale:

$$[x, y] = -[y, x];$$

IDENTIDADE DE JACOBI. Para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$, vale:

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0\,.$$

Tal como será observado mais adiante, o 2-produto vectorial homométrico difere deste colchete de Lie em quatro aspectos, considerando um corpo $\mathbb{K}$: antissimetria, ortogonalidade, identidade de Lagrange e identidade de Jacobi. As alíneas que se seguem apresentam, de forma simplista mas ilucidativa, as principais diferenças dos respectivos produtos destas álgebras em relação ao 2-produto vectorial homométrico.

A propriedade de antissimetria que aparece na definição de Álgebra de Lie é, no contexto da 2-Álgebra Homométrica, uma consequência da propriedade de bilinearidade do 2-produto vectorial homométrico;

A ortogonalidade é uma propriedade que define a 2-Álgebra Homométrica, tal que o vector axial 2-produto homométrico é simultaneamente ortogonal aos dois vectores multiplicativos, enquanto que no contexto de Álgebra de Lie a ortogonalidade não define explicitamente o colchete de Lie;

A identidade de Lagrange, generalizada ao corpo dos números complexos, é uma condição essencial da definição do 2-produto vectorial homométrico e, juntamente com o 2-produto interno homométrico, permite definir a expressão numérica do vector axial 2-produto homométrico, enquanto que a identidade de Lagrange não faz parte da definição de uma álgebra de Lie;

A identidade de Jacobi, que faz parte da definição de uma álgebra de Lie, não é válida, em geral, na 2-Álgebra Homométrica, isto sim, a identidade de Jacobi é verdadeira apenas em espaços vectoriais homométricos tridimensionais e tetradimensionais, por exemplo.

Para além da Álgebra de Lie, a 2-Álgebra Homométrica reserva certas semelhanças com a Álgebra Exterior, cujo produto de álgebra é o produto exterior, denotado por $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, o qual é entendido como um tensor de segunda ordem chamado bivector ou 2-vector, definido conforme segue abaixo:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}\ .$$

O bivector $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ satisfaz os axiomas que se seguem, considerando um corpo $\mathbb{K}$ e vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ de um espaço vectorial $\mathbb{V}^n$ e uma constante real a_1:

$$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}; \quad (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}\ ;$$

$$a_1(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = (a_1\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge (a_1\boldsymbol{v});$$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0};$$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}\ .$$

O 2-produto vectorial homométrico também satisfaz estas propriedades acima, sendo os dois últimos axiomas consequências da propriedade de bilinearidade definida neste primeiro axioma acima, no contexto do 2-produto vectorial homométrico, tal como já referenciado. Entrentato, existem claras diferenças, para além desta constatação, entre o produto exterior e o 2-produto vectorial homométrico, conforme se observa a seguir:

A expressão bivector ou 2-vector diz respeito ao produto externo, enquanto a expressão 2-produto associa-se ao produto homométrico: 2-vector refere-se a um objecto geométrico de dimensão 2, resultante do produto exterior entre dois vectores, enquanto que 2-produto refere-se ao produto de 2 vectores do qual resulta um terceiro vector, do mesmo espaço vectorial dos respectivos vectores multiplicativos, e que é ortogonal a estes dois vectores multiplicativos;

O resultado do produto exterior entre dois vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{V}^n$ é um bivector ou 2-vector, denotado por $\boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{v}_1$, enquanto que o resultado da operação de 2-produto vectorial homométrico é um vector axial, denotado por, $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{H}^n$;

É uma condição necessária, para que um tensor antissimétrico de segunda ordem seja um 2-vector, a validade da identidade de Jacobi para os seus componentes, enquanto que para o 2-produto vectorial homométrico a identidade de Jacobi não é, em geral, válida, excepto em casos específicos associados a algumas dimensões dos espaços vectoriais homométricos;

O espaço dos 2-vectores, denotado por $\wedge^2 \mathbb{V}$, é o subespaço de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ $(\otimes^2 \mathbb{V})$, de tensores antissimétricos contravariantes de segunda ordem, gerados pela base $B = \langle \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \rangle$, e consistem de elementos de tipo $(a\boldsymbol{u}) \wedge (b\boldsymbol{v})$, cuja dimensão é dada pela expressão $dim \wedge^2 \mathbb{H} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. No entanto, no contexto de 2-produto vectorial homométrico, $B = \langle \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \rangle$ não gera propriamente bases de outros espaços vectoriais de diversas dimensões, uma vez que o 2-produto vectorial homométrico constitui uma operação que produz, a partir de dois vectores dados, um só vector do mesmo espaço vectorial a que pertencem os dois vectores multiplicativos.

Portanto, a 2-Álgebra Homométrica constitui uma estrutura algébrica específica, com características próprias e que difere estruturalmente das demais álgebras, tais como, Álgebra de Gibbs e Heaviside, Álgebras de Lie, Álgebra Tensorial, dentre outras.

Metodologia

O presente artigo constitui-se como uma proposta científica relativa a uma nova álgebra, denominada 2-Álgebra Homométrica, e sua aplicação na gestão financeira. Assim, uma pesquisa

Como citar: Zau, F. (2023). Elementos da 2-álgebra homométrica e suas representações. Parte I. *Sapientiae* (9) 1, 31-44.
www.doi.org/10.37293/sapientiae91.04

de tipologia teórico-exploratória e o método lógico-dedutivo foram empregues neste estudo, visando conceituar esta 2-Álgebra Homométrica, relacionando-a com outras estruturas algébricas, ao mesmo tempo em que são descortinados os seus principais fundamentos científicos e certas aplicações na gestão financeira.
Destarte, quanto aos métodos de procedimentos foi empregue a técnica bibliotráfica para a garantia de informações relavantes à revisão de literatura a respeito de álgebras afins a este campo de 2-Álgebra Homométrica, bem como técnicas demonstrativas que permitiram não só o desenvolvimento de demonstrações de proposições e teoremas a partir de axiomas, definições, como também a visualização de várias ideias expostas ao longo de toda a abordagem sobre a 2-Álgebra Homométrica, por meio de exemplos ilucidativos.

Principais resultados e discussão

Noção Intuitiva de 2-Álgebra Homométrica

A Álgebra vectorial de Gibbs e Heaviside constrói-se em torno de um produto entre dois vectores, o produto vectorial usual, denotado por $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}$, válido para vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}$ de um espaço vectorial real tridimensional (Silva, 2002), partindo do produto de quaterniões formulado por Hamilton (Hamilton, 1899). Tal produto vectorial obedece os axiomas que se seguem, para vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$:
BILINEARIDADE. Para vetores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$:
$\boldsymbol{v}_0 \times (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2$ e $(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1) \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$;
ORTOGONALIDADE. Para quaisquer vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}$ é simultaneamente ortogonal aos vectores multiplicativos $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$;
EXPRESSÃO NUMÉRICA. Para vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ e ângulo real θ entre estes vectores, tem-se a seguinte expressão numérica para o vector $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}$:

$$\|\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}_0\|\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta \,, \theta \in \mathbb{R} \,.$$

Este produto vectorial cumpre com várias identidades, como por exemplo as identidades de Lagrange e de Jacobi, e constitui-se como uma linguagem matemática passível de sustentar toda uma teoria de álgebra e cálculo vectoriais que integra conceitos e operações cruciais na ciência e na engenharia, como integrais de linha e superfícies, orientações de espaços vectoriais, força magnética, orientações de superfícies, rotacional, laplaciano, momentos de forças, teorema de Green, teorema de Stokes, equações de Maxwell, dentre outras benfeitorias técnico-científicas.
Destarte, toda esta importância do produto vectorial de Gibbs e Heaviside e sua limitação a espaços vectoriais reais e tridimensionais legitimam inquietações como:
Se $B = \langle \boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \rangle$ exprime a base canônica do $\mathbb{R}^3$, não é legítimo questionar sobre forma, conteúdo e significado desta base canônica em $\mathbb{R}^n$?
Atendendo a forma e conteúdo desta base canônica $B = \langle \boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \rangle$ e considerando o produto $\otimes\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ como o equivalente, em um espaço vectorial $\mathbb{H}^n$, do produto vectorial usual $(\times)\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de espaços vectoriais tridimensionais, uma base $B = \langle \boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_3; \dots; \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{n-1} \rangle$, com $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{n-1} = \boldsymbol{e}_n$, é válida em $\mathbb{H}^n$?
Por que é que objectos de espaços vectoriais n-dimensionais, com $n > 3$, não podem ser representados nem visualizados geometricamente em um espaço vectorial real euclidiano?
Não seria útil manipular objectos representados geometricamente em espaços vectoriais de dimensões maiores do que 3?
O Universo conhecido é um espaço tridimensional ou n-dimensional? Como garantir uma resposta objectiva e verificável para esta questão?
Não seria justo visualizar e manipular rotacionais, equações de Maxwell, momentos de força, integrais de superfície, dentre outros objectos, dentro de espaços vectoriais de dimensões arbitrárias?
Álgebra e Cálculo vectoriais tiveram um desenvolvimento gigantesto nos finais do século XIX e princípios do século XX. Durante este período foram produzidos ou consolidados os

Como citar: Zau, F. (2023). Elementos da 2-álgebra homométrica e suas representações. Parte I. *Sapientiae* (9) 1, 31-44.
www.doi.org/10.37293/sapientiae91.04

conhecimentos fundamentais hoje conhecidos sobre o formalismo vectorial, o qual ficou limitado ao espaço tridimensional, muito por conta de aplicações físicas incontestáveis, as quais continuam cada vez mais vivas actualmente. Não é legítimo estender este formalismo a espaços n-dimensionais e verificar como seriam as aplicações físicas e de outra natureza?
Estas e outras inquietações relacionadas justificam uma busca por novos formalismos vectoriais, passíveis de estender os resultados já conhecidos nos espaços vectoriais reais tridimensionais para espaços vectoriais n-dimensionais, envolvendo também corpos numéricos mais gerais, como o corpo dos números complexos.

Definição de 2-Álgebra Homométrica

Este trabalho foca-se no estudo da 2-Álgebra Homométrica, o seu produto vectorial característico, suas especificidades, sendo esta primeira parte centrada em conceito e definição da 2-Álgebra Homométrica e seu produto. Frisa-se que a Álgebra Linear Homométrica é um campo específico da Álgebra Homométrica, dedicado ao estudo de espaços vectoriais homométricos, suas propriedades, nuances e funcionalidades. Assim, para começar a discussão sobre a Álgebra Homométrica, segue, na definição 1 abaixo, o conceito formal deste campo de estudo.
DEFINIÇÃO 1. Considere-se um espaço vectorial $\mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ dos números complexos ou reais e sejam $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$ vectores deste espaço. A 2-Álgebra Homométrica, denotada por $\mathbb{h}_2$, consiste de um espaço vectorial $\mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$ munido de uma aplicação bilinear $\circledast\colon \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$, chamada 2-produto vectorial homométrico, que tranforma os vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$ no vector $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$, tal que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:
BILINEARIDADE. Para vetores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$ e escalares $a, b \in \mathbb{K}$:
$\boldsymbol{v}_0 \circledast (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}_2$ e $(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1) \circledast \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \circledast \boldsymbol{v}_2$;
ORTOGONALIDADE. Para quaisquer vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}$ é simultaneamente ortogonal aos vectores multiplicativos $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$;
IDENTIDADE DE LAGRANGE. Para vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{n}$, 2-produto interno homométrico $\boldsymbol{v}_0 \odot \boldsymbol{v}$ e 2-produto vectorial homométrico $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}$, tem-se a seguinte identidade de Lagrange:

$$\|\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}\|^2 + (\boldsymbol{v}_0 \odot \boldsymbol{v})^2 = (\|\boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v}\|)^2 .$$

Resulta desta definição 1, em especial, da identidade de Lagrange, que o módulo do vector axial 2-produto homométrico é dado pela seguinte igualdade, considerando o ângulo $\theta = \theta_\chi + \theta_\psi$ entre os vectores $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$:

$$\|\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v}\| \sin(\theta_\chi + \theta_\psi) .$$

No contexto destas três propriedades desta definição 1, várias propriedades operatórias do 2-produto vectorial homométrico podem ser obtidas, tal como seguirá nos próximos itens. Por exemplo e tal como será abordado mais adiante, a partir da propriedade de bilinearidade se pode demonstrar a propriedade de antissimetria, uma discussão a ter lugar no item sobre as propriedades do 2-produto vectorial homométrico.
Ainda nesta definição 1, o índice 2 presente no símbolo $\mathbb{h}_2$ faz referência ao número 2 de vectores envolvidos no respectivo produto da álgebra $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}$, da mesma forma como acontece com a expressão 2-álgebra, 2-produto ou 2-espaço vectorial. Assim, frisa-se que o produto vectorial homométrico admite a presença de k vectores, para $k = 2, 3, 4, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$, o que implica nas denominações de K-Álgebra, k-produto, k-espaço vectorial, dentre outras denotações.
DEFINIÇÃO 2. Seja $\mathbb{h}_2$ uma 2-álgebra homométrica. Uma 2-subálgebra homométrica de $\mathbb{h}_2$ é um subconjunto $\mathbb{S}_2$ de $\mathbb{h}_2$, ou seja, $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{h}_2$, tal que $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_2$, para quaisquer $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_2$.
O símbolo $\mathbb{S}_2$ que denota uma 2-subálgebra de $\mathbb{h}_2$ nesta definição 2 integra o índice 2 para indicar o número de vectores envolvidos no produto vectorial homométrico que define a respectiva 2-álgebra homométrica, tal como já referenciado no contexto do algarismo 2 presente no símbolo $\mathbb{h}_2$.

Considerando ainda esta definição 2, a 2-subálgebra $\mathbb{S}_2$ é ela própria uma 2-álgebra homométrica em relação às restrições impostas pelas operações definidas em $\mathbb{h}_2$, ou seja, $\mathbb{S}_2$ é uma 2-álgebra homométrica em si, com respeito ao 2-produto vectorial homométrica definido em $\mathbb{h}_2$ e todas as restrições que as suas propriedades impõem.

DEFINIÇÃO 3. Sejam $\mathbb{h}_{21}$ e $\mathbb{h}_{22}$ 2-álgebras homométricas quaisquer. Uma aplicação $h: \mathbb{h}_{21} \to \mathbb{h}_{22}$ é denominada morfismo de 2-álgebras homométricas se é uma aplicação linear, satisfazendo:

$$h(\boldsymbol{u} \circledS \boldsymbol{v}) = [h(\boldsymbol{u})] \circledS [h(\boldsymbol{v})] \, .$$

Um morfismo h bijectivo denomina-se isomorfismo de 2-álgebras $\mathbb{h}_{21}$ e $\mathbb{h}_{22}$. Caso exista um isomorfismo entre as 2-álgebras $\mathbb{h}_{21}$ e $\mathbb{h}_{22}$, diz-se que estas 2-álgebras são isomorfas, o que simbolicamente é denotado por $\mathbb{h}_{21} \cong \mathbb{h}_{22}$. Esta abordagem sobre morfismos e todas as suas especificidades, como isomorfismos e automorfismos, será tratada em outras ocasiões, aquando da abordagem de categorias homométricas.

Propriedades do 2-produto vectorial homométrico

O 2-produto vectorial homométrico admite uma variedade de propriedades para além daquelas que o definem, as quais já foram consideradas anteriormente. Neste item serão analisadas algumas destas propriedades, sobretudo aquelas que participam directamente da sua operacionalização, tanto como vector independente de sistemas de coordenadas, quanto como vector associado a sistema de coordenadas.

TEOREMA 1. Considere-se dois vectores multiplicativos $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}$ e respectivo vector de variação $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$. Então, a seguinte igualdade entre produtos vectoriais homométricos é verdadeira:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledS (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se uma representação geométrica que envolve estes vectores $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}$ e $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$. Tomando ângulos como θ, entre os vectores $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}$, α_1, entre os vectores $\boldsymbol{v}$ e $\Delta \boldsymbol{v}$, α_2, entre os vectores $\boldsymbol{v}_0$ e $\Delta \boldsymbol{v}$, tem-se, considerando a lei dos senos aplicada ao triângulo formado por estes três vectores:

$$\frac{\|\boldsymbol{v}_0\|}{\sin \alpha_1} = \frac{\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\|}{\sin \theta} = \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\sin \alpha_2} \qquad (1).$$

Considerando a identidade de Lagrange, tem-se:

$$\|\boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v}\| \sin \theta \quad \text{e} \quad \|\boldsymbol{v}_0 \circledS (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)\| = \|\boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\| \sin \alpha_2 \qquad (2).$$

Considerando as igualdades 1, segue, tal como se queria demonstrar:

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\| \sin \alpha_2 = \|\boldsymbol{v}\| \sin \theta \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{v}_0 \circledS (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)\| = \|\boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v}\| \sin \theta$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_0 \circledS (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} \, .$$

TEOREMA 2. Considere-se um vector qualquer $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{H}$. O 2-produto vectorial homométrico deste vector consigo mesmo é igual ao vector nulo, ou seja:

$$\boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Do teorema 1 se sabe que

$$\boldsymbol{v}_k \circledS (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v} \, .$$

Desenvolvendo o membro esquerdo desta igualdade e considerando a propriedade de bilinearidade desta operação de 2-produto vectorial homométrico, tem-se, tal como se queria demonstrar:

$$\boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; -\boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{v}_k \circledS \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \, .$$

TEOREMA 3. Sejam $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}$ vectores de $\mathbb{H}^n$. O 2-produto vectorial homométrico é uma operação para a qual é válida a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledS (k\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} \, .$$

DEMONSTRAÇÃO. Considerando a propriedade de bilinearidade, tem-se, tal como se queria demonstrar:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledS (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} + \cdots + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} + \cdots + \boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} \Rightarrow \; \boldsymbol{v}_0 \circledS (k\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{v}_0 \circledS \boldsymbol{v} \, .$$

TEOREMA 4. Sejam considerados os vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$. O 2-produto vectorial homométrico é uma operação antissimétrica, ou seja:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \circledast \boldsymbol{v}_0 \,.$$

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta a propriedade de bilinearidade que define o 2-produto vectorial homométrico, segue:

$$(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}) \circledast (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \circledast \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v} \circledast \boldsymbol{v} \,.$$

Conforme o teorema 2, tem-se abaixo, tal como se queria demonstrar:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \circledast \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \circledast \boldsymbol{v}_0 \,.$$

O vector 2-produto homométrico pode ser obtido considerando uma base canônica de um sistema de coordenadas cartesianas associado a um espaço organizacional de dimensão finita, multiplicando dois vectores quaisquer deste sistema de coordenadas, em conformidade com a análise presente no teorema 5 que se segue abaixo.

TEOREMA 5. Sejam considerados dois quaisquer vectores multiplicativos $\boldsymbol{v}_0 = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$ tomados em uma base canônica $B = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ de $\mathbb{H}^n$. Então, demonstra-se que o vector 2-produto homométrico $\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v}$ pode ser obtido efectuando a multiplicação destes vectores através dos seus componentes, ou seja:

$$\boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(\begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_j \right)$$

$$\Leftrightarrow (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n) \circledast (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(\begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_j \right).$$

DEMONSTRAÇÃO. Multiplicando este membro direito, segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \; = \; & a_1b_1\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_1 + a_1b_2\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_2 + a_1b_3\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_1b_n\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_n + a_2b_1\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_1 + \\ & + a_2b_2\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_2 + a_2b_3\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_2b_n\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_n + a_3b_1\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_1 + a_3b_2\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_2 + a_3b_3\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_3 \\ & + \cdots + a_3b_n\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_n + \cdots + a_nb_1\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_1 + a_nb_2\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_2 + +a_nb_3\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_nb_n\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

Atendendo ao teorema 2, tem-se $\boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_k = 0$. Daí, segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \; = \; & a_1b_2\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_2 + a_1b_3\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_1b_n\boldsymbol{e}_1 \circledast \boldsymbol{e}_n + a_2b_1\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_1 + a_2b_3\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_3 + \\ & + \cdots + a_2b_n\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_n + a_3b_1\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_1 + a_3b_2\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_3b_n\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_n + \cdots + a_nb_1\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_1 \\ & + a_nb_2\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_2 + a_nb_3\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_nb_{n-1}\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_{n-1}. \end{aligned}$$

Considerando o teorema 4, este membro direito pode ser reorganizado:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \; = \; & (a_2b_1 - a_1b_2)\boldsymbol{e}_2 \circledast \boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \\ & + (a_nb_1 - a_1b_n)\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_1 + (a_3b_2 - a_2b_3)\boldsymbol{e}_3 \circledast \boldsymbol{e}_2 + \cdots + (a_nb_2 - a_2b_n)\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_2 + \\ & + \cdots + (a_nb_3 - a_3b_n)\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + (a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_i)\boldsymbol{e}_n \circledast \boldsymbol{e}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} \; = \; & \sum_{k=2}^{n} (a_kb_1 - a_1b_k)\boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_1 + \sum_{k=3}^{n} (a_kb_2 - a_2b_k)\boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_2 + \\ & + \sum_{k=4}^{n} (a_kb_3 - a_3b_k)\boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots + \sum_{k=n}^{n} (a_kb_{n-1} - a_{n-1}b_k)\boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_n \,. \end{aligned}$$

Considerando $a_kb_j - a_jb_k = \begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix}$, tem-se para a igualdade acima:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 \circledast \boldsymbol{v} = & \sum_{k=2}^{n} \begin{vmatrix} a_k & a_1 \\ b_k & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_1 + \sum_{k=3}^{n} \begin{vmatrix} a_k & a_2 \\ b_k & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_2 + \sum_{k=n}^{n} \begin{vmatrix} a_k & a_3 \\ b_k & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_3 + \cdots \\ & + \sum_{k=n}^{n} \begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \circledast \boldsymbol{e}_{n-1} \,. \end{aligned}$$

O membro direito desta igualdade é constituído por uma soma que vai de 1 a $n-1$ parcelas, de outras somas que vão de $j+1$ a n parcelas, tal que resulta desta constatação, conforme se queria demonstrar:

$$\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(\begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_j \right) =$$

$$= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n) \otimes (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n).$$

Esta expressão permite observar que os componentes do vector 2-produto homométrico são constituídos por números da forma $\Delta x_{kj} = \begin{vmatrix} a_k & a_j \\ b_k & b_j \end{vmatrix}$. Tais números podem ser obtidos a partir de sistemas lineares de duas equações. Ademais, o cálculo de $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$ usando esta expressão do teorema 5 requer o cálculo de 2-produto homométrico de vetores unitários. Assim, os componentes do vetor $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$ podem ser obtidos através de um sistema linear homogéneo de 2 equações com n incógnitas, usando a definição 1, ou seja, considerando vectores $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \dots;\ x_n)$, $\boldsymbol{v}_0 = (a_1;\ a_2;\ a_3; \dots;\ a_n)$, $\boldsymbol{v} = (b_1;\ b_2;\ b_3; \dots; b_n)$:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0 \\ \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots + b_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Sabe-se que o conjunto-solução deste sistema linear homogéneo é um subespaço do $\mathbb{H}^n$, ou seja, há infinitas soluções para este sistema linear homogénio 3, pelo que o vector axial $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$ não seria um objecto único, porque teria infinitos componentes. Assim, urge identificar uma maneira de definir componentes para o vector axial $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$, de tal modo que sejam únicos. O teorema 2.6 abaixo dá um passo nesta direcção, ao demonstrar que os componentes do vetor $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$ são da forma $\Delta x_1;\ \Delta x_2; \Delta x_3; \dots; \Delta x_{n-1}; \Delta$, ou seja, somas de determinantes 2×2 constituídos por componentes dos vetores $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}_1$.

TEOREMA 2.6. Considere-se os vectores $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^n$. Os componentes do vetor axial $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$, tomados na base canônica $B = (\boldsymbol{e}_1;\ \boldsymbol{e}_2;\ \boldsymbol{e}_3; \dots;\ \boldsymbol{e}_n)$, são soluções do sistema linear homogéneo (2.3) se existem igualdades

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{\Delta x_1}{\Delta};\ \frac{x_2}{x_n} = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \dots;\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta};\ x_n = \Delta, \forall \Delta \neq 0, \qquad \text{tais que:}$$

$$\begin{cases} a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + a_3\Delta x_3 + \cdots + a_{n-1}\Delta x_{n-1} + a_n\Delta = 0 \\ \\ b_1\Delta x_1 + b_2\Delta x_2 + b_3\Delta x_3 + \cdots + b_{n-1}\Delta x_{n-1} + b_n\Delta = 0 \end{cases}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Considerando o sistema linear homogéneo (2.3) e dividindo as k equações por $x_n \neq 0$, tem-se conforme segue:

$$\begin{cases} a_1\dfrac{x_1}{x_n} + a_2\dfrac{x_2}{x_n} + a_3\dfrac{x_3}{x_n} + \cdots + a_{n-1}\dfrac{x_{n-1}}{x_n} = -a_n \\ b_1\dfrac{x_1}{x_n} + b_2\dfrac{x_2}{x_n} + b_3\dfrac{x_3}{x_n} + \cdots + b_{n-1}\dfrac{x_{n-1}}{x_n} = -b_n \end{cases}. \quad (4)$$

Substituindo as igualdades do teorema 2.6 neste sistema linear (4), segue:

$$\begin{cases} a_1\dfrac{\Delta x_1}{\Delta} + a_2\dfrac{\Delta x_2}{\Delta} + a_3\dfrac{\Delta x_3}{\Delta} + \cdots + a_{n-1}\dfrac{\Delta x_{n-1}}{\Delta} = -a_n \\ b_1\dfrac{\Delta x_1}{\Delta} + b_2\dfrac{\Delta x_2}{\Delta} + b_3\dfrac{\Delta x_3}{\Delta} + \cdots + b_{n-1}\dfrac{\Delta x_{n-1}}{\Delta} = -b_n \end{cases} \quad (5).$$

A partir deste sistema se pode concluir, tal como se queria demonstrar, que $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3, \dots,$ $\Delta x_{n-1},\ \Delta$ são soluções do sistema linear homogéneo (3), ou seja:

$$\begin{cases} a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + a_3\Delta x_3 + \cdots + a_{n-1}\Delta x_{n-1} + a_n\Delta = 0 \\ b_1\Delta x_1 + b_2\Delta x_2 + b_3\Delta x_3 + \cdots + b_{n-1}\Delta x_{n-1} + b_n\Delta = 0 \end{cases}.$$

TEOREMA 7. Sejam $\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^n$. Os componentes do vetor $\boldsymbol{v_0} \circledR \boldsymbol{v}$ são únicos e somente podem ser calculados reduzindo sistematicamente o número de incógnitas do associado sistema linear homogéneo, de $n = n$ para $n = 3$, para quaisquer duas equações lineares deste sistema homogéneo.

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se o sistema linear homogéneo (3) e as igualdades do teorema 6. Então, o sistema linear 5 tem solução única que pode ser facilmente obtida se for transformado em um sistema de Cramer. Entretanto, o teorema de Cramer impõe que este sistema 5 deve ter o número de equações igual ao número de incógnitas, de tal modo que (3) é sistema de Cramer se:

O número de incógnitas reduzir até $n = 2$;

Este sistema (3) transformar-se de um sistema linear homogéneo para um sistema linear não-homogéneo.

Para transformar este sistema homogéneo em um Sistema de Cramer (Hoffman & Kunze, 1971; Printer, 2010), deve-se primeiro reduzir o número de incógnitas até $n = 3$ e, depois, transformá-lo num sistema linear não-homogéneo, conforme segue:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3x_3 / \div x_3 \neq 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = -b_3x_3 / \div x_3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\dfrac{x_1}{x_3} + a_2\dfrac{x_2}{x_3} = -a_3 \\ b_1\dfrac{x_1}{x_3} + b_2\dfrac{x_2}{x_3} = -b_3 \end{cases}. (5)$$

Assim, há números $\Delta,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2, \forall\Delta \neq 0$, tais que, como se queria demonstrar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};\ \frac{x_1}{x_3} = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix};\ \frac{x_2}{x_3} = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}.$$

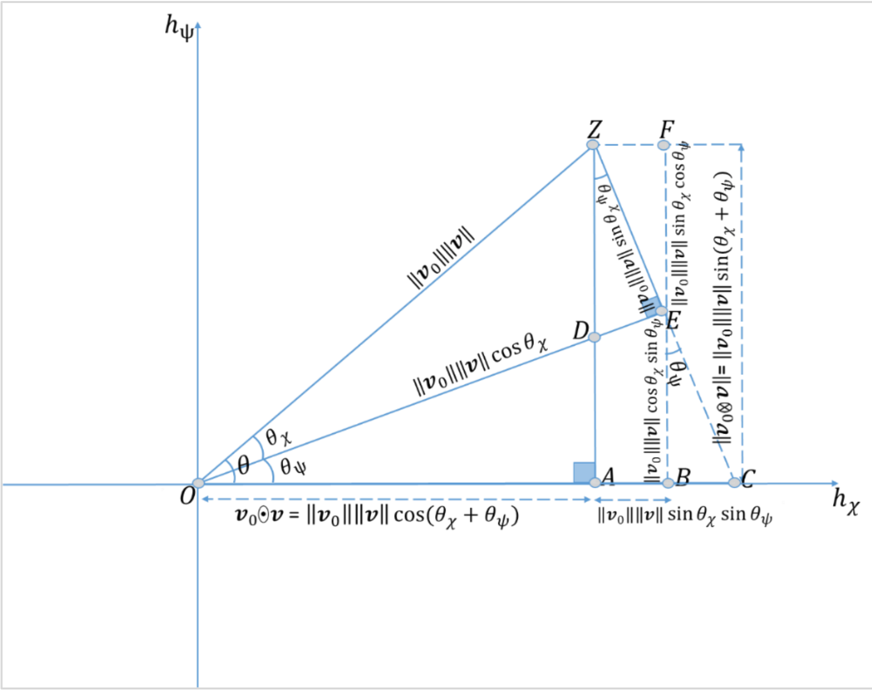
O método que permite reduzir o número de incógnitas de $n = n$ para $n = 3$, conforme a análise anterior, chama-se Contracção Dimensional Sistemática (Zau, 2021).

Análise Geométrica do Vector Axial 2-produto Homométrico

Toda a abordagem anterior sobre o vector axial 2-produto homométrico, suas operações, principais propriedades e funcionalidades, viabilizam representações geométricas fundamentais, as quais contam com os seus vectores multiplicativos e com grandezas escalares associadas, tais como o ângulo de indução θ entre estes vectores multiplicativos, o ângulo director inicial e pós-inicial, módulos destes vectores, para qualquer espaço vectorial métrico n-dimensional.

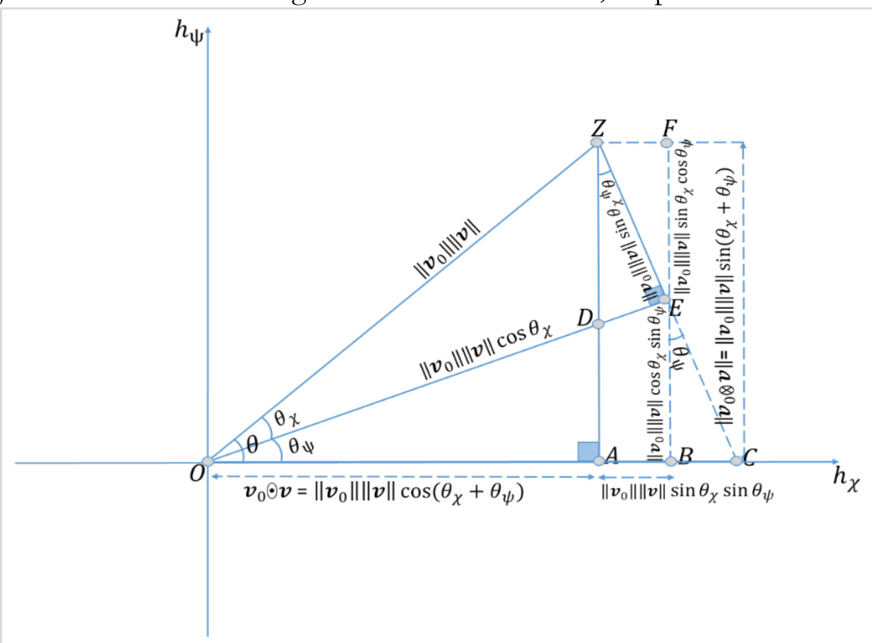
Estas representações geométricas centram-se nos vectores primários, os quais se enquadram no respectivo plano homométrico que contém o respaldo de todo o arsenal vectorial e escalar que visualiza dinâmicas, estáticas, configurações, propriedades e direccionamentos. A figura 1 abaixo tece uma representação geométrica de vectores multiplicativos, 2-produto interno homométrico, módulo do vector axial 2-produto vectorial homométrico, ângulo de indução e algumas outras grandezas, no plano $h_\chi h_\psi$.

Figura 1. Representação geométrica do módulo do vector 2-produto homométrico $\boldsymbol{v}_0 \circledR \boldsymbol{v}$, juntamente com outras grandezas homométricas, no plano homocomplexo $h_\chi h_\psi$.



Esta figura 1 representa geometricamente, dentre outras nuances, a propriedade de identidade de Lagrange, uma relação intrinsecamente relacionada com a identidade trigonométrica fundamental e, por isso, válida em qualquer espaço bimensional, tal como acontece com o plano homométrico. Neste contexto, a figura 2 abaixo apresenta esta intrínseca ligação, usando grandezas já referenciadas na figura 1.

Figura 2. Representação geométrica do módulo do vector axial 2-produto homométrico $\boldsymbol{v}_0 \otimes \boldsymbol{v}$, juntamente com outras grandezas homométricas, no plano homométrico $\chi\psi$.



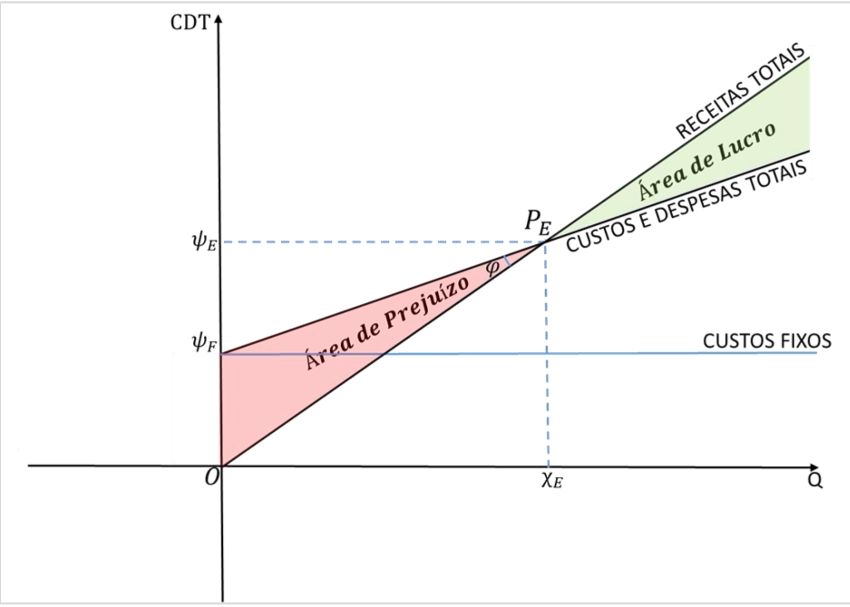
Esta figura 2, para além de exprimir relações algébricas e geométricas entre vectores multiplicativos, o produto escalar euclidiano associado a estes vectores multiplicativos, o 2-produto interno homométrico, o 2-produto vectorial homométrico, ângulos do plano homométricos como o ângulo director γ e o ângulo de indução geral θ, dentre outras grandezas homométricas, mostra geometricamente a identidade de Lagrange, generalizada para o campo dos números complexos.

Aplicação da 2-Álgebra Homométrica à Gestão Financeira: O Caso de Ponto de Equilíbrio

A 2-Álgebra Homométrica é facilmente aplicável às ciências administrativas, em particular, à Gestão Financeira, bastando especificar um espaço homométrico especial a ser denominado de espaço financeiro. Assim, este espaço financeiro assume todas as características do espaço vectorial homométrico, em especial, aquela da existência de um vector inicial, vector financeiro inicial, que integra todas as características do sistema financeiro, do qual os demais vectores financeiros são obtidos.

Dado o carácter sumário deste artigo, este item vai lançar um olhar simplista apenas à análise dinâmico-financeira do ponto de equilíbrio clássico, entendido como a situação financeira de entidades, projectos, negócios para a qual as receitas totais são iguais aos custos e despesas totais, não existindo nem ganhos, nem perdas (Fernandes, 2021). A figura 3 abaixo apresenta geometricamente esta situação, para custos e despesas totais CDT, volume de produção Q e ângulo de incidência φ.

Figura 3. Representação geométrica do ponto de equilíbrio clássico.



O ângulo de incidência ou ângulo de ataque φ, referenciada nesta figura 3 acima, pode ser calculado segundo a seguinte igualdade, para custos variáveis CV, custos fixos CF e volume de produção Q, ou seja:

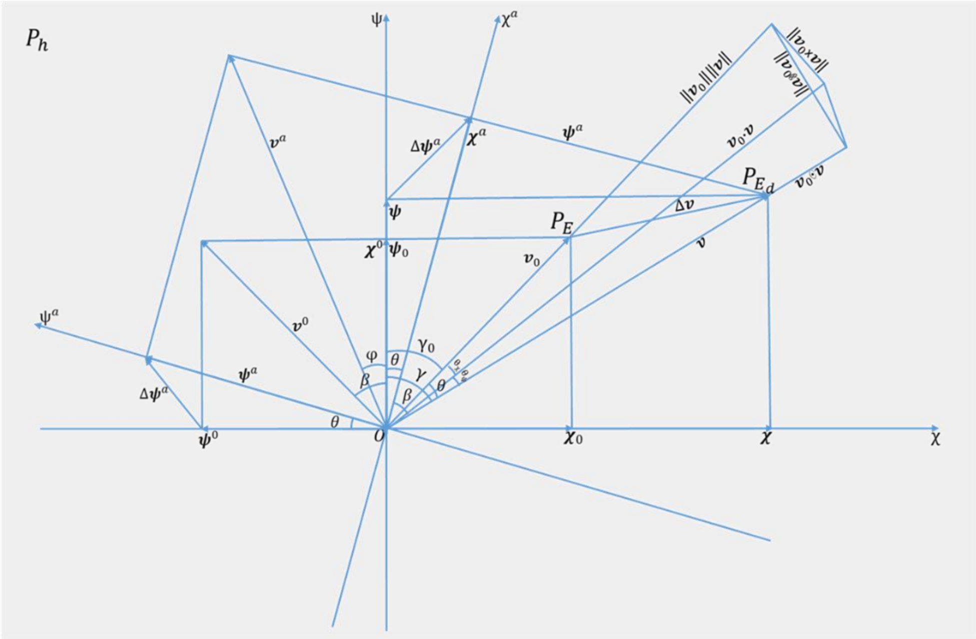
$$\tan\varphi = \frac{Q \cdot CF}{CV^2 + Q^2 + CF.CV}.$$

Independentemente das desvantagens apontadas a esta metodologia de ponto de equilíbrio clássico, existe uma desvantagem muito mais profunda deste método, do ponto de vista matemático: a incompatibilidade desta metodologia com o axioma de soma de vectores financeiros, pois um dos eixos coordenados apresenta uma unidade montária, enquanto o outro não possui tal unidade, o que dificulta qualquer soma de vectores desta figura 3. Para contornar esta situação, considere-se receita total RT, custos e despesas totais CDT e lucratividade L_c. Então, gerar receitas para remunerar factores de produção e garantir lucros para accionistas e reservas (Mello et al., 2017) atende à seguinte relação:

$$\frac{RT}{CDT} = \frac{1}{1 - L_c}.$$

Esta relação pode ser representada geometricamente, para vectores como $RT = \chi$ e $CDT = \psi$, fazendo $\frac{RT}{CDT} = \frac{1}{1-L_c} = \tan(\gamma_0 + \theta)$, conforme a figura 4 abaixo.

Figura 4. Representação geométrica, no plano financeiro $\chi\psi$, da relação $\frac{RT}{CDT} = \frac{1}{1-L_c} = \tan(\gamma_0 + \theta),\ \forall\theta \neq 0$.



O ponto P_{Ed} ou P_{E_d} representado geometricamente nesta figura 4 acima denomina-se ponto de equilíbrio dinâmico e atende o seguinte significado: quando o sistema financeiro atinge o ponto de equilíbrio clássico ou usual P_E, a receita total passa a ser igual a todos os custos e despesas totais da entidade ou sistema considerado. Assim, como as condições que conduziram a este equilíbrio podem manter-se constantes, em certo intervalo de tempo, de vez que envolvem elementos característicos do negócio, projecto ou sistema financeiros, assim como de micro e macro ambientes, então, neste intervalo de tempo este ponto de equilíbrio é estático.
Entretanto, elementos da competitividade, como controle de custos, diferenciação, negociação com fornecedores e clientes, melhorias na manipulação de outras forças competitivas faz com que a figura 4 integra um outro ponto de equilíbrio, o ponto P_{E_d}, também denotado por P_{Ed} e denominado ponto de equilíbrio dinâmico, e é responsável pelo crescimento holístico (quantitativo e qualitativo) de projectos, negócios sistemas financeiros.

Considerações finais

Este trabalho versa sobre a 2-Álgebra Homométrica, uma proposta científica de uma nova álgebra, definida por propriedades como bilinearidade, ortogonalidade e identidade de Lagrange, cujo produto característico, o 2-produto vectorial homométrico, está intimamente relacionado com o 2-produto interno homométrico, através da identidade trigonométrica fundamental, válida no campo dos números reais e complexos. Considera-se aqui também algumas aplicações desta nova álgebra para a compreensão de espaços financeiros, a partir da metodologia de ponto de equilíbrio.
Portanto, a abordagem sobre fundamentos científicos da 2-Álgebra Homométrica, seu produto característico, o 2-produto vectorial homométrico, e aplicações à Gestão Financeira apontam para as seguintes considerações:

A 2-Álgebra Homométrica sobre um corpo $\mathbb{K}$ dos números reais ou complexos consiste de um espaço vectorial homométrico e um 2-produto vectorial homométrico definido neste espaço;
Esta 2-Álgebra Homométrica constitui uma generalização natural da Álgebra de Gibbs e Heaviside para os espaços vectoriais n-dimensionais e para o corpo dos números complexos;
Um espaço vectorial homométrico caracteriza-se como espaço vectorial onde está fixado um vector especial – o vector-inicial $\boldsymbol{v}_0$ – a partir do qual todos os demais vectores deste espaço vectorial são obtidos;
Um dos resultados mais importantes resultados da 2-Álgebra Homométrica consiste em permitir o estudo de propriedades, funcionalidades de espaços vectoriais de quaisquer dimensões, o que permite geometrizar e estudar espaços vectoriais n-dimensionais e seus objectos;
Pela 2-Álgebra Homométrica a Geometria em geral e Geometria Homométrica em particular ganham ferramentas para a representação de objectos matemáticos em espaços vectoriais de quaisquer dimensões;
A 2-Álgebra Homométrica pode ser aplicada a campos de conhecimento humano como a Gestão Financeira, dentre outros domínios de ciências formais, ciências da natureza, engenharias e ciências sociais e humanas.

Referências bibliográficas

Fernandes, J. F. P. (2021). *Análise custo-volume-resultado e Balanced Scorecard no apoio à gestão estratégica de gastos: estudo de caso numa empresa de produção de insufláveis*. [Dissertação de Mestrado]. Bragança. APNOR.

Hamilton, W. R. (1899). *Elements of Quaternions*. LONGMANS.

Hoffman, K. & Kunze, R. (1971). *Linear algebra*. Prentice-Hall.

Janesch, O. R. & Taneja, I. J. (2011). *Álgebra* I. 2ª Edição. Universidade de Santa Catarina.

Mello, M. F. de; Cunha, L. A. & Silva, N. J. da. (2017). *O cálculo do ponto de equilíbrio e margem de contribuição como importante instrumento de gestão para uma empresa do ramo metal mecânico*. Joinvile: XXXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção.

Printer, C. C. (2010). *A book of abstract algebra*. Second Edition. McGraw-Hill.

Silva, C. C. (2002). *Da força ao tensor: Evolução do conceito físico e da representação matemática do campo electromagnético*. IFGW.

Zau, F. L. B. (2021). Contracção dimensional sistemática: uma proposta metodológica para o cálculo de equações e sistemas de M equações lineares com N incógnitas. *Sapientiae, 7*(1), 76-93. https://doi.org/10.37293/sapientiae71.06