REVISTA MEXICANA DE ECONOMÍA Y FINANZAS
Nueva Época
REMEF
(THE MEXICAN JOURNAL OF ECONOMICS AND FINANCE)

Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Nueva Época

Volumen 18 Número 3, Julio - Septiembre 2023, pp. 1-30, e892

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

(Recibido: 26/abril/2022, aceptado: 5/agosto/2022, publicado: 29/junio/2023)

Consumo óptimo en el retiro con diferentes leyes de mortalidad

Alfredo Omar Palafox-Roca[1] - Universidad Autónoma Metropolitana, México

Resumen

Objetivo: Este trabajo estudia las trayectorias óptimas de consumo de personas en edad de jubilación que no pretenden heredar. Metodología: Se propone un modelo donde el número de años por vivir de un individuo jubilado es una variable aleatoria. Resultados: Se obtienen soluciones cerradas cuando el individuo depende de una sola fuente de recursos y cuenta o no con una cobertura por longevidad. Recomendaciones: El análisis aquí expuesto puede ayudar al diseño de mejores planes para el retiro. Limitaciones e implicaciones: Este estudio no considera fuerzas de mortalidad con muchos parámetros, los cuales capturan una mayor cantidad de causas de muerte pero que complican obtener soluciones cerradas. Originalidad: El trabajo utiliza una función de utilidad CRRA y considera diferentes fuerzas de mortalidad, estas se caracterizan por contar con un menor número de parámetros para determinar los planes óptimos de consumo. Conclusiones: las soluciones del caso II permiten mejorar los productos ofrecidos por las aseguradoras en beneficio de los asegurados, de la misma manera los gobiernos pueden buscar incidir en estos parámetros para incrementar el bienestar de los pensionados.

Clasificación JEL: D14, E21, G22.

Palabras clave: Modelo del ciclo de vida, decisiones de consumo, anualidades, riesgo de longevidad.

Optimal consumption in retirement with different mortality laws

Abstract

Objective: This paper studies the optimal consumption trajectories of people of retirement age who do not intend to inherit. Methodology: A model is proposed where the number of years to live for a retired individual is a random variable. Results: Closed solutions are obtained when the individual depends on a single source of resources and has or does not have longevity coverage. Recommendations: The analysis presented here can help design better plans for retirement. Limitations and implications: This study does not consider mortality forces with many parameters, which capture a greater number of causes of death but complicate obtaining closed solutions. Originality: The work uses a CRRA utility function and considers different mortality forces, these are characterized by having a smaller number of parameters to determine the optimal consumption plans. Conclusions: the solutions of case II allow improving the products offered by insurers for the benefit of the insured, in the same way that governments can seek to influence these parameters to increase the well-being of pensioners.

JEL Classification: D14, E21, G22.

Keywords: Life cycle model, consumption decisions, annuities, longevity risk.

[1] Autor de correspondencia. Departamento de Administración, Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco. Correo: alfomarpalafox@gmail.com

*Sin fuente de financiamiento para el desarrollo de la investigación

1. Introducción

El objeto de estudio de este trabajo es el análisis de los planes de consumo en el futuro por parte de un consumidor cuando se encuentra en las edades más avanzadas del ciclo de vida. En particular, se analiza el caso de las personas que deciden no dejar un legado a sus descendientes, esto es, se consumen toda su riqueza antes de morir. Naturalmente, no es la intención de esta investigación explicar cada una de las decisiones que toma un individuo con respecto a sus últimos años de vida. En este documento solo se estudia un aspecto importante para la planeación a futuro: aquel tiene que ver con prescindir de una cobertura mediante el pago de anualidades, o bien, tener este tipo de cobertura.

Aunque no todas las personas reparen en la trascendencia de este punto a diario se toman decisiones en este sentido, los individuos ingresan cantidades de dinero a partir de su trabajo y, por otro lado, este dinero se emplea para consumir bienes y servicios a lo largo de toda su vida. Para comprender bien este proceso de ingreso y consumo se deben tener en cuenta cuáles son los criterios en los que un individuo basa sus decisiones, es decir, qué variables o indicadores observa para determinar sus futuros ingresos con los cuales hará frente a su consumo futuro. La interpretación de la realidad económica por parte del individuo juega un rol fundamental. En economía, al individuo se le llama consumidor-inversionista y, por ende, el problema antes descrito se encuentra dentro de la teoría del consumidor, la solución al problema implica establecer un plan de consumo óptimo. Además, es necesario que tanto el gobierno como las aseguradoras tomen en consideración el riesgo de longevidad, derivado del incremento en la esperanza de vida de los individuos.

Olivieri y Pitacco (2009) se enfocan en el número anual de muertes en una cohorte dada, la cual modelan mediante una tasa de mortalidad aleatoria. Extienden el modelo de Poisson asumiendo un parámetro aleatorio distribuido por Gamma e introducen la dependencia del tiempo en el parámetro mismo. Mediante un procedimiento inferencial bayesiano para actualizan los parámetros para hacer simulaciones. Luego, el modelo se implementa con fines de asignación de capital para una determinada cartera de rentas vitalicias, en base a objetivos de solvencia que podrían ser adoptados dentro de modelos internos. Barrieu *et al* (2012) exponen el problema del riesgo de longevidad y su implicación en la industria de los seguros. En su análisis se establece que se debe tener en cuenta las mejoras en la longevidad, el envejecimiento de la población y la financiación de las pensiones. Igualmente, señalan que los planes de pensiones de beneficio definido han sido reemplazados continuamente por planes de contribución definida, obteniendo el mismo resultado.

En México, el problema de las pensiones ha sido atendido tomando en cuenta diferentes vertientes. Por ejemplo, Leal (2013) destaca las precarias condiciones de diferentes secretarias de estado vinculadas a este tema, además, destaca algunos problemas legales originados desde la Suprema Corte. En el mismo tenor, Damián (2016) hace énfasis en la reducción de beneficios ocasionada por las reformas al sistema de pensiones. Kato y Cárdenas (2013) también consideran al riesgo de longevidad como una causa de problemas en los sistemas de pensiones, sin olvidar la precariedad laboral y la escasez de empleo para los adultos mayores. Villagómez (2014) recurre a un concepto diferente de ciclo de vida para manifestar que, en parte, el problema de las pensiones se encuentra en la baja capacidad de ahorro de los mexicanos.

En el plano internacional, Choudhry *et al.* (2012) analizan los efectos de las crisis financieras en los jóvenes, quienes durante estos periodos están expuestos a altas tasas de desempleo y, como consecuencia, a un bajo nivel de ahorro. Guido *et al* consideran necesario tomar en cuenta la heterogeneidad de los consumidores en la tercera edad en el diseño de estrategias para servicios y productos financieros. Afirman que las diferencias demográficas por sí solas no son adecuadas para definir segmentos de mercado de manera efectiva. Ebbinghaus (2015) indica que la crisis del 2008 dio como resultado que la privatización del sistema de pensiones y su respectiva exposición a las fuerzas del mercado implica problemas a corto plazo e incertidumbre a largo plazo sobre la sostenibilidad social de este esquema.

Actualmente existe una amplia literatura relacionada al problema de las decisiones de consumo e inversión. No obstante, la mayoría de los artículos de investigación asumen que el consumidor tiene un tiempo de vida finito, el cual es conocido, ejemplo de ello es el trabajo de Modigliani (2015). Por otra parte, se asume que el horizonte temporal del problema es infinito, Palafox-Roca, A. O., y Venegas-Martínez, F. (2014b), esto implica que el consumidor tiene vida infinita. Ambos enfoques tienen ventajas técnicas al momento de lidiar con los cálculos de los modelos que presentan estas investigaciones.

Evidentemente, ambos escenarios representan casos extremos en el análisis económico. Por un lado, más allá de la simplificación matemática, un escenario temporal con horizonte finito conocido, T, se justifica porque se espera que ningún consumidor viva más allá de un cierto número de años, esto supone conocer el tiempo restante de vida. Es común en la literatura con estos modelos que los agentes económicos sean homogéneos, lo cual implica que los resultados se refieran a un agente representativo, ver por ejemplo Palafox-Roca y Venegas-Martínez (2014a). En otras ocasiones se introduce de alguna forma, mediante alguna variable aleatoria, la heterogeneidad en los consumidores, esto usualmente da como resultado a un consumidor promedio, ver Palafox-Roca e*t al* (2020).

Por otro lado, se justifica un horizonte temporal infinito cuando el consumidor no es individuo en particular. En este caso se asume, de forma implícita o explícita, que los individuos tienen descendencia y también destinan parte de sus recursos al consumo. Matemáticamente, en este tipo de planteamientos suele suponerse la condición de transversalidad, esto hace menos complicados los cálculos encaminados a la solución de los modelos que incluyan este supuesto. Análogamente con el caso con horizonte finito, la heterogeneidad genera resultados con un consumidor promedio, ver Palafox-Roca, A. O., y Venegas-Martínez, F. (2014b).

Las bases sobre las que se construyó el modelo del ciclo de vida de un consumidor tiene como punto de partida, aunque no de manera directa, a Adam Smith (1776), quien asume en su investigación que la riqueza de las naciones se debe a la cantidad de trabajo asignado a la producción de capital. John Rae (1834) notó en esa explicación algunos inconvenientes; en particular, Smith no especifica cuáles son los determinantes de esta asignación. La respuesta de Rae, como la de von Böhm Bawerk (1889) de la escuela austríaca, proponía que eran factores psicológicos sobre el deseo de acumulación los que determinan la asignación. Ninguno de estos autores hizo algún señalamiento destacable respecto a la vida del consumidor. Esta idea estuvo presente en la obra de Marshall (1890), quien dijo "Así como puede haber una mancha de egoísmo en el deseo de un hombre de hacer lo que parece beneficiar a sus compañeros de trabajo, también puede haber un elemento de orgullo personal en su deseo de que su familia prospere durante su vida –la de él- y después de ella.". Es evidente que Marshall tiene en cuenta tanto el bienestar del consumidor como el de sus descendientes. Sin embargo, sus observaciones no fueron más allá de este tipo de menciones.

Por su parte, Fisher (1930) al hablar sobre la preferencia temporal o la impaciencia de un individuo menciona que "… la brevedad de la vida tiende poderosamente a incrementar el grado de impaciencia, o la tasa de preferencia temporal, más allá de lo que sería de otra manera.". Posteriormente, señala que estas preferencias temporales se ven afectadas cuando el individuo tiene herederos. En este sentido argumenta que "… la brevedad y la incertidumbre de la vida tienden a incrementar la impaciencia, su efecto es mitigado en gran medida por la quinta circunstancia, la solicitud por el bienestar de los propios herederos. Probablemente la causa más poderosa que tiende a reducir la tasa de interés es el amor a los hijos y el deseo de proveer para su bien.".

Por otra parte, la hipótesis del ingreso permanente planteada por Friedman (1957) supone una suavización de la función del consumo a lo largo del tiempo. Esta hipótesis asume que tanto el consumo como el ingreso son explicado por dos factores llamados permanentes y transitorios. Formalmente,

$$c_p = k(i, w, u)y_p, \tag{1}$$

$$y = y_p + y_t, \tag{2}$$

$$c = c_p + c_t. \tag{3}$$

La ecuación (1) define una relación entre el ingreso permanente, y_p, y el consumo permanente, c_p, i es la tasa de interés a la cual el consumidor puede prestar y pedir prestado, w es la razón entre la riqueza y los ingresos y u es una variable que puede representar varias cosas pero a grandes rasgos se trata de una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor a los diferentes niveles de ingreso. Friedman propone que u también puede considerar la edad del consumidor. Mediante el sistema de ecuaciones anterior Friedman muestra que son los cambios en el ingreso permanente los que determinan el consumo de los consumidores. Los ingresos permanentes reflejan lo que el consumidor espera ganar durante toda su vida. El efecto de los ingresos transitorios es poco relevante y, además, en esta teoría no interviene una probabilidad de sobrevivencia.

Previo al trabajo de Friedman, Modigliani (2015) realiza un estudio empírico mediante el cual afirma que la proporción de ingresos ahorrados es esencialmente independiente de los ingresos; y que las desviaciones sistemáticas de la tasa de ahorro del nivel normal se explican en gran medida por el hecho de que las fluctuaciones a corto plazo de los ingresos en torno a la capacidad básica de ingresos del hogar, así como los cambios graduales en esta capacidad de ingresos, pueden provocar que el ahorro acumulado salga de la línea de los ingresos y la edad actuales. Este trabajo es conocido en la actualidad como el modelo del ciclo de vida y asume como conocido el tiempo restante de vida del consumidor.

En particular, los trabajos de Marshall y Fisher dieron pie a una tercera propuesta, la cual consiste en asumir que el tiempo restante de vida del consumidor es una variable aleatoria, un supuesto bastante desarrollado en las ciencias actuariales. Esta idea fue expuesta por primera vez por Yaari (1965), quien fue el primer economista en introducir las anualidades dentro del modelo del ciclo de vida. Su artículo de investigación es el más citado en la literatura económica de anualidades vitalicias, a la fecha cuenta con 3683 citas. Yaari estudió cómo los consumidores debieran gastar su riqueza considerando sus probabilidades de supervivencia y actitudes frente al riesgo de longevidad de manera que gradualmente su nivel de vida se reduzca o se suavice con el paso de los años de manera racional.

En consecuencia, el propósito de esta investigación es presentar soluciones particulares que se desprenden de los planteamientos de Yaari. Para este propósito, se trabaja en todos los escenarios con una función de utilidad con aversión relativa constante al riesgo, CRRA por sus siglas en inglés, y se presentan diferentes leyes de mortalidad que modelan la sobrevivencia del consumidor a lo largo del tiempo. Estos resultados complementan la propuesta del ciclo de vida propuesto por Yaari, dado que en ese trabajo no se especifican funciones de utilidad, ni funciones de sobrevivencia, ni leyes de mortalidad, por ende, tampoco se expresan las soluciones del consumo óptimo en función de escenarios particulares, como sí queda de manifiesto en esta investigación.

Por último, se enfatiza el hecho de que se trabaja con fuerzas de mortalidad sin efectos aleatorios, pero modificadas para incluir la edad modal al momento de la muerte, con lo cual se obtienen soluciones que incluyen esta observación, un dato poco trabajado en la literatura actual. Teniéndose como única referencia destacada el trabajo de Huang *et al* (2012). Para el caso de fuerzas de mortalidad estocásticas, Huang *et al* (2017) resuelven un modelo de ciclo de vida en el que la edad cronológica del consumidor no se mueve al mismo ritmo que el tiempo del calendario, sino que la edad biológica aumenta a un ritmo estocástico no lineal de manera que el tiempo ocasionalmente puede retroceder. En tanto que Šiaulys y Puišys (2022) demuestran que el producto de una variable aleatoria con una fuerza de mortalidad es, nuevamente, una fuerza de mortalidad.

2. Literatura relacionada

En esta sección se hace un breve compendio de algunos de los principales aportes realizados para explicar las dinámicas de las poblaciones. A continuación, se presenta una breve recapitulación sobre las leyes de mortalidad más usadas en las ciencias actuariales, partiendo de los trabajos que dieron pie al desarrollo de las tablas de mortalidad. Se presentan en primer algunos trabajos pioneros sobre el crecimiento poblacional. En segundo lugar, se introduce formalmente el concepto de fuerza de mortalidad y otros conceptos relacionados a ella, como la función de sobrevivencia, entre otros. En tercer lugar, se presentan las distribuciones analíticas del tiempo restante de vida más conocidas, en especial aquellas que requieren de una menor cantidad de parámetros en su definición. Por último, se establece una relación con respecto a la edad modal al morir para redefinir las fuerzas de mortalidad previamente expuestas.

2.1 Algunas dinámicas poblacionales vinculadas al crecimiento y la mortalidad de las poblaciones

A lo largo de los años se han modelado diversos aspectos relacionados al crecimiento poblacional de los seres humanos. Quizás el primer trabajo reconocido dentro de las dinámicas poblaciones es el problema planteado por Leonardo de Pisa (Fibonacci) (Sigler, 2002) en su *Liber Abaci* (Libro de Cálculos) escrito en el año 1202 referente a la descendencia de una pareja de conejos. Una siguiente aportación fue hecha en 1662 a través del libro *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Se suele considerar a John Graunt como autor (Graunt, 1939) de este libro. Esta referencia es importante dado que considera tanto los nacimientos, contados mediante los bautizos, como el número de muertos, contados a partir del número de entierros, en Londres. Estas observaciones construidas a partir de los boletines informativos sobre las muertes de la población londinense tenían como finalidad reportar la evolución en el número de muertes debidas a la peste.

Edmond Halley formalizó matemáticamente la idea de tabla de mortalidad basándose en los datos recolectados para la ciudad de Breslaw (hoy Wroclaw, en Polonia), perteneciente al imperio de Habsburgo (Halley, 1693). Halley hizo uso de la tabla que construyó para el cálculo de las anualidades sobre vidas al notar la relación que existe entre la probabilidad condicional de alcanzar la edad $x + n$ dado que el individuo tiene edad x y la cantidad que debe invertir a las edades x, $x + 1$, …, $x + n$ para obtener una unidad monetaria al final del periodo de inversión en cada una de estas edades. Antes del trabajo de Halley, no se había establecido una relación pertinente entre las edades de los individuos y las anualidades que podían llegar a percibir.

En 1748 Leonhard Euler, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, publica un tratado en latín intitulado *Introductio in Analysin Infinitorum* (Introducción al Análisis del Infinito), en el cual el sexto capítulo trata sobre exponenciales y logaritmos (Euler, 1748). Uno de los ejemplos planteados en esta sección trata sobre el incremento de la población a partir de los seis sobrevivientes después de la inundación provocada por el diluvio y el hecho de que toda la humanidad descendería de ellos. Euler supone que tras doscientos años de haber ocurrido la inundación la población es de un millón de personas y encuentra que la tasa de crecimiento de la población durante ese periodo de tiempo debió ser de aproximadamente 1/16. Posteriormente, suponiendo que esta misma tasa se sostiene por cuatrocientos años más, Euler determina que el total de la población llegaría a ser de 166,666,666,666 de individuos. Lo cual evidentemente sería insostenible para el planeta.

La idea central del ejemplo anterior fue desarrollada medio siglo más tarde por Malthus en su obra *An Essay on the Principle of Population* (Un Ensayo sobre el Principio de la Población). A partir de este trabajo, se suele llamar a su modelo de crecimiento poblacional como modelo de crecimiento exponencial. El trabajo de Malthus establece un crecimiento poblacional a una razón geométrica, en tanto que los elementos que proveen la subsistencia crecen a una razón aritmética (Malthus, 1798). Una propuesta alternativa a este modelo de crecimiento fue presentada por Verhulst en 1838 en una publicación intitulada *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement* (Nota sobre la ley que sigue la población en su aumento), a este modelo se le conoce como el modelo logístico, el cual establece que, a mayor población, menor tasa de crecimiento. Ambos modelos ofrecen la posibilidad de modelar la tasa de crecimiento basada en los nacimientos y en la mortalidad.

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

2.2 Fuerza de mortalidad

Las tablas de mortalidad fueron construidas empíricamente. A partir de esta información se intentó deducir una formulación matemática que representara la mortalidad en las poblaciones. En este sentido, diferentes propuestas se han presentado a lo largo de muchos años para representar las leyes de la mortalidad. Para explicar estas leyes se han desarrollado conceptos tales como fuerza de mortalidad, la cual definimos a continuación como la función que representa la muerte instantánea, esto es,

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}. \tag{4}$$

En (4), $f_X(x)$ es la función de densidad de muerte de una persona de edad x en el instante siguiente y $1 - F_X(x)$ representa la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x. De esta forma, $\mu(x)$ es la probabilidad de que un individuo alcance la edad x y muera en el instante siguiente.

Ahora bien, a la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x se le llama función de sobrevivencia, la cual no es más que el complemento de la probabilidad de muerte dentro de ese rango de edad, $F_X(x)$, y se le asigna una notación específica en las ciencias actuariales, $s(x) = 1 - F_X(x)$. Naturalmente, $f_X(x) = F_X'(x)$. Por lo tanto, podemos expresar a (4) en función de $s(x)$ como

$$\mu(x) = -\frac{s_X'(x)}{s_X(x)}. \tag{5}$$

Integrando esta expresión de 0 hasta t se sigue que

$$-\int_0^t \mu(x)\mathrm{d}x = log\left(\frac{s(t)}{s(0)}\right). \tag{6}$$

En (6), $s(0)$ se puede interpretar como la probabilidad de que un recién nacido vivo sobreviva al instante mismo de nacer, esto significa que $s(0) = 1$. Luego, (6) puede reescribirse como

$$s(t) = e^{-\int_0^t \mu(x)\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

Una notación alternativa para (4) es

$$_tp_0 = e^{-\int_0^t \mu(x)\mathrm{d}x}. \tag{8}$$

A partir de (8) se puede generalizar la idea de la función de sobrevivencia para edades diferente de 0, esto es,

$$_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\mathrm{d}s}. \tag{9}$$

Se hace un cambio de variable dentro de la integral para poder hacer uso explícito del intervalo de sobrevivencia a considerar. La ecuación (9) es la probabilidad que una persona de edad x alcance la edad $x + t$.

2.3 Distribuciones analíticas del tiempo restante de vida, *T*

Una función $F(t)$ se dice que es una distribución de probabilidad analítica si puede expresarse mediante una fórmula sencilla. Una fórmula analítica tiene la ventaja que puede ser calculada a partir de un pequeño número de parámetros. En seguida presentamos las distribuciones de probabilidad analíticas, más conocidas en las ciencias actuariales.

De Moivre postuló en 1725 en su obra intitulada *Annuities upon Lives: Or, The Valuation of Annuities upon Any Number of Lives; as also of Reversions* (Anualidades sobre Vidas: O, La Valoración de Anualidades sobre Cualquier Número de Vidas; como también de Reversiones) la existencia de una edad máxima ω para seres humanos y asumió que el tiempo restante de vida, T, se distribuía uniformemente entre las edades comprendidas entre 0 y $\omega - x$, lo que lleva a $f(t) = \frac{1}{\omega - x}$ para $0 < t < \omega - x$. A partir de esta función de densidad se deduce que

$$\mu(x) = -\frac{s'_X(x)}{s_X(x)} = -\frac{-\frac{1}{(\omega - x)}}{\frac{\omega - x - t}{\omega - x}} = \frac{1}{\omega - x - t}, \qquad 0 < t < \omega - x. \tag{10}$$

Gompertz postuló en 1824, en su libro *Moral Inquiries on the Situation of Man and of Brutes* (Investigaciones morales sobre la situación del hombre y de los animales), que la fuerza de mortalidad crece exponencialmente. Lo cual podemos verificar a partir de su función de densidad $f(t) = ac^x e^{\left[-\frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]},\ a > 0, c > 1, t > 0$. Calculando la fuerza de mortalidad obtenemos

$$\mu(x) = -\frac{-ac^x e^{\left[-\frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]}}{e^{\left[-\frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]}} = ac^x, a > 0, c > 1, x > 0. \tag{11}$$

Makeham modificó la propuesta de Gompertz (Makeham W. M., 1867), esta modificación consiste de tres parámetros para representar la fuerza de mortalidad. A esta ley de mortalidad se le conoce también como la fuerza de mortalidad Gompertz-Makeham, cuya función de densidad es $f(t) = A + ac^x e^{\left[-\frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]},\ A \geq -a,\ a > 0, c > 1, t > 0$. Explícitamente, la fuerza de mortalidad es

$$\mu(x) = -\frac{-(A + ac^x)e^{\left[-Ax - \frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]}}{e^{\left[-Ax - \frac{a}{logc}(c^x - 1)\right]}} = A + ac^x, A \geq -a, a > 0, c > 1, x > 0. \tag{12}$$

La ecuación (11) y la (12) difieren tan sólo por la constante A, la cual es un término que no es afectado por la edad del individuo. Esta constante representa los escenarios de muertes que no son

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

atribuibles al envejecimiento. Por ejemplo, muerte por accidentes de tráfico o muertes en caso de sismos, etc.

Weibull presentó a mediados del siglo pasado ante la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos la función de distribución que lleva su nombre a través de varios ejemplos (Weibull, W., 1951). Al igual que en los casos anteriores partimos de la función de densidad para determinar la fuerza de mortalidad, i.e.,

$$f(t) = ax^b e^{-\frac{a}{b+1}x^{b+1}}.$$

Luego, se sigue que

$$\mu(x) = -\frac{-ax^b e^{-\frac{a}{b+1}x^{b+1}}}{e^{-\frac{a}{b+1}x^{b+1}}} = ax^b, a > 0, b > 0, x \geq 0. \tag{13}$$

Existen otras tantas distribuciones analíticas y, por ende, fuerzas de mortalidad, pero no es nuestra intención ser exhaustivos. Teugels y Sundt (2004) dan cuenta de estas otras opciones, las cuales consideran una mayor cantidad de parámetros para explicar la ley de mortalidad.

2.4 Fuerzas de mortalidad en términos de la edad modal al morir

Las fuerzas de mortalidad obtenidas en la sección anterior suelen ser modificadas para considerar algunos aspectos estadísticamente relevantes, en especial, la edad modal al morir, es decir, la edad donde más muertes hay. En este apartado se dan a conocer las expresiones matemáticas de las fuerzas de mortalidad previamente establecidas. Primeramente, introducimos el concepto del número de sobrevivientes a la edad x, $l(x)$, a partir de un número original de individuos $l(0)$. En otras palabras, $l(x) = l(0)s(x)$. En segundo lugar, definimos el número de muertos a la edad x de los $l(0)$ individuos iniciales, $d(x)$, como $d(x) = \mu(x)l(x)$. Por último, se retoma la relación enunciada en Missov *et al* (2015), la cual señala que "para cualquier $\mu(x)$ la función de densidad de probabilidad de muertes $\mu(x)$ alcanza un máximo en la edad modal de muerte". Por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}d(x)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{14}$$

Al dividir (11) entre $d(x)$ se obtiene y derivando el numerador respecto a x se sigue que

$$\frac{\frac{\mathrm{d}d(x)}{\mathrm{d}x}}{d(x)} = \frac{\mu(x)l'(x)}{\mu(x)l(x)} + \frac{\mu'(x)l(x)}{\mu(x)l(x)} = \frac{l(0)s'(x)}{l(0)s(x)} + \frac{\mu'(x)l(x)}{\mu(x)l(x)} = -\mu(x) + \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 0.$$

Despejando,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \mu(x). \tag{15}$$

A continuación, se aplica esta relación a las fuerzas de mortalidad analizadas en esta investigación considerando algunas modificaciones pertinentes.

2.4.1 De Moivre

Este caso de fuerza de mortalidad es especial, pues proviene del supuesto de que es igualmente probable morir en cada edad x. Esto se traduce en la falta de una edad modal al morir. La relación (15) permite comprobar este hecho:

$$\frac{\frac{1}{(\omega - x - t)^2}}{\frac{1}{(\omega - x - t)}} = \frac{1}{\omega - x - t}.$$

No obstante, esta expresión conduce a

$$\frac{1}{\omega - x - t} = \frac{1}{\omega - x - t},$$

lo que demuestra que no existe una edad modal al morir bajo la fuerza de mortalidad de De Moivre.

2.4.2 Gompertz

A partir de (11), $\mu(x) = ac^x = ae^{lnc\,x} = ae^{bx}, b = lnc$. Al aplicar la relación (15) tenemos $\frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} = ae^{bx}$, sea M la edad modal al morir, entonces al simplificar se sigue que $b = ae^{bM}$y despejar respecto a M conduce a que $M = \frac{1}{b} ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Luego, $a = be^{-bM}$ y finalmente obtenemos la expresión deseada,

$$\mu(x) = be^{b(x-M)}. \tag{16}$$

Este último resultado es similar, aunque no exactamente igual, al considerado por Huang *et al* (2012).

2.4.3 Makeham

Es conocido que la fuerza de mortalidad de Makeham suma una constante A a la fuerza de mortalidad de Gompertz, esta adición es pertinente dado que esta constante representa todas las muertes por causas diferentes al proceso de envejecimiento, por ejemplo, muertes en accidentes de tráfico. El proceso para determinar M es similar al caso anterior:

$$\mu(x) = A + ac^x = A + ae^{bx}, b = lnc.$$

Siguiendo (15) tenemos que

$$\frac{abe^{bx}}{A + ae^{bx}} = A + ae^{bx}, \quad abe^{bx} = \left(A + ae^{bx}\right)^2.$$

Desarrollando el cuadrado, simplificando términos nos da

$$\left(ae^{bx}\right)^2 + (2aA - ab)ae^{bx} + A^2 = 0,$$

esto resulta en

$$e^{bM} = \frac{b - 2A \pm \sqrt{b(b - 4A)}}{2a}, \qquad b \geq 4A.$$

Luego,

$$M = \frac{1}{b} ln\left(\frac{b - 2A \pm \sqrt{b(b - 4A)}}{2a}\right),$$

de aquí se sigue que

$$a = \left\{\frac{b - 2A \pm \sqrt{b(b - 4A)}}{2a}\right\} e^{-bM}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(x) = A + \left\{\frac{b - 2A \pm \sqrt{b(b - 4A)}}{2a}\right\} e^{b(x-M)},$$

para simplificar la expresión anterior se aume que $B = \frac{b-2A\pm\sqrt{b(b-4A)}}{2a}$. En consecuencia,

$$\mu(x) = A + Be^{b(x-M)}. \tag{17}$$

2.4.4 Weibull

En (13) vimos que $\mu(x) = ax^b$ y para obtener su edad modal al morir se procede tal que

$$\frac{abx^{b-1}}{ax^b} = ax^b, \qquad \frac{b}{x} = ax^b, \qquad \frac{b}{a} = x^{1+b}, \qquad M = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+b}}, \; a = \frac{b}{M^{1+b}}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(x) = \left(\frac{b}{M}\right)\left(\frac{x}{M}\right)^b. \tag{18}$$

3. Modelo del ciclo de vida Yaari (tiempo restante de vida como variable aleatoria)

En su artículo de investigación Yaari parte de lo que llama análisis tipo Fisher de asignación sobre el tiempo. En consecuencia, se supone conocido al número de años, T, que espera vivir el consumidor. La función real-valuada, c, que representa al consumo está definida en el intervalo $[0, T]$, $c(t)$ es la trayectoria de la tasa de gasto en el consumo. V es una función de utilidad de Fisher, tal que

$$V(c) = \int_0^T \alpha(t) g[c(t)]\mathrm{d}t, \tag{19}$$

donde α es una función real-valuada no negativa de la tasa subjetiva de descuento en el intervalo $[0, T]$, usualmente $\alpha(t) = e^{-\rho t}$, de modo que la tasa subjetiva de descuento es $-\dot{\alpha}(t)/\alpha(t) = \rho$. Por otra parte, g es la utilidad asociada con la tasa de consumo en todo el tiempo t y es una función real-valuada cóncava en $[0, \infty)$. Además, Yaari propone una función que representa a los activos del consumidor al tiempo t de modo tal que

$$S(t) = \int_0^t e^{\int_\tau^t j(x)dx}\{m(\tau) - c(\tau)\}\mathrm{d}\tau,$$
$$S(t) = e^{\int_0^t j(x)\mathrm{d}x} \int_0^t e^{-\int_0^\tau j(x)\mathrm{d}x}\{m(\tau) - c(\tau)\}\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Derivando la expresión anterior respecto a t se obtiene que el cambio con respecto al tiempo de los activos del consumidor se expresa como

$$\dot{S}(t) = j(t)e^{\int_0^t j(x)\mathrm{d}x} \int_0^t e^{\int_0^\tau j(x)\mathrm{d}x}\{m(\tau) - c(\tau)\}d\tau + \; e^{\int_0^t j(x)\mathrm{d}x} e^{-\int_0^t j(x)\mathrm{d}x}\big(m(t) - c(t)\big),$$
$$\dot{S}(t) = j(t)S(t) + \; m(t) - c(t) \tag{21}$$

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

donde $j(\tau)$ es la tasa de interés real al tiempo τ y $m(\tau)$ es la tasa de ganancias al tiempo τ. $S(t)$ es la acumulación al tiempo t del flujo de ganancias sobre el flujo de gastos de consumo, compuesta a cada instante del tiempo a la tasa real, m y j son funciones continuas en $[0, T]$. La restricción de la riqueza es que $S(T) \geq 0$, en vista del supuesto de no saturación la desigualdad se puede reemplazar por la igualdad.

Formalmente, un plan de consumo c es admisible si se cumplen las siguientes tres condiciones:

$$c \text{ es acotada y medible,} \tag{22}$$

$$c(t) \geq 0 \ \forall t \in [0, T], \tag{23}$$

$$\int_0^T e^{\int_t^T j(x)\mathrm{d}x}\{m(t) - c(t)\}\mathrm{d}t = 0. \tag{24}$$

A este planteamiento se le llama el problema de Fisher, el cual no siempre tiene solución. Si el problema tiene solución, c^*, esta es continua en $[0, T]$ y es diferenciable donde sea positiva. Además, donde c^* es positiva se satisface la siguiente ecuación diferencial fundamental:

$$\dot{c}^*(t) = -\left\{j(t) + \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}\right\}\frac{g'[c^*(t)]}{g''[c^*(t)]}. \tag{25}$$

Hasta este punto, Yaari solo resumió el problema de Fisher mediante el planteamiento del problema y al mostrar cómo cambia la tasa del gasto destinado al consumo a través del tiempo. A continuación, Yaari introduce formalmente a T como una variable aleatoria, y asume que tiene una distribución conocida. Este último detalle resulta familiar en el cálculo actuarial del seguro de vida; aunque Yaari no nombra a la variable aleatoria T como el tiempo restante de vida pudimos ver en la sección 2.3 que este es el nombre que recibe esta variable en las ciencias actuariales. Cabe resaltar una vez más que desde el siglo XVIII ya se habían propuesto distribuciones analíticas para explicar T (ver Gerber, 2013).

En (19) V depende directamente de T y en consecuencia si T es una variable aleatoria, también lo es V. Para resolver este nuevo escenario se basa en la programación restringida al azar. A partir de aspectos institucionales, se plantea que $P[S(t) \geq 0] = 1$.

En el artículo se define el concepto de nota actuarial, la cual el consumidor puede comprar o vender y permanece en la contabilidad hasta que el consumidor fallezca, en ese momento se cancela automáticamente. De hecho, esta nota actuarial corresponde a una anualidad. Esto significa que el consumidor que adquiere una nota actuarial, de hecho, está comprando una anualidad.

Dado lo anterior, Yaari propone dos escenarios posibles bajo la utilidad de Fisher (en el artículo original también se consideran los escenarios bajo la utilidad de Marshall):

	Función de utilidad de Fisher con restricción de riqueza
Anualidad no disponible	Caso I
Anualidad disponible	Caso II

Cuadro 1. Posibles combinaciones de la utilidad de Fisher considerando los activos disponibles del consumidor.

Estos dos escenarios merecen una atención especial, puesto que los consumidores no dejarán un legado, es decir, no heredarán y por consiguiente agotarán todos sus recursos en el último día de sus vidas. Continuando con lo expuesto por Yaari, se supone que la variable aleatoria T está definida en el intervalo $[0, \bar{T}]$ y que obedece una ley de probabilidad, la cual se especifica a través de una función de densidad de probabilidad π, por analogía esta ley de probabilidad es la $f(t)$ vista en la sección 2.3. Así, π es una función real en $[0, \bar{T}]$. También se definen las siguientes funciones:

$$\Omega(t) = \int_t^{\bar{T}} \pi(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{T}.$$

Evidentemente, $\Omega(t)$ no es otra cosa más que $s(x)$.
Por otra parte,

$$\pi_t(\tau) = \frac{\pi(\tau)}{\Omega(t)}, \quad 0 \leq t \leq \tau \leq \bar{T}, \qquad t \neq \bar{T}.$$

$\Omega(t)$ es la probabilidad de que el consumidor vivirá al tiempo t y $\pi_t(\tau)$ es el valor en τ de la densidad condicional de T dado que $T \geq t$, o sea, ${}_{\tau}p_t \mu(\tau)$. Dado lo anterior la función objetivo en (16) se convierte en

$$V(c) = \int_0^T \Omega(t) \alpha(t) g[c(t)] \mathrm{d}t, \tag{26}$$

donde (26) representa el valor esperado de las utilidades descontadas con la tasa subjetiva de descuento, ρ, tomando en cuenta la sobrevivencia del individuo.

3.1 Plan de consumo óptimo en el caso I

En este apartado se estudia la decisión óptima del plan de consumo de un individuo que no se cubre ante el riesgo de longevidad. En este caso, se asume que hay un tiempo T tal que en ese momento el individuo consume todo lo que le queda de sus activos. Para simplificar los cálculos, se suponen constantes tanto la tasa de interés real, $j(t) = r$, como la tasa de ganancias, $m(t) = \pi_0$, ambas expresiones aparecen en las ecuaciones (20) y (21). Por otra parte, la función de utilidad es del tipo CRRA, la cual, de acuerdo a Chavez *et al* (2016) se escoge por cumplir con los postulados deseados

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

de aversión absoluta al riesgo decreciente ante aumentos en la riqueza y aversión relativa al riesgo constante, además de ser la función de utilidad mayormente empleada en la estimación del riesgo mediante estudios empíricos. En consecuencia,

$$g\big(c(t)\big) = \frac{c^{1-\gamma}(t)}{1-\gamma}. \tag{27}$$

3.1.1 Planteamiento del problema para el caso I

Considerando los supuestos anteriormente señalados, el problema a resolver es el siguiente:

$$\underset{c}{\text{Maximizar}}\, V = \int_0^T \Omega(t)\alpha(t)g[c(t)]\mathrm{d}t,$$

sujeto a

$$c(t) \geq 0\ \forall t,$$

$$c(t) \leq \pi_0 \text{ siempre que } S(t) = 0,$$

$$\dot{S}(t) = rS(t) + \pi_0 - c(t),$$

$$S(T) = 0.$$

Resolviendo de manera general el problema para identificar los planes de consumo óptimo se tiene que $rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0 = c(t)$. Luego, sustituyendo la ecuación anterior en la función objetivo,

$$\int_0^T e^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} g\big(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\big)\mathrm{d}t.$$

Aplicando la ecuación de Euler obtenemos

$$re^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} g'\big(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\big) + \frac{d\left(e^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} g'\big(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\big)\right)}{dt} = 0.$$

Desarrollando la derivada con respecto al tiempo y simplificando términos, se sigue que

$$\big(r - \rho - \mu(t)\big)\frac{g'\big(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\big)}{g''\big(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\big)} + r\dot{S}(t) = \ddot{S}(t),$$

$$\ddot{S}(t) - r\dot{S}(t) = -\left(\frac{r-\rho-\mu(t)}{\gamma}\right)\left(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\right), \tag{28}$$

observar que $\dot{c}(t) = -\left(\ddot{S}(t) - r\dot{S}(t)\right)$. Entonces (28) se transforma en

$$\dot{c}(t) = \left(\frac{r-\rho-\mu(t)}{\gamma}\right)c(t),$$

esto implica que

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \left(\frac{r-\rho-\mu(t)}{\gamma}\right).$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de primer grado no homogénea y no autónoma se tiene que

$$c^*(t) = c^*(0)e^{\int_0^t\left(\frac{r-\rho-\mu(s)}{\gamma}\right)\mathrm{d}s} = c^*(0)e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t}e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}. \tag{29}$$

La ecuación (29) pone de relevancia el rol que desempeña la fuerza de mortalidad en el modelo del ciclo de vida toda vez que reduce la tasa de consumo en todo momento.

Por otra parte, de la restricción presupuestal sabemos que

$$\dot{S}(t) - rS(t) = +\pi_0 - c(0)e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t}e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s},$$

la expresión anterior tiene como solución canónica a

$$S(t) = e^{rt}\left(S(0) + \pi_0\int_0^t e^{-rs}\mathrm{d}s - c^*(0)\int_0^t e^{-rs}e^{\frac{r-\rho}{\gamma}s}e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^s \mu(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}t\right),$$

o bien,

$$S(t) = e^{rt}\left(S(0) + \pi_0\int_0^t e^{-rs}\mathrm{d}s - c^*(0)\int_0^t e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)s}({}_sp_0)^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}t\right).$$

3.1.2 Planes óptimos de consumo en el caso I

A continuación, se presentan las cuatro fuerzas de mortalidad propuestas en la sección 2.4, las cuales como hemos visto consideran la edad modal al morir y sus respectivos planes de consumo considerando la restricción $S(T) = 0$.

Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Nueva Época, Vol. 18 No. 3, pp. 1-30, e892
DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

3.1.2.1 De Moivre

$$({}_tp_0)^{\frac{1}{\gamma}} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \frac{1}{\omega-x-s}ds} = e^{\frac{1}{\gamma}\left(ln\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)\right)} = \left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

El valor ω representa la edad máxima de vida, pero para Yaari este valor se le asigna a T. Entonces,

$$0 = e^{rT}\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}(1-e^{-rT}) - c^*(0)\int_0^T e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)s}\left(\frac{T-x-s}{T-x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}s\right),$$

$$0 = \left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}$$
$$-\frac{(-\gamma)c^*(0)e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)}}{(T-x)^{\frac{1}{\gamma}}(r(1-\gamma)-\rho)}\int_0^T e^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x-s)}(T-x-s)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\mathrm{d}s.$$

Haciendo un cambio de variable, $z = \left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x-s)$, la integral anterior se puede expresar como

$$0 = \left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}$$
$$+\frac{c^*(0)e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)}}{(T-x)^{\frac{1}{\gamma}}}\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}\int_{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)}^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x-T)} e^{-z}z^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)-1}\mathrm{d}z,$$

la expresión anterior se asemeja a una función gamma incompleta, sin embargo, el límite superior no hace sentido, pues el resultado de esta diferencia es $-x$, lo cual implica una edad menor que 0. Como consecuencia, el límite se reescribe y se modifica el orden de integración

$$0 = \left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}$$
$$-\frac{c^*(0)e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)}}{(T-x)^{\frac{1}{\gamma}}}\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}\int_0^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)} e^{-z}z^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)-1}\mathrm{d}z,$$

cuya solución es

$$0 = \left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}$$
$$-\frac{c^*(0)e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)}}{(T-x)^{\frac{1}{\gamma}}}\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}\left\{\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma},\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)\right)\right\},$$

$$c^*(0) = \frac{\left[\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}\right) e^{rT} + \frac{\pi_0}{r}\right] (T-x)^{\frac{1}{\gamma}}}{e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)} \left\{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}, \left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)\right)\right\}} \left(\frac{\gamma}{r(1-\gamma)-\rho}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

Por lo tanto, el plan de consumo óptimo en este caso es

$$c^*(t) = \frac{\left[\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}\right) e^{rT} + \frac{\pi_0}{r}\right]}{e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)} \left\{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}, \left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(T-x)\right)\right\}} e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t} \left(\frac{\gamma}{r(1-\gamma)-\rho}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} (T-x-t)^{\frac{1}{\gamma}},$$

en donde todos los parámetros se suponen conocidos.

3.1.2.2 Gompertz

$$({}_tp_0)^{\frac{1}{\gamma}} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t be^{b(x+s-M)}\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{e^{b(x+t-M)} - e^{b(x-M)}\right\}}.$$

Procediendo de la misma forma que en el caso anterior, se tiene que

$$0 = e^{rT}\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}(1 - e^{-rT}) - c^*(0)e^{\frac{1}{\gamma}e^{b(x-M)}} \int_0^T e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)s} e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}}\mathrm{d}s\right)$$

$$\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}\right) e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}$$

$$= \frac{c^*(0)e^{rT} e^{\frac{1}{\gamma}e^{b(x-M)}} e^{-\left[\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right](x-M)}}{b\gamma^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}\right)}} \int_0^T \left(\frac{1}{\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}\right)^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-\gamma b}{\gamma b}\right)} e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}} \frac{b}{\gamma} e^{b(x+s-M)}\mathrm{d}s,$$

en la expresión anterior se han agregado términos para que esta nueva expresión de la integral coincida con la diferencia de dos gammas incompletas, es decir,

$$\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}\right) e^{rT} - \frac{\pi_0}{r} = \frac{c^*(0)e^{rT} e^{\frac{1}{\gamma}e^{b(x-M)} - \left[\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right](x-M)}}{b\gamma^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}\right)}} \left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}, \frac{e^{b(x-M)}}{\gamma}\right) - \Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}, \frac{e^{b(x+T-M)}}{\gamma}\right)\right\}.$$

Despejando el consumo inicial,

$$c^*(0) = \frac{b\gamma^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}\right)}\left(\left(S(0) + \frac{\pi_0}{r}\right) e^{rT} - \frac{\pi_0}{r}\right)}{e^{rT} e^{\frac{1}{\gamma}e^{b(x-M)} - \left[\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right](x-M)} \left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}, \frac{e^{b(x-M)}}{\gamma}\right) - \Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}, \frac{e^{b(x+T-M)}}{\gamma}\right)\right\}}.$$

Por lo tanto, el plan de consumo óptimo para el caso Gompertz es:

$$c^*(t) = \frac{b\gamma^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b}\right)}\left(\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}\right)e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t}e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{e^{b(x+t-M)}\right\}}}{e^{rT}e^{-\left[\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right](x-M)}\left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},\frac{e^{b(x-M)}}{\gamma}\right)-\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},\frac{e^{b(x+T-M)}}{\gamma}\right)\right\}}.$$

Al igual que en el plan de consumo anterior, se obtiene una fórmula cerrada con parámetros conocidos.

3.1.2.3 Makeham

$$({}_tp_0)^{\frac{1}{\gamma}} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t\left(A+Be^{b(x+s-M)}\right)\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{At+\frac{B}{b}\left(e^{b(x+t-M)}-e^{b(x-M)}\right)\right\}}.$$

Esta fuerza de mortalidad es parecida al caso previo, pero obviamente la inclusión de la constante A modifica significativamente los cálculos. Veamos estos cambios,

$$0 = e^{rT}\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}(1-e^{-rT})-c^*(0)e^{\frac{B}{b\gamma}e^{b(x-M)}}\int_0^T e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma}\right)s}e^{-\frac{B}{b\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}}\mathrm{d}s\right)$$

Despejando respecto al consumo inicial y agrupando términos de manera tal que la integral represente, nuevamente, una gamma incompleta se tiene que

$$\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r} = \frac{c^*(0)\gamma e^{rT}e^{\frac{B}{b\gamma}e^{b(x-M)}}e^{-\left[\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma}\right](x-M)}}{B\left(\frac{B}{b\gamma}\right)^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A-\gamma b}{\gamma b}\right)}}\int_0^T\left(\frac{B}{b\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}\right)^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A-\gamma b}{\gamma b}\right)}e^{-\frac{B}{b\gamma}\left\{e^{b(x+s-M)}\right\}}\frac{B}{\gamma}e^{b(x+s-M)}\mathrm{d}s,$$

lo cual implica que

$$c^*(0) = \frac{B\left(\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}\right)\left(\frac{B}{b\gamma}\right)^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A-\gamma b}{\gamma b}\right)}}{\gamma e^{rT}e^{\frac{B}{b\gamma}e^{b(x-M)}-\left[\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma}\right](x-M)}\left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma b},\frac{Be^{b(x-M)}}{b\gamma}\right)-\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma b},\frac{Be^{b(x+T-M)}}{b\gamma}\right)\right\}}.$$

En consecuencia, el plan de consumo óptimo para el caso I bajo la fuerza de mortalidad Makeham es:

$$c^*(t) = \frac{B\left(\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}\right)\left(\frac{B}{b\gamma}\right)^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A-\gamma b}{\gamma b}\right)}e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t}e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{At+\frac{B}{b}\left(e^{b(x+t-M)}\right)\right\}}}{\gamma e^{rT}e^{-\left[\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma}\right](x-M)}\left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma b},\frac{Be^{b(x-M)}}{b\gamma}\right)-\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho-A}{\gamma b},\frac{Be^{b(x+T-M)}}{b\gamma}\right)\right\}}.$$

3.1.2.4 Weibull

$$({}_tp_0)^{\frac{1}{\gamma}} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\int_0^t\left(\frac{b}{M}\right)\left(\frac{x+s}{M}\right)^b \mathrm{d}s} = e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{b}{1+b}\left(\left(\frac{x+t}{M}\right)^{1+b}-\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}\right)\right\}}.$$

Procediendo como en los casos previos, se tiene que

$$\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r} = c^*(0)e^{rT}\int_0^T e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)s} e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{b}{1+b}\left(\left(\frac{x+s}{M}\right)^{1+b}-\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}\right)\right\}}\mathrm{d}s.$$

Para resolver esta integral se ajustan adecuadamente los términos de tal manera que la expresión represente un caso particular de las siguientes integrales (ver Gradshteyn y Ryzhik (2014)):

$$\int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{4\beta}-\theta x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\beta}e^{\beta\theta^2}\left\{1-\Phi\left(\theta\sqrt{\beta}+\frac{u}{2\sqrt{\beta}}\right)\right\},$$
$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4\beta}-\theta x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\beta}e^{\beta\theta^2}\left\{1-\Phi\left(\theta\sqrt{\beta}\right)\right\}.$$

Siendo así,

$$\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}$$
$$= c^*(0)Me^{rT}e^{\frac{b}{\gamma(1+b)}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)x}\int_0^T e^{-\left[-M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right]\left(\frac{x+s}{M}\right)} e^{-\left\{\frac{1}{\frac{\gamma(1+b)}{b}}\left(\left(\frac{x+s}{M}\right)^{1+b}\right)\right\}}\frac{1}{M}\mathrm{d}s.$$

Esto es igual a

$$\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r} = c^*(0)Me^{rT}e^{\frac{b}{\gamma(1+b)}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{-\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)x}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}e^{\frac{\gamma\left(M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)^2}{2}}\left\{\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)+\frac{T}{\sqrt{2\gamma}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)\right\},$$

$$c^*(0) = \frac{\left[\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}\right]e^{-\frac{b}{\gamma(1+b)}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}}}{Me^{rT}e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)x}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}e^{\frac{\gamma\left(M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)^2}{2}}\left\{\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)+\frac{x+T}{\sqrt{2\gamma}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)\right\}}.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión anterior en el plan de consumo óptimo se tiene que

$$c^*(t) = \frac{\left[\left(S(0)+\frac{\pi_0}{r}\right)e^{rT}-\frac{\pi_0}{r}\right]e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t}e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x+t}{M}\right)^{1+b}\right\}}}{Me^{rT}e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)x}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}e^{\frac{\gamma\left(M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)^2}{2}}\left\{\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)+\frac{x+T}{\sqrt{2\gamma}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}M\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)\right)\right\}}.$$

Considerando los resultados obtenidos de los planes de consumo óptimos para el caso I podemos observar que De Moivre es poco ilustrativo, toda vez que supone en cada edad igual probabilidad de morir. Por otra parte, la solución al plan de consumo óptimo con Weibull conduce a considerar una función de distribución normal estándar, lo cual es poco realista. Por lo tanto, se debe resaltar que las soluciones Gompertz y Makeham muestran mejores condiciones para realizar estudios empíricos.

3.2 Planes de consumo óptimo en el caso II con distribuciones analíticas de T

Manteniendo los supuestos de la sección anterior sobre la tasa de interés real, $j(t) = r$, así como sobre la tasa de ganancias, $m(t) = \pi_0$ y agregando uno más con respecto a la tasa de interés de la anualidad, δ, tal que $\delta(t) = r + \mu(t)$

3.2.1 Planteamiento del problema para el caso II

Considerando los supuestos anteriormente señalados, el problema a resolver es el siguiente:

$$\underset{c}{\text{Maximizar}}\, V = \int_0^T \Omega(t)\alpha(t)g[c(t)]\mathrm{d}t,$$

sujeto a

$$c(t) \geq 0\ \forall t,$$

$$c(t) \leq \pi_0 \text{ siempre que } S(t) = 0,$$

$$\dot{S}(t) = \delta(t)S(t) + \pi_0 - c(t),$$

$$S(T) = 0.$$

Se debe tomar en cuenta que a partir de la restricción con respecto al cambio en el stock de los activos financieros, o sea, las anualidades, el cambio en el consumo con respecto al tiempo es de

$\dot{c}(t) = -\left(\ddot{S}(t) - \delta(t)\dot{S}(t) - \dot{\delta}(t)S(t)\right)$. Este resultado se utiliza posteriormente para determinar el plan de consumo óptimo a partir de los parámetros que se suponen conocidos.

Sustituyendo $\delta(t)S(t) - \dot{S}(t) + \pi_0 = c(t)$ en la función objetivo se tiene la siguiente expresión

$$\int_0^T e^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} g\left(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\right)\mathrm{d}t.$$

Aplicando la ecuación de Euler obtenemos

$$\left(\delta(t) - \rho - \mu(t)\right)e^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s} g'\left(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\right) + \frac{d\left(e^{-\rho t} e^{-\int_0^t \mu(s)ds} g'\left(rS(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\right)\right)}{dt} = 0.$$

Desarrollando la derivada con respecto al tiempo y simplificando términos, se sigue que

$$\ddot{S}(t) - \delta(t)\dot{S}(t) - \dot{\delta}(t)S(t) = -\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)\left(\delta(t)S(t) - \dot{S}(t) + \pi_0\right), \tag{30}$$

Entonces (30) se transforma en

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right),$$

esto implica que

$$c^*(t) = c^*(0)e^{\int_0^t \left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)ds} = c^*(0)e^{\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)t}. \tag{31}$$

En (31) se aprecia que el plan de consumo en el caso II es para todo t mayor que el obtenido en (29), toda vez que a (31) no se le descuenta continuamente la fuerza de mortalidad a lo largo del tiempo restante de vida del consumidor.

Por otra parte, retomando la restricción con respecto a las anualidades,

$$\dot{S}(t) - \delta(t)S(t) = +\pi_0 - c(0)e^{\frac{r-\rho}{\gamma}t},$$

la expresión anterior tiene como solución canónica a

$$S(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}\left(S(0) + \int_0^t \pi_0 e^{-\int_0^u \delta(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u - c^*(0)\int_0^t e^{-\int_0^u \delta(v)\mathrm{d}v} e^{\frac{r-\rho}{\gamma}u}\mathrm{d}u\right),$$

la cual evaluada en $t = T$ se iguala a 0, esto es,

$$0 = e^{rT} e^{\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s} \left(S(0) + \int_0^T \pi_0 e^{-ru} e^{-\int_0^u \mu(v)\mathrm{d}v} \mathrm{d}u \; - c^*(0) \int_0^T e^{-\int_0^u \mu(v)\mathrm{d}v} e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)u} \mathrm{d}u \right). \tag{32}$$

La ecuación (32) es la base sobre la que se generan los diferentes planes de consumo óptimo en la siguiente subsección.

3.2.2 Planes óptimos de consumo en el caso II

De manera similar a lo hecho en la sección 3.1.2 ahora se desarrollan los casos de los planes de consumo óptimos con sus respectivas leyes de mortalidad modificadas por la edad modal al morir considerando una anualidad, lo cual representa una cobertura ante el riesgo de longevidad.

3.2.2.1 De Moivre

$$e^{-\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{\int_0^T \frac{-1}{\omega - x - s}\mathrm{d}s} = e^{\left(ln\left(\frac{\omega - x - T}{\omega - x}\right)\right)} = \frac{\omega - x - T}{\omega - x}.$$

Nótese que este resultado no representa la probabilidad de sobrevivencia por t años de un individuo que tiene edad x, aunque la expresión es similar aquí el signo que acompaña a la integral es positivo y en la definición de la probabilidad antes mencionada se ocupa el signo negativo. Lo que sí representa la expresión anterior, y en los siguientes casos por analizarse, es un valor acumulado continuamente hasta T a una tasa $\mu(t)$. Sustituyendo en (32),

$$0 = e^{rT} \left(\frac{\omega - x - T}{\omega - x} \right) \left(S(0) + \int_0^T \left(\frac{\omega - x - u}{\omega - x} \right) \pi_0 e^{-ru} \mathrm{d}u - c^*(0) \int_0^T \left(\frac{\omega - x - u}{\omega - x} \right) e^{\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma}\right)u} \mathrm{d}u \right).$$

Al resolver estas integrales se obtienen como resultado expresiones de funciones integrales exponenciales, esto es,

$$0 = e^{rT} \left(\frac{\omega - x}{\omega - x - T} \right) \left(S(0) + \pi_0 \left[\left(\frac{r-1}{r^2} \right) (1 - e^{-rT}) + \frac{T}{\omega - x} e^{-rT} \right] - c^*(0) \left[\left(\frac{\gamma(\rho - r(1-\gamma) - \gamma)}{\left(\rho - r(1-\gamma)\right)^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{\rho - r(1-\gamma)}{\gamma}T} \right) + \frac{T}{\omega - x} e^{-\frac{\rho - r(1-\gamma)}{\gamma}T} \right] \right).$$

Despejando al consumo óptimo en 0,

$$c^*(0) = \frac{S(0) + \pi_0 \left[\left(\frac{r-1}{r^2} \right) (1 - e^{-rT}) + \frac{T}{\omega - x} e^{-rT} \right]}{\left[\left(\frac{\gamma(\rho - r(1-\gamma) - \gamma)}{\left(\rho - r(1-\gamma)\right)^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{\rho - r(1-\gamma)}{\gamma}T} \right) + \frac{T}{\omega - x} e^{-\frac{\rho - r(1-\gamma)}{\gamma}T} \right]}.$$

Luego, el plan de consumo óptimo bajo este escenario considerando la fuerza de mortalidad De Moivre es:

$$c^*(t)=\frac{\left\{S(0)+\pi_0\left[\left(\frac{r-1}{r^2}\right)(1-e^{-rT})+\frac{T}{\omega-x}e^{-rT}\right]\right\}e^{\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)t}}{\left[\left(\frac{\gamma(\rho-r(1-\gamma)-\gamma)}{\left(\rho-r(1-\gamma)\right)^2}\right)\left(1-e^{-\frac{\rho-r(1-\gamma)}{\gamma}T}\right)+\frac{T}{\omega-x}e^{-\frac{\rho-r(1-\gamma)}{\gamma}T}\right]}.$$

3.2.2.2 Gompertz

$$e^{\int_0^T\mu(s)\mathrm{d}s}=e^{\int_0^T be^{b(x+s-M)}\mathrm{d}s}=e^{\left\{e^{b(x+T-M)}-e^{b(x-M)}\right\}}.$$

Sustituyendo en (32) y agrupando términos de forma similar a lo hecho en la sección 3.1.2,

$$\begin{aligned}&0\\&=S(0)+\pi_0e^{e^{b(x-M)}}e^{r(x-M)}\frac{1}{b}\int_0^T e^{-e^{b(x+u-M)}}\left(e^{b(x+u-M)}\right)^{-\frac{r}{b}-1}be^{b(x+u-M)}\mathrm{d}u\\&-c^*(0)e^{-e^{b(x-M)}}e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)}\frac{1}{b}\int_0^T e^{-e^{b(x+u-M)}}\left(e^{b(x+u-M)}\right)^{-\left(\frac{\rho-r(1-\gamma)}{\gamma b}\right)-1}be^{b(x+u-M)}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

lo cual da como resultado, resolviendo las integrales,

$$\begin{aligned}0=S(0)+\pi_0e^{e^{b(x-M)}}e^{r(x-M)}\tfrac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\tfrac{r}{b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(-\tfrac{r}{b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}-\\c^*(0)e^{-e^{b(x-M)}}e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)}\tfrac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\tfrac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(\tfrac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Despejando al consumo óptimo inicial, se tiene que

$$c^*(0)=\frac{S(0)+\pi_0e^{e^{b(x-M)}}e^{r(x-M)}\frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\frac{r}{b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(-\frac{r}{b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}}{e^{-e^{b(x-M)}}e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)}\frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}},$$

al sustituir la expresión anterior en el plan óptimo de consumo da como resultado:

$$c^*(t)=\frac{\left[S(0)+\pi_0e^{e^{b(x-M)}}e^{r(x-M)}\frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\frac{r}{b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(-\frac{r}{b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}\right]e^{\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)t}}{e^{-e^{b(x-M)}}e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)}\frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x-M)}\right)-\Gamma\left(\frac{r(1-\gamma)-\rho}{\gamma b},e^{b(x+T-M)}\right)\right\}},$$

este plan de consumo óptimo también presenta fórmulas cerradas expresadas en parámetros que se suponen conocidos.

3.2.2.3 Makeham

$$e^{\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{\int_0^T \left(A+Be^{b(x+s-M)}\right)\mathrm{d}s} = e^{\left\{At+\frac{B}{b}\left(e^{b(x+t-M)}-e^{b(x-M)}\right)\right\}}.$$

Como hemos visto, este caso presenta similitud con Gompertz, toda vez que la diferencia entre una y otra fuerza de mortalidad radica en la constante presente en Makeham tal que con ella se representan las muertes causadas por razones diferentes a la senectud. EN consecuencia, sustituyendo la expresión de arriba en (32) y agrupando términos de forma similar a lo hecho en caso Makeham en la sección 3.1.2, se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= S(0) + \pi_0 e^{e^{b(x-M)}} b^{-1} e^{(r+A)(x-M)} \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{r+A}{b}} \int_0^T e^{-\frac{B}{b}e^{b(x+u-M)}} \left(\frac{B}{b}e^{b(x+u-M)}\right)^{-\left(\frac{r+A}{b}\right)-1} Be^{b(x+u-M)}\mathrm{d}u \\
&- c^*(0)e^{\frac{B}{b}e^{b(x-M)}} b^{-1} e^{\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right)(x-M)} \left(\frac{b}{B}\right)^{\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right)} \int_0^T e^{-\frac{B}{b}e^{b(x+u-M)}} \left(\frac{B}{b}e^{b(x+u-M)}\right)^{-\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right)-1} Be^{b(x+u-M)}\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

lo cual da como resultado, resolviendo las integrales,

$$\begin{aligned}
0 = S(0) + \pi_0 e^{e^{b(x-M)}} e^{r(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\} - \\
c^*(0)e^{-e^{b(x-M)}} e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Despejando el consumo óptimo inicial,

$$c^*(0) = \frac{S(0) + \pi_0 e^{e^{b(x-M)}} e^{r(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\}}{e^{-e^{b(x-M)}} e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\}},$$

y sustituyendo la ecuación anterior dentro del plan de consumo óptimo se obtiene:

$$c^*(t) = \frac{\left[S(0) + \pi_0 e^{e^{b(x-M)}} e^{r(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(-\frac{(r+A)}{b}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\}\right] e^{\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)t}}{e^{-e^{b(x-M)}} e^{\left(\frac{r(1+\gamma)-\rho}{\gamma}\right)(x-M)} \frac{1}{b}\left\{\Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x-M)}\right) - \Gamma\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}, e^{b(x+T-M)}\right)\right\}}.$$

3.2.2.4 Weibull

$$e^{\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s} = e^{\int_0^T \left(\frac{b}{M}\right)\left(\frac{x+s}{M}\right)^b \mathrm{d}s} = e^{\left\{\frac{b}{1+b}\left(\left(\frac{x+T}{M}\right)^{1+b} - \left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}\right)\right\}}.$$

A partir de la ecuación (32) en el tiempo T y ajustando términos para obtener el integrando que conduce a la representación de la diferencia entre funciones de distribución normal estándar acumuladas en diferentes puntos, se tiene que

$$0 = S(0) + \pi_0 M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{r\frac{x}{M}} \int_0^T e^{-Mr\left(\frac{x+u}{M}\right)} e^{-\frac{1}{\left(\frac{1+b}{b}\right)}\left(\frac{x+s}{M}\right)^{1+b}} \frac{1}{M} \mathrm{d}s$$
$$- c^*(0) M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{\left[\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right]\frac{x}{M}} \int_0^T e^{-M\left[\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right]\left(\frac{x+u}{M}\right)} e^{-\frac{1}{\left(\frac{1+b}{b}\right)}\left(\frac{x+s}{M}\right)^{1+b}} \frac{1}{M} \mathrm{d}s,$$

de modo que resolviendo las integrales obtenemos la siguiente ecuación:

$$0 = S(0) + \pi_0 M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{r\frac{x}{M}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}(Mr)^2} \left\{\Phi\left(\frac{Mr + x + T}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{Mr}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$
$$- c^*(0) M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{\left[\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right]\frac{x}{M}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right)^2} \left\{\Phi\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\left[\left[\frac{\rho + A\gamma - r(1-\gamma)}{\gamma}\right] + x\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + T\right]\right) - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\left[\frac{\rho + A\gamma - r(1-\gamma)}{\gamma}\right]\right)\right\}.$$

Despejando $c^*(0)$ y reemplazando en (31), se consigue la expresión del plan óptimo de consumo en el caso Weibull,

$$c^*(t) = \frac{\left[S(0) + \pi_0 M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} e^{r\frac{x}{M}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}(Mr)^2} \left\{\Phi\left(\frac{Mr + x + T}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{Mr}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right] e^{\left[\frac{r(1-\gamma-\rho-A\gamma)}{\gamma}\right]\frac{x}{M}} e^{\left(\frac{r-\rho}{\gamma}\right)t}}{M e^{\frac{b}{1+b}\left(\frac{x}{M}\right)^{1+b}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\rho+A\gamma-r(1-\gamma)}{\gamma}\right)^2} \left\{\Phi\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\left[\left[\frac{\rho + A\gamma - r(1-\gamma)}{\gamma}\right] + x + T\right]\right) - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\left[\frac{\rho + A\gamma - r(1-\gamma)}{\gamma}\right]\right)\right\}}.$$

Todos estos planes de consumo óptimo son superiores a sus contrapartes obtenidas en el caso I, toda vez que como ya se señaló previamente, el consumidor en el caso II deja de descontar su respectiva fuerza de mortalidad, lo que implica una cobertura ante el riesgo de longevidad. Claro está que anualidad percibida por este consumidor se suspende al momento de su muerte o cuando alcanza la edad $x + T$.

Nuevamente, se aprecian condiciones similares al caso I respecto a los planes de consumo óptimo, esto es, tanto la solución Gompertz como la solución Makeham conducen a considerar en ambos casos a la función gamma, la cual ciertamente es incompleta, pero suele ser una buena referencia para estudios de riesgo, como lo es este escenario.

DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v18i3.892

4. Conclusiones

En el presente documento se han desarrollado las ideas de las decisiones de consumo e inversión de un consumidor jubilado. Se hizo una revisión histórica de algunas obras de autores destacados en la literatura económica. Se observó que es normal suponer en los modelos económicos que el tiempo restante de vida es conocido, ya sea con horizonte finito o infinito. En contraste, se presentó un modelo de decisión de consumo basado en aspectos actuariales, el autor, Yaari, llama notas actuariales a las anualidades y, en particular, cuando compra este activo realmente adquiere una anualidad. Este modelo, llamado caso II en esta investigación no sólo suaviza la función de consumo a lo largo del tiempo, sino que le permite al consumidor verdaderamente cubrirse ante el riesgo de longevidad, lo cual representa una gran diferencia respecto al caso I, en donde el individuo se expone a este riesgo sin cobertura y dependiendo completamente de una sola fuente de recursos. Este hecho se aprecia claramente al comparar las modificaciones sufridas por las ecuaciones (28) y (30), las cuales representan las soluciones generales de la tasa de consumo en el caso I y el caso II, respectivamente. La diferencia consiste en el término $\mu(t)/\gamma$, que representa el riesgo de longevidad expresado como el cociente de la fuerza de mortalidad al tiempo t y el nivel de aversión al riesgo, λ.

Se propusieron una serie de escenarios particulares asumiendo una función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante en todos ellos, pero proponiendo cuatro diferentes fuerzas de mortalidad, las más frecuentes en la literatura de ciencias actuariales, para determinar los planes óptimos de consumo, así como las variantes correspondientes a los casos I y II, de personas en el retiro, de tal manera que en todos los escenarios se obtienen soluciones cerradas. A pesar de trabajar con las fuerzas de mortalidad con menos parámetros, se puede apreciar lo complicado que es identificar en cada escenario la anualidad correspondiente, que no es más que la diferencia entre las soluciones de los casos I y II de acuerdo a cada fuerza de mortalidad. Analizar otras fuerzas de mortalidad menos frecuentes, pero con mayor cantidad de parámetros sólo eleva el nivel de complejidad de los cálculos y no garantiza encontrar soluciones cerradas.

A saber, no existe una investigación similar tal que explore las trayectorias óptimas del trabajo de Yaari con diversas fuerzas de mortalidad sin perturbaciones estocásticas. Esta investigación resulta pertinente pues hace énfasis en la necesidad de disponer de una cobertura ante el riesgo de longevidad, lo cual permitirá mejores niveles en el consumo futuro. Los resultados obtenidos pueden ayudar a comprender la relevancia de la capacidad de ahorro en las primeras etapas de vida de un individuo. En específico las del caso II, pueden permitir mejorar los productos ofrecidos por las aseguradoras para el beneficio de los asegurados, de la misma manera los gobiernos pueden buscar incidir en estos parámetros para incrementar el bienestar de los pensionados.

Evidentemente, queda para una futura investigación realizar un ejercicio similar para el escenario donde el individuo desea dejar un legado a sus familiares al momento de su muerte. Del mismo modo, se pueden analizar fuerzas de mortalidad recientemente estudiadas en las ciencias actuariales y en la demografía, en especial, fuerzas de mortalidad estocásticas. Una extensión más se puede centrar en el estudio de la tasa subjetiva de descuento, la cual está íntimamente relacionada con el patrón de consumo del individuo, toda vez que esta tasa refleja el nivel de intercambio entre el consumo presente y el consumo futuro. Llevar estos modelos, incluidos los presentados en este trabajo que tienen en cuenta una edad modal al morir, al plano de la estadística ayudaría a plantear escenarios de política pública o a generar información útil para las aseguradoras respecto al patrón de consumo de los consumidores en los últimos años de sus vidas. Claro está, estos resultados son útiles para ser considerados en países en donde los individuos muestran mayor tendencia a vivir solos, sin descendencia o bien, sin responsabilidad económica alguna con respecto a alguna pareja o familiar cercano. Un estudio de esta naturaleza aplicado a México enriquecería la literatura en economía de la población, de manera que se podría arrojar luz sobre cómo se pudiera estar modificando la tendencia de las personas de la tercera edad respecto a sus decisiones de vida, en especial, su consumo, durante esta fase de la vida. Además, ayudaría a comprender cómo pueden influir estas decisiones, considerando la tasa de crecimiento actual de la población, la tasa de desempleo, los impuestos de seguridad social, entre otros, a los niveles de reserva actuarial en función de la tasa de interés ofrecida en los diferentes planes de pensión ofrecidos por el gobierno y las compañías aseguradoras.

Referencias

[1] Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui, N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravanelli, C., & Salhi, Y. (2012). Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian actuarial journal*, *2012*(3), 203-231. https://doi.org/10.1080/03461238.2010.511034

[2] Chavez, E. S., Milanesi, G., & Pesce, G. (2017). Funciones de utilidad y estimación de la aversión al riesgo. *Escritos Contables Y De Administración*, *7*(2), 97–118. https://doi.org/10.52292/j.eca.2016.417

[3] Damián, A. (2016). Seguridad social, pensiones y pobreza de los adultos mayores en México. *Acta Sociológica*, *70*, 151-172. http://dx.doi.org/10.1016/j.acso.2017.01.007

[4] De Moivre, A. (1725). *Annuities Upon Lives: Or, The Valuation of Annuities Upon Any Number of Lives..*. NewsBank Readex.

[5] Ebbinghaus, B. (2015). The privatization and marketization of pensions in Europe: A double transformation facing the crisis. *European Policy Analysis*, *1*(1), 56-73. https://doi.org/10.18278/epa.1.1.5

[6] Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (Vol. 2). Apud Marcum-Michaelem Bousquet y Socios.

[7] Fisher, Irving. (1930). *The Theory of Interest: As Determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest It*. Macmillan. New York.

[8] Friedman, Milton. (1957). *A Theory of the Consumption Function*. Princeton, NJ: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9780691188485

[9] Gerber, H. U. (2013). *Life insurance mathematics*. Springer Science y Business Media. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03460-6

[10] Gompertz, Lewis (1997 [1824]): *Moral inquiries on the situation of man and of brutes*, London: Open Gate.

[11] Gradshteyn, I. S., y Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press. https://doi.org/10.1016/c2010-0-64839-5

[12] Graunt, J. (1939). *Natural and political observations made upon the bills of mortality*. American Journal of Sociology, 45(2). https://doi.org/10.1086/218299

[13] Halley, E. (1693). VI. An estimate of the degrees of the mortality of mankind; drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, *17*(196), 596-610. https://doi.org/10.1098/rstl.1693.0007

[14] Horiuchi, S., Ouellette, N., Cheung, S. L. K., y Robine, J. M. (2013). Modal age at death: lifespan indicator in the era of longevity extension. *Vienna Yearbook of Population Research*, 37-69. http://dx.doi.org/10.1553/populationyearbook2013s37

[15] Huang, H., Milevsky, M. A., y Salisbury, T. S. (2012). Optimal retirement consumption with a stochastic force of mortality. *Insurance: Mathematics and Economics*, *51*(2), 282-291. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.03.013

[16] Huang, H., Milevsky, M. A., & Salisbury, T. S. (2017). Retirement spending and biological age. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *84*, 58-76. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2017.09.003

[17] Leal Fernández, G. (2014). 2013: Condiciones para el retiro y el desafío de la longevidad en México. *Estudios políticos (México)*, (31), 107-128. http://dx.doi.org/10.1016/S0185-1616(14)70573-6

[18] Makeham, W. M. (1867). On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, *13*(6), 325-358. https://doi.org/10.1017/s2046166600003238

[19] Marshall, A. (1890). *Principles of economics*. Macmillan. London.

[20] Malthus, Thomas R. (1798). An Essay on the Principle of Population. London: W. Pickering, 1986.

[21] Missov, T. I., Lenart, A., Nemeth, L., Canudas-Romo, V., y Vaupel, J. W. (2015). The Gompertz force of mortality in terms of the modal age at death. *Demographic Research*, *32*, 1031-1048. http://dx.doi.org/10.4054/DemRes.2015.32.36

[22] Modigliani, F. (2015). The collected papers of Franco Modigliani. Chapter: Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data, pp. 388-436. MIT Press https://doi.org/10.7551/mitpress/1923.003.0004

[23] Olivieri, A., and Pitacco, E. (2009). Stochastic mortality: The impact on target capital. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *39*(2), 541-563. https://doi.org/10.2143/AST.39.2.2044647

[24] Palafox-Roca, A. O., y Venegas-Martinez, F. (2014a). Average consumer decisions in an economy with heterogeneous subjective discount rates and risk aversion coefficients: The finite horizon case. *Economics Bulletin*, 842-849.

[25] Palafox-Roca, A. O., y Venegas-Martinez, F. (2014b) Decisiones de Consumo e Inversión en una Economía con Preferencias Heterogéneas con Horizonte Infinito, Capítulo del libro “Administración de Riesgos, Vol 5”. Editado por la Universidad Autónoma Metropolitana, México.

[26] Palafox-Roca, A. O., Rodríguez-Aguilar, R., Castillo-Ramírez, C. E., y Venegas-Martínez, F. (2020). Optimal consumption decisions of family networks with similar felicity functions. *Wireless Networks*, *26*(8), 5703-5712. http://dx.doi.org/10.1007/s11276-019-02063-x

[27] Rae, J. (1834). *Statement of some new principles on the subject of political economy: exposing the fallacies of the system of free trade, and of some other doctrines maintained in the Wealth of nations*. Hillard, Gray. Boston

[28] Šiaulys, J., & Puišys, R. (2022). Survival with Random Effect. *Mathematics*, *10*(7), 1097. https://doi.org/10.3390/math10071097

[29] Sigler, L. (2002). *Fibonacci’s Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano’s book of calculation*. Springer Science y Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0079-3_1

[30] Smith, A. (1776). An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. The Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith, Vol. 2: An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, Vol. 1. doi:10.1093/oseo/instance.00043218

[31] Teugels, J. L., and Sundt, B. (2004). The encyclopedia of actuarial science. https://doi.org/10.1002/9780470012505

[32] Verhulst, P. F. (1838). *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. Corresp. Math. Phys., 10, 113-126.

[33] Vidal, E. L. K., & Aguilar, C. C. (2013). Instituciones, transición demográfica y riesgos del sistema de pensiones. *Norteamérica*, *8*(2), 105-126. https://doi.org/10.20999/nam.2013.b004
[34] Villagómez, F. A. (2014). El ahorro para el retiro. Una reflexión para México. *El trimestre económico*, *81*(323), 549-576. https://doi.org/10.20430/ete.v81i323.122
[35] Von Böhm Bawerk, E. (1889). *Capital and Interest*. Institut für Wertewirtschaft.
[36] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*. https://doi.org/10.1115/1.4010337
[37] Yaari, M. E. (1965). Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies*, *32*(2), 137-150. https://doi.org/10.2307/2296058