¿Es repugnante el infinito actual?

Is the actual infinity disgusting?

Alejandro Sanvisens Herreros
Instituto Jaume Salvador i Pedrol
asanvise@xtec.cat

Resumen: Se analiza el concepto del infinito y se compara la concepción aristotélica con la platónica. Se revisa la discusión entre San Buenaventura y Santo Tomás de Aquino sobre la cuestión de la demostrabilidad de la finitud temporal del mundo.

Se presenta críticamente la postura de Georg Cantor, analizando su proceso diagonal, así como la variante de Alan Turing, y se comenta la oposición que tuvieron sus ideas en su momento.

Se introduce la paradoja del señor de las abscisas, que demuestra la inconsistencia de la teoría del infinito actual y su carácter lógicamente repugnante.

Se indica la repercusión de la eliminación del infinito actual en la física, la matemática y la teología, como respuesta a G. Boffi.

Palabras clave: Georg Cantor, Tomás de Aquino, Alan Turing, paradoja.

Abstract: *The concept of infinity and the Aristotelian conception is compared with the Platonic one. The discussion between Saint Bonaventure and Saint Thomas on the question of the demonstrability of the temporal finiteness of the world is reviewed.*

The position of Georg Cantor is critically presented, analyzing its diagonal process, as well as the Alan Turing variant, and the opposition that his ideas had at the time is commented.

The paradox of the lord of the abscissa is introduced, which shows the inconsistency of actual infinity theory, and its logically disgusting character.

The impact of the elimination of actual infinity in physics, mathematics and theology is indicated, in response to G. Boffi.

Keywords: *Georg Cantor, Thomas Aquinas, Alan Turing, paradox.*

Artículo recibido el día 8 de junio de 2021 y aceptado para su publicación el 27 de julio de 2021.

I. El concepto de infinito

La cuestión sobre el concepto de infinito y sobre su relación con la naturaleza y con Dios ha vuelto a interesar vivamente a filósofos y científicos en la actualidad. Un exponente de esto es el excelente artículo de Giandomenico Boffi sobre las repercusiones de la concepción cantoriana del infinito en la ciencia y en la teología (Boffi, 2021).

Las palabras contienen información siempre valiosa acerca de los conceptos que expresan. La palabra infinito, en su origen, indica sin fin, sin límite, no terminado, no acabado, no completado, como expresa claramente la lengua italiana. Se trata de un participio del verbo *finire*. Una obra es finita cuando se ha terminado de construir; una obra en construcción no terminada, puede llamarse no finita. Pero si la obra es inacabable, entonces la partícula negativa (no) ya no es provisional, sino esencial, y queda incorporada a la palabra que la expresa, obteniendo el adjetivo infinito.

La construcción de una obra en la naturaleza por medio de un plano y de unas instrucciones es análoga al despliegue de un concepto en la mente. Si el plano y las instrucciones no tienen previsto un final, la obra quedará por siempre inacabada y podrá considerarse infinita. Si el concepto mental y su algoritmo de desarrollo permite la creación indefinida de nuevos elementos que se ajustan al concepto, el despliegue del concepto será inacabable y podrá considerarse infinito. Pero observemos bien que, si no hay fin, límite o último elemento, no es por ningún misterio brumoso del infinito, sino porque el despliegue no ha terminado, no ha "finito" y puede seguir creciendo sin limitación.

Este análisis de la palabra "infinito" nos ha llevado al concepto aristotélico del infinito potencial. Pero Platón concibió un mundo en el que todos los conceptos estaban totalmente desplegados en acto. El concepto de casa, por ejemplo, estaba desplegado, existiendo en dicho mundo las ideas de todas las casas posibles en forma y tamaño. Si se colocaban mentalmente todas estas casas posibles en fila india sobre un camino recto a distancias iguales, se obtenía un conjunto ordenado en el que cada casa se podía etiquetar con un número natural distinto. Existía una primera casa etiquetada con el número uno, pero no existía una última casa. Era un conjunto infinito, pero acabado, totalmente construido, en el que todas las casas posibles, ¡todas!, estaban allí coexistiendo. Eso es un ejemplo del llamado infinito actual.

Ya desde el siglo V a.C. se encontraron paradojas (como las de Zenón) que hacían ver la imposibilidad de este concepto[1]. El concepto de infinito actual se consideró sospechoso de ser contradictorio, absurdo, repugnante para la mente, pero no había una forma clara de demostrar esta contradicción, sobre todo desde el momento en que la teología insistía en que el poder de Dios era ilimitado y podría, por tanto, haber creado una multiplicidad infinita, no sucesivamente, sino de golpe, aunque en verdad no lo hubiera hecho.

En el concepto de infinito actual platónico desaparece la idea de inacabado, que era la que explicaba por qué no tenía fin o límite, y solo se mantenía la idea de ilimitado, que aparecía sin fundamento, como un misterio brumoso. ¿Cómo podía no tener un último, una colección de elementos que podían colocarse todos en una fila ordenada? Si los filósofos hubieran meditado a fondo en esta pregunta, como haremos nosotros aquí, se hubiera evitado mucha pérdida de tiempo en consideraciones falsas.

II. Los conceptos de conjunto y de número

Para hablar del infinito hemos de referirnos a multiplicidades de entes. En algunos casos las multiplicidades se pueden considerar completas formando un todo que ha recibido el nombre de conjunto. En otros casos resulta una contradicción cuando se agrupan los entes de la multiplicidad para formar un todo (un conjunto); se dice entonces que la multiplicidad es inconsistente. Una de las formas de plantear el problema rector de este artículo es: ¿Pueden existir los conjuntos infinitos? O lo que es equivalente: ¿alguna multiplicidad infinita es consistente?

En 1883, Cantor definió "conjunto" así: "Entiendo por 'multiplicidad' o 'conjunto' en general, toda multitud que pueda pensarse como uno, esto es, toda reunión de elementos determinados, que puedan ser relacionados

[1] La resolución de estas paradojas no consistía solo en calcular el límite de una sucesión infinita de sumas, sino en analizar si es posible llegar a este límite pasando por unos supuestos infinitos puntos. El infinito no se puede recorrer. Los cantorianos creen que sí, pero topan con un problema insoluble: si se va encendiendo y apagando alternativamente la conocida lámpara de James Thomson a medida que se va pasando por los supuestos infinitos puntos de la sucesión, al llegar al final ¿cómo estará la lámpara: encendida o apagada? La única solución consiste en considerar que los puntos no existen hasta que no se determinan por medio de paradas siempre en número finito. El infinito actual no existe (Sanvisens,2019, 51-65).

en un todo mediante una ley." (Cantor, 1883, 204.). Esta definición es la que tienen en mente todos los matemáticos cuando hablan de conjuntos, aunque a la vista de las contradicciones (paradojas) a las que se ha llegado con ella cuando se han referido a ciertos conjuntos (infinitos) de conjuntos, se considera actualmente que el conjunto es indefinible, que es un algo sujeto a axiomas que restringen las definiciones de Cantor.

Gottlob Frege concibió los conjuntos como extensiones de los conceptos. Todos los objetos que caen dentro de un concepto (o ley) forman la extensión de este concepto, que puede llamarse Conjunto. El conjunto, entonces, puede definirse de dos maneras: por extensión, listando todos sus elementos; o por intensión (o comprensión) mediante una propiedad o característica común a todos los elementos (la ley, o el concepto). El problema más grave de la matemática actual consiste en identificar concepto y conjunto. El concepto es un generador de elementos (y de conjuntos), pero de ninguna manera es el conjunto de elementos que puede generar. La matemática actual comete el error de identificar el concepto de número natural con el conjunto de todos los números naturales. Al cometer este error, encuentra evidente que exista el conjunto de los números naturales ya que nadie puede dudar de la existencia del concepto de número natural, y pocos han comprendido que no todas las extensiones conceptuales (multiplicidades) pueden constituir un todo sin caer en contradicción.

La filosofía matemática actual ha conservado el concepto de número concebido por Frege como un conjunto de conjuntos coordinables, pero ni los matemáticos mismos creen que los números sean conjuntos. Cuando se profundiza en la moderna teoría de números que constituye un logro científico formidable, se advierte enseguida que un número es un concepto, algo que tienen en común todos los miembros de una clase de equivalencia. Identificar concepto con conjunto lleva a definir número transfinito (exista o no), como el conjunto de todos los números transfinitos (igual que se hace con el concepto de número natural), pero Cantor mismo demostró que la multiplicidad de los números transfinitos es inconsistente, por lo que no puede ser considerada como un conjunto.

Los números son conceptos que expresan una relación entre una multitud y la unidad, como afirman Aristóteles y Santo Tomás.

III. La postura de Santo Tomás de Aquino sobre el infinito

Es muy difícil sintetizar la postura de Santo Tomás al respecto porque, aparentemente es distinta en sus diferentes obras y además la expresión infinito actual tiene un distinto significado aplicado a la forma que aplicado a la materia.

Santo Tomás consideraba que lo infinito era, simplemente, lo ilimitado, aquello que carece de límites (Delgado Reyes, 2008, 1). Aceptaba lógicamente la existencia del infinito potencial y, aunque no creía que existiese el infinito actual en la naturaleza, en principio, en algunas de sus obras no consideraba imposible que Dios hubiera creado un mundo con una infinidad actual de objetos, es decir, no consideraba repugnante (contradictorio) el infinito actual. Al final de su opúsculo *Sobre la eternidad del mundo* dice Aquinas: "Aún está por demostrar que Dios no pueda hacer que haya infinitos seres en acto".

El doctor angélico en las mismas obras en que no encuentra imposible que pueda existir una magnitud infinita, argumenta, sin embargo, que en el mundo físico, no puede darse (Gómez Camacho, 2006, 276).

Ahora bien, tanto Aristóteles como Santo Tomás consideran que el infinito no es un todo completo, sino una parte (algo incompleto)[2]. Santo Tomás considera[3] que, puesto que la materia es terminada por la forma (ya que está en potencia de recibir muchas formas, pero es determinada por una) y la forma por la materia (pues la forma, en sí, es común a muchos individuos, pero se determina al ser recibida por una materia individual), el infinito se puede atribuir tanto a la materia como a la forma, pero de manera distinta, pues la materia es perfeccionada por la forma recibida, mientras que la forma es contraída por la materia, sin perfeccionarse. Por eso el infinito se considera imperfecto (potencial) cuando se atribuye a la materia sin forma, pero en cambio es perfecto (actual) ("aquello de lo cual nada hay fuera"[4]) cuando se atribuye a la forma no determinada por la materia. En este sentido puede existir un infinito actual formal (según la cantidad virtual y no según la cantidad dimensiva)[5].

---

2 Cf. *Physica,* Γ 6, 207 a 25-28; Cf. *De caelo* A 12, 283 a 9-10. Y los comentarios de Sto. Tomás a estos textos.

3 *Summa Theologiae* I, q. 7 a. 1; ibid. a.2; Cf. *Quodlibet* 3, q.2, a.1. *Comentario al libro IV de las Sentencias* d.49, q.2, a.1, ad 12.

4 *Physica,* Γ 6, 207, a. 8-10.

5 Cf. *De veritate,* q. 29. a.3

Santo Tomás considera que no existe un número infinito, pues, según la definición clásica de esta cantidad dimensiva, número es una multitud medida por la unidad, y "toda multitud existente debe estar en alguna especie de multitud"[6], y las especies de multitud son según las especies de los números, y ninguna especie de número es infinita.

Santo Tomás, en su *Summa Theologiae* concluye que es posible que exista una multitud infinita en potencia, pero es imposible que exista en acto[7]. De forma similar Aristóteles, en el libro III de su *Physica*, admite que una magnitud finita pueda dividirse infinitamente, pero no considera posible el infinito en acto (Prevosti, 1984, 316).

Mientras que San Agustín o San Buenaventura (el doctor seráfico) consideraron que era posible demostrar que el mundo no era infinito temporalmente, Santo Tomás, aun creyendo en la finitud temporal del mundo, insistió en que no podía probarse ni la eternidad ni la no eternidad de este (Saranyana, 1973, 128).

El argumento del doctor seráfico en el comentario al libro II de las sentencias[8] era el siguiente: si el mundo fuera infinito temporalmente, tendría que haber pasado infinito tiempo para poder llegar al momento presente, pero no se puede atravesar el infinito, por consiguiente, no podría haberse llegado al día de hoy.

Santo Tomás[9] propuso el siguiente contraargumento: desde cualquier día del pasado hasta el día de hoy, existe solamente un número limitado de tiempo. Considerado desde el presente, el pasado constituye recorrido hacia atrás, un infinito potencial que se puede ir alcanzando sucesivamente, ya que el lapso de tiempo hacia cualquier día del pasado es finito, como se ha dicho al principio.

Salta a la vista que el contraargumento de Santo Tomás es defectuoso porque no es suficiente que se pueda recorrer el trecho que hay desde cualquier día del pasado hasta hoy. Primero hay que llegar a cualquiera de estos días del pasado desde un pasado anterior de duración infinita, ya que, dada la flecha temporal, no se puede llegar a ningún instante a no ser que se haya llegado previamente a todos los momentos anteriores, y, al decir todos, se entiende los infinitos momentos del pasado, atravesando el infinito, cosa

[6] *Summa Theologiae,* I, q. 7, a. 4.
[7] *Summa Theologiae*, I. q. 7, a.4.
[8] San Buenaventura, II sent. 1, 1, 1, 2, 3.
[9] Santo Tomás, *Summa Theologiae*, I, q. 46, a. 2, obj. 6.; *Summa contra gentes*, 2, 38.

imposible. Parece que Santo Tomás presintió la debilidad de su contraargumento y por eso lo complementó con un recorrido hacia atrás alcanzando progresivamente todos los momentos del pasado considerado como un infinito potencial. Pero aquí volvió a equivocarse por dos razones: la primera es que el infinito potencial nunca alcanza a todos los momentos, porque no acaba nunca; la segunda es que la flecha del tiempo es inexorable, viajando siempre hacia delante, nunca hacia atrás, cosa que constituye un auténtico reto para la investigación científica y filosófica.

Por otra parte, el problema del pretérito indefinido no se soluciona, como pretende Santo Tomás en los textos citados, afirmando que Dios lo podría contemplar sin recorrerlo, porque, al tratarse de una evolución, se producen (actualizan) una serie indefinida (infinita) de cambios obteniendo un infinito actual y no un infinito potencial al que Santo Tomás llama infinito sucesivo. F. Van Steenberghen dice: "la eternidad del mundo implicaría claramente la realización en el pasado, de series infinitas; (tal eternidad) supone, pues, el infinito adquirido, el infinito en acto" (Van Steenberghen, 1966, 461, 463). El término "actual" es equívoco (puede significar "realizado" o "presente"), lo cual ha llevado a algunos filósofos, como A. Zimmermann, a considerar que: "una serie infinita de acontecimientos sucesivos no constituye en realidad un infinito en acto" (Zimmermann, 1976, 324-325). Pero el hecho de que los acontecimientos sean "pasados" y no "actuales" (presentes), no quiere decir que no se hayan "actualizado" (realizado), constituyendo un infinito actual.

Concluyendo: el argumento de San Buenaventura sobre la finitud temporal del mundo es cierto y de gran importancia.

Respecto del tema de la infinita divisibilidad del continuo, el Aquinate se inclina a que Dios no podría actualizarla ya que la divisibilidad es esencialmente sucesiva. El continuo no puede considerarse dividido en acto en puntos. Como han afirmado la mayor parte de los matemáticos, una línea no es un conjunto de puntos. Asimismo, según el doctor angélico, los números naturales son infinitos en potencia, no en acto (Delgado Reyes, 2008, 8).

Muchas de las ideas ya consideradas por Santo Tomás respecto al infinito han sido luego retomadas por autores de otras épocas, como Galileo, Dedekind, o el mismo Cantor. Por ejemplo, hablando del infinito potencial, decía: "las especies de los números pares son infinitas e igualmente las de los impares, y sin embargo los números pares e impares son más que los pares" (*Tomás de Aquino*, *S.T.*III, q. 10, art. 3). También, en el mismo artículo 3 decía que en una línea hay potencialmente infinitas partes, en otra línea también hay infinitas partes, pero en las dos líneas consideradas conjuntamente hay más partes que en cada una, cosa extraña ya que el infinito se consideraba insuperable. Solucionaba este problema de la única manera que puede solucionarse, esto es, admitiendo que el infinito es potencial.

Santo Tomás se refería también a la jerarquía infinita de las relaciones inteligibles y lógicas, como por ejemplo entender algo, entender que se entiende algo, entender que se entiende que se entiende algo, etc.; o bien la serie: La proposición P es verdad; la proposición de que P es verdad, es verdad; la proposición de que la proposición de que P es verdad, es verdad, es verdad; etc.

Esta idea de Santo Tomás fue aprovechada por Dedekind y también por Cantor, a quien le hizo ver que el infinito potencial (el verdadero infinito, como él mismo lo llamaba), era ineludible, ya que existían multiplicidades auténticamente infinitas, que no constituían conjuntos.

IV. La postura de Georg Cantor

En pleno siglo XIX, cuando la matemática utilizaba únicamente el infinito en un sentido potencial, cuando la filosofía ya había resuelto todas las antiguas paradojas del infinito con la postura aristotélica y la clarividente actualización bergsoniana, Georg Cantor resucitó el infinito actual platónico y le dio un ropaje matemático que produjo un verdadero escándalo tanto entre los filósofos tomistas, como, sobre todo, entre los matemáticos más renombrados de su época.

Todos conocían la advertencia de Galileo que decía que, de admitir los conjuntos infinitos completos, habría tantos números pares como naturales, ya que podía establecerse una correspondencia biunívoca entre ambos tipos de números. En el *Diálogo relativo a dos nuevas ciencias*, Galileo formuló una paradoja célebre según la cual por cada número cuadrado perfecto hay un número entero (su raíz cuadrada), y por cada número entero hay un cuadrado perfecto. Eso le llevó a Galileo a concluir que los conceptos de igual, mayor y menor no eran aplicables a los conjuntos infinitos, los cuales, por lo tanto, no podían considerarse completos. El genial Galileo comprendió que la única solución de estas paradojas y de otras de carácter geométrico relativas a correspondencias entre puntos de segmentos de distinta longitud, era la concepción aristotélica del infinito potencial. En efecto, cuando consideramos el infinito como potencial, la correspondencia imaginada como una colección infinita de flechas que unen a los elementos de un conjunto con los del otro, no está terminada, y siempre hay que seguir imaginando nuevas flechas para unir los nuevos elementos que siempre van surgiendo en uno y otro conjunto. Nunca se llega al emparejamiento de todos los elementos, lo cual llevaría a un absurdo. Nunca se puede actualizar (completar) esta correspondencia, porque, además, no existen conjuntos infinitos actuales (completos), y los segmentos no son conjuntos de infinitos puntos, sino espacios donde se pueden marcar puntos indefinidamente.

Cantor se opuso al parecer general y defendió la existencia de conjuntos con infinitos elementos (infinito actual) proponiendo que su modo de compararlos era, precisamente el análisis de la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los elementos de un conjunto y los elementos de otro. De esta manera demostró con gran ingenio que el conjunto de los números naturales era equivalente al de los pares, al de los cuadrados perfectos, al de los racionales (que comprenden a los enteros), al de los algebraicos (aquellos que son la solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes racionales, y que comprenden a los racionales)[10]. Quedaba por ver si también era equivalente al de los números trascendentes (los que no son solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales). En lugar de esto buscó si era equivalente al de los números reales (la totalidad formada por los algebraicos y los trascendentes).

Esta investigación le llevó a "demostrar" que no podía existir ninguna correspondencia biunívoca entre los números naturales y los números reales, lo cual llevaba a la conclusión de que estos dos conjuntos no eran equivalentes; es decir, que existían más números reales que naturales. Dicho de otra manera: que existían como mínimo dos infinitos con distinto cardinal (número de elementos). Para esta demostración utilizó primero el método de los intervalos encajados, que solo iba destinada a los expertos, pero después encontró la manera de expresar la misma demostración (la misma idea de los intervalos encajados) de una forma tan didáctica que la podía entender todo el mundo, incluso un bachiller. Se trata del famoso proceso de la diagonal de Cantor, que vamos a resumir brevemente:

10 Los números irracionales (que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros) comprenden buena parte de los algebraicos y todos los trascendentes.

De entrada, Cantor hace tres suposiciones: que existe el conjunto infinito de los números naturales (N)(en el epígrafe II hemos visto que la existencia de este conjunto no es universalmente aceptada), que existe el conjunto infinito de los números reales (R), y que todo número real comprendido entre 0 y 1 puede expresarse con infinitas cifras decimales (en el epígrafe VI demuestro que esto no es posible). Después hace una suposición *ab absurdum*: considera que sea posible establecer una correspondencia biunívoca entre N y R.

Entonces imagina una serie infinita de filas en las que cada número natural se vea asociado con un número real entre 0 y 1. Los números reales se colocan en esta lista de filas sin ningún orden establecido. Pongamos un ejemplo numérico imaginario de este tipo de correspondencia:

N → R entre 0 y 1 ([0, 1])
1 → 0,**3**2750008911116 ...
2 → 0,1**6**096665316755 ...
3 → 0,24**9**08855541007 ...
4 → 0,336**8**8600000532 ...
5 → 0,0228**6**711088754 ...
... .

He puesto en negrita las cifras de la diagonal de esta columna infinita en la que deben figurar todos los números reales entre 0 y 1.

Entonces Cantor crea un nuevo número real cuyas cifras decimales sean las cifras de esta diagonal a las que se añade un 1, excepto cuando la cifra es el 9, en cuyo caso se pone un cero.

Este nuevo número, en el ejemplo imaginado aquí sería el siguiente: 0,47097... en donde estos tres puntos suspensivos representan infinitas cifras decimales formadas siguiendo la misma regla.

Este nuevo número, dice Cantor, es un número real entre 0 y 1, y, como tal, debería figurar entre los números de esta columna infinita en la que están todos los reales entre 0 y 1. Pero, por otra parte, no puede ser ningún número de esta columna, ya que difiere de cada uno de ellos precisamente en la cifra de la diagonal. Esta contradicción hace concluir a Cantor que la suposición de partida de que podía existir una correspondencia biunívoca entre N y R y era falsa. Es decir, existe, como mínimo un número real (el creado por Cantor en el proceso diagonal) que no es el correspondiente (la imagen) de ningún número natural. El cardinal de R es, pues, mayor que el cardinal de N.

En esta "demostración" no hay una sola hipótesis de partida, sino cuatro: que existe N, que existe R, que todo número real puede representarse con infinitas cifras decimales y que existe una correspondencia biunívoca entre N y R. Admitiendo estas cuatro hipótesis, Cantor crea un nuevo número que tiene que estar en la lista de los números R, pero que no puede estar en ella. Es decir, surge una contradicción. Un buen lógico diría que alguna de las cuatro hipótesis de partida debería ser falsa, pero nunca podría decidir cuál de ellas es la falsa, como hace Cantor al pontificar que la hipótesis falsa es la última. Solo eso descalifica esta "demostración" porque muchos pensamos que las falsas son, precisamente, las tres primeras.

Pero el defecto más grave de la "demostración" es otro en el que vale la pena detenerse. Se trata de la realidad del "número real" creado por Cantor con las cifras de la diagonal modificadas. Solo hay dos modos de definir un número a través de sus cifras: a) indicando un algoritmo de formación de todas sus cifras o b) indicando todas y cada una de sus cifras. Si existiera un algoritmo que permitiera ordenar todos los números reales, y siempre que las cifras decimales de cada número también pudieran calcularse algorítmicamente, entonces el número creado por Cantor estaría perfectamente definido del modo a). Pero este no es el caso. Precisa y expresamente Cantor pone los números reales de su columna en desorden, sin ninguna regla o algoritmo de colocación. Por esta sencilla razón, el "número real" que él construye no está definido del modo a). Pero entonces debería estar definido del modo b) para poder hablar de algo. Pero para definirlo del modo b) deberían especificarse todas y cada una de sus cifras decimales, que son infinitas. Esto es imposible. Por consiguiente, Cantor no define ningún número, y, por tanto, no hay ninguna contradicción. La "demostración" de Cantor es una falacia (Sanvisens, 2019, 29)

Los matemáticos cantorianos llaman a ese "número" quimérico inexistente, un número no computable o número aleatorio. Se trata de "números" construidos por diablillos aleatorios que van añadiendo cifras decimales sin ninguna ley (en desorden absoluto) uno tras otro en un proceso infinito que no acaba nunca. "Números" que nunca terminan de estar construidos o definidos y que no pueden definirse porque no existe ningún algoritmo que determine implícitamente todas sus cifras. Considero poco riguroso admitir la existencia de "números" no definidos ni por un algoritmo ni por el listado completo de sus cifras. Es una forma de no hablar de nada, pero de hacer creer que se está hablando de algo.

Un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones, y puede materializarse en forma de lo que se llama una máquina de Turing. Los números que pueden ser generados por máquinas de Turing se denominan números computables, que, a mi modo de ver, son los únicos números existentes. Los "números" que no pueden ser generados por algoritmos finitos (máquinas de Turing), se denominan no computables (a mi modo de ver, inexistentes).

Alan Turing demostró magistralmente que los algoritmos finitos (máquinas de Turing), y por consiguiente, los números computables, son numerables.

Supongamos que exista una lista ordenada (según un algoritmo) de los números computables. Podemos admitir esta lista como un infinito potencial, ya que dicho algoritmo permite ir obteniendo todos los números potencialmente. Están ordenados (tanto la lista, como cada una de las cifras de cada número). El hecho de estar la lista ordenada algorítmicamente, supone que existe un algoritmo que permite asignar a cada número natural, un número real computable. Entonces Alan Turing propone construir un nuevo número utilizando el mismo proceso diagonal de Cantor (es decir, modificando todas las cifras de la diagonal). Este nuevo número no es ninguna quimera, como el de Cantor, porque aquí la columna de los números computables está ordenada según un algoritmo, y todas las cifras de cada número de la lista están bien determinadas por un algoritmo (ya que son computables). Este nuevo número es, pues, computable y debería estar en la lista potencial de los números computables, pero jamás lo podremos hallar allí, ya que es distinto de cada uno de ellos, precisamente en la cifra de la diagonal. A la vista de esta contradicción, Alan Turing concluye (y ahora acertadamente), que la hipótesis de partida era falsa: es decir que es imposible que la lista esté ordenada algorítmicamente. Observemos que no concluye que los números computables no son numerables, sino que no existe ninguna función algorítmica que consiga la correspondencia biunívoca (que sí existe).

Este es un teorema verdaderamente importante y cierto que demuestra que no puede existir ninguna función algorítmica que haga corresponder a cada número natural un número computable, y en teoría de computación demuestra que no puede haber un algoritmo general para decidir cuestiones matemáticas (esto equivaldría a ordenar la lista). El famoso "Entscheidungsproblem" de Hilbert no tiene solución (Turing, 1936-37).

Los números no computables, como hemos visto antes, no existen. Todos los números reales son computables, y, por tanto, numerables. Si son numerables ha de existir una función que asigne a cada natural un real, pero esta función no tiene por qué ser un algoritmo. Podría ser una asignación aleatoria (Sanvisens, 2019, 37). Este tipo de asignación no lo discuten los cantorianos, ya que, de hecho la usan en su "demostración" de la diagonal y en la formación de sus "números no computables". Por ejemplo, las cifras aleatorias del "número no computable" que comienza por 0,5539047... pueden considerarse obtenidas a través de la función de asignación aleatoria de N en N siguiente:

1 → **5**423198
2→ **5**249
3→ **3**22100000
4→ **9**01655555555438
5→ **99**000752000005111
6→ **4**17286
7→ **7**0
... ...

Las cifras en negrita son los decimales del "número" dado (con la convención de que el **9** da un 9, pero el **99** da un 0). Hay que puntualizar que estas funciones de asignación aleatoria (funciones no algorítmicas), no están más que parcialmente (potencialmente) definidas, ya que se van definiendo paso a paso sin ley, por lo que pueden servir para ordenar potencialmente un conjunto, pero de ninguna manera para definir un número, que debe estar completamente especificado.

En 1908 Émile Borel esclareció esta cuestión de la siguiente manera: "Siendo todos los conjuntos considerados numerables, desde el punto de vista práctico la única distinción importante es la siguiente: unos son efectivamente numerables y los otros no. Digo que un conjunto es efectivamente numerable cuando se puede indicar realmente un medio para asignar un lugar determinado a cada uno de sus elementos, sin ambigüedad posible." (Borel, 1931, 254).

El teorema de Cantor dice que el cardinal de un conjunto es siempre menor que el cardinal del conjunto de sus partes o subconjuntos. Cantor lo "demostró" por medio de su proceso diagonal, tratando con elementos de conjuntos en lugar de cifras. Cometió exactamente los mismos errores que en la demostración que hemos visto antes. Construyó un "subconjunto" que no era posible definir ni por comprensión (ya que no utilizaba una lista ordenada algorítmicamente), ni por extensión, ya que nunca podían conocerse todos sus elementos. Este "subconjunto" quimérico (inexistente) no era la imagen de ningún elemento del conjunto original, con lo cual el teorema parecía probado. El teorema de Cantor es falso, y todos los "conjuntos infinitos" tienen la misma cardinalidad, que es la del "conjunto de los números naturales", si es que pueda hablarse de conjuntos y de cardinalidad aquí. Todos los conjuntos son numerables, solo que algunos lo son por medio de un algoritmo y otros solo pueden numerarse utilizando el azar. De la misma manera que el conjunto de los números reales no existe completo, el conjunto de los puntos de una recta tampoco existe completo, porque de ninguna manera una recta es un conjunto de puntos, sino un espacio donde pueden señalarse (determinarse) tantos puntos como se quiera.

Solo existe un infinito, el potencial, que no es una cosa muy grande, misteriosa y brumosa, sino un proceso de crecimiento interminable, una tendencia.

V. La postura de Gauss, Borel, Lebesgue, Poincaré, Brouwer y otros

Todos los grandes matemáticos de los tiempos de Cantor protestaron vigorosamente contra la introducción de los conjuntos infinitos acabados, completos o actuales. Para ellos solo existía un infinito, el potencial, el infinito del cálculo infinitesimal e integral. Una integral no era una suma de infinitos sumandos, sino el límite de una serie potencialmente infinita de sumas. No existía nada infinito en acto. La representación de los números reales no podía hacerse por medio de infinitas cifras decimales ya que esto equivalía a admitir que el límite de una sucesión creciente formaba parte de la sucesión, cuando es sabido que existe siempre una diferencia entre el límite y cualquiera de los términos.

Henri Poincaré, que estudió a fondo el cantorismo con todo el rigor y la profundidad de su privilegiado entendimiento, dejó para la posteridad varias sentencias que vale la pena recordar aquí: "No hay infinito actual; los cantorianos lo han olvidado y han caído en contradicción" (Poincaré, 1963, 150.). "No hay infinito actual, y cuando hablamos de una colección infinita, nos referimos a una colección a la cual se pueden agregar incesantemente nuevos elementos, semejante a una lista de suscripción que nunca fuera cerrada a la espera de nuevos suscriptores" (Poincaré, 1946, 77).

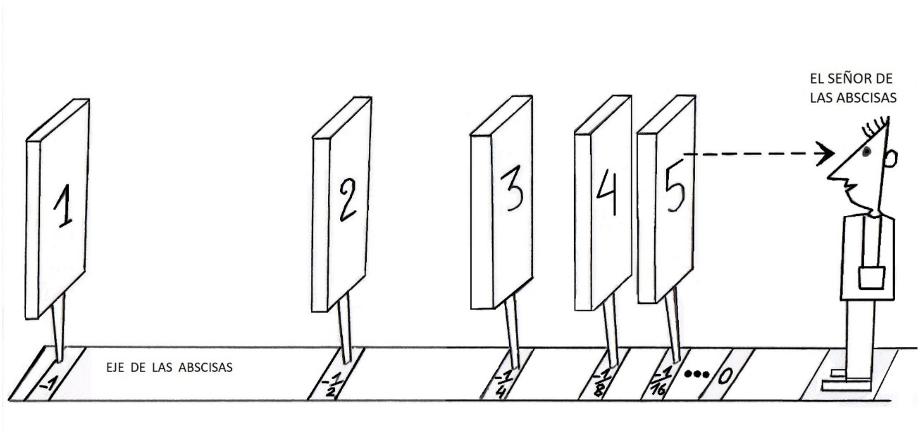
El historiador de la ciencia Joseph W. Dauben dice: "el eminente matemático francés Henri Poincaré condenó la teoría de números transfinitos como una enfermedad de la que algún día llegarían las matemáticas a curarse" (Dauben, 1983, 82).

Leopold Kronecker fue uno de los maestros de Cantor y también el máximo opositor a sus teorías. Este autor radicalizó su postura, incluso en el tratamiento de los números irracionales, por lo cual, a pesar de sus grandes logros en matemáticas, no quiero ponerlo como ejemplo de la postura sensata contra el cantorismo que sostenían fundadamente Henri Poincaré, Émile Borel, Henri Léon Lebesgue, Hermann Weyl, Paul Lorenzen y otros muchos matemáticos de gran talla. Sí quiero citar, en cambio al holandés Luitzen E.J. Brouwer, que resucitó una idea de Anaxágoras, según la cual, los elementos del continuo no existen en general, sino que surgen como creaciones mentales o como consecuencia de actividades (intersecciones, subdivisiones, paradas, etc.). Los objetos matemáticos son construcciones mentales. Esta postura se conoce como constructivismo, y se opone a la creencia platónica de que todo lo posible existe, de hecho, en acto, en el mundo de las ideas. Los "conjuntos" infinitos de Brouwer, son como los de Poincaré, inacabados, susceptibles de crecimiento sin limitación. Desgraciadamente Brouwer prescindió de la generalización del principio del tercero excluido, fundamental en toda la teoría matemática. Creyó que este principio podía llevar a la aceptación de la existencia de objetos matemáticos no construidos, cosa inaceptable para él. Se equivocó gravemente en este punto, porque las condiciones y puntos de partida de ciertas demostraciones, llevan implícita la existencia de ciertos objetos, los cuales puede decirse que han sido construidos a través de dichas determinaciones. El principio del tercero excluido debe tener validez general, también en el infinito potencial.

VI. La paradoja del señor de las abscisas

Vamos a considerar un conjunto infinito de objetos numerados y ordenados según su número, de menor a mayor, y todos existentes (un infinito actual). Los cantorianos no ven ninguna contradicción en la definición de este conjunto. Al asegurar que los objetos son infinitos (sin limitación) se está diciendo implícitamente que no existe un último objeto, es decir el objeto que tendría el número de orden mayor de todos. Pero al asegurar que estamos ante un infinito actual, queremos decir que están todos, ¡todos! los infinitos objetos. Se da aquí una especie de pereza mental, porque es incompatible el hecho de estar todos en acto, con el hecho de que no haya uno que sea el último (el de máxima numeración). Si no hay un último es porque el conjunto puede crecer, es decir, porque no están todos los elementos. Si el conjunto ya no puede crecer porque está terminado y completo, entonces debería tener un último.

Los cantorianos no entienden esta demostración. Creen que no es posible hacer ver la contradicción que existe en el conjunto infinito indicado, y para reforzar su postura nos instan a que coloquemos imaginativamente a cada objeto de este conjunto (con una tarjeta que indica su número de orden), en el eje de las abscisas, de la siguiente manera: el objeto número 1 en el punto de abscisa 1; el objeto número 2, en el punto de abscisa 2; y así sucesivamente. Entonces nos hacen mirar a todo este conjunto de objetos desde un punto situado en frente del eje de las abscisas, y nos dicen: - ¿Ven? Estos objetos son infinitos y están todos colocados en su sitio. Ustedes no pueden ver el último porque no lo hay. Ustedes no pueden ponerse de perfil en el eje de las abscisas en ningún punto desde donde puedan ver a todo el conjunto delante suyo, porque el conjunto seguiría detrás suyo infinitamente. ¿Ven ahora por qué no hay un último elemento y en cambio están todos? ¿No ven que no hay forma humana de comprimir todo el conjunto para que ocupe un espacio finito del eje de las abscisas? Si se pudiera hacer esto, entonces ustedes podrían colocarse en este eje de perfil y contemplar todo el conjunto, y entonces podrían ver el último elemento que no existe, pero ¡claro está que esto no puede hacerse! Así hablan los cantorianos, pero se equivocan, porque podemos colocar a todos los elementos de este conjunto en un espacio finito del eje de las abscisas, y eso es lo que vamos a hacer ahora, siguiendo las instrucciones de Zenón de Elea (ver figura adjunta) (Sanvisens, 2021, 11-17; 2023, 81).



Pongamos el objeto número 1 en el punto de abscisa -1; el objeto número 2 en el punto de abscisa -1/2; el objeto número 3 en el punto de abscisa -1/4; el objeto número 4 en el punto de abscisa -1/8; el objeto número 5 en el punto de abscisa -1/16; etc. Haciéndolo así, todos los infinitos objetos caben entre el punto de abscisa -1 y el punto de abscisa 0. Entonces, un señor, al que podremos llamar el señor de las abscisas, puede colocarse en el punto de abscisa 1, por ejemplo y, puesto de perfil, puede ver delante suyo a todos los elementos de este conjunto. La pregunta que hago a los cantorianos es la siguiente: ¿qué objeto estará viendo este señor si resulta que los objetos se tapan los unos a los otros, de forma que solo puede verse el que está delante de todos? ¿Estará viendo el último numerado con un número infinito? ¿Acaso no verá ninguno a pesar de que están ¡todos! delante suyo?

Esta paradoja que quiero llamar “la paradoja del señor de las abscisas” destruye el cantorismo, porque demuestra que no pueden existir conjuntos infinitos en acto. Si algún recalcitrante sigue creyendo que los infinitos puntos de un intervalo continuo abierto, como el formado por los puntos situados entre el de abscisa -1 y el de abscisa 0, excluyendo estos dos extremos, existen todos en acto, pruebe de situar al señor de las abscisas de perfil en el punto de abscisa 0, por ejemplo y pregúntele a este señor qué punto del intervalo está viendo. ¿Ve el último punto del intervalo? ¿O acaso no ve ningún punto estando todos delante suyo?

Podemos formular esta paradoja en términos matemáticos considerando los puntos donde hemos situado los objetos, como si fueran móviles que, empezando en el mismo momento, se desplazan hacia el punto S (donde está el Señor) a la misma velocidad. Han de cumplirse las tres reglas de juego siguientes: 1) Si un solo punto llega hasta S, derribará al señor. 2) Si varios puntos llegan todos a S, alguno de ellos lo derribará. 3) Si un punto llega a S después de otro, no será el que derribe al señor, ya que este ya estará derribado.

Todos los puntos móviles mencionados llegarán a S a distintos tiempos. Por la regla 2) alguno de ellos derribará al señor. Pero por la regla 3) ninguno de ellos podrá derribar al señor ya que todos ellos tienen algún otro punto móvil delante suyo, que llegará antes que él. Luego ningún punto derribará al Señor, en contradicción con la regla 2)[11].

Con esta paradoja queda definitivamente demostrado que no existe el infinito actual. La creencia en el infinito actual, fundamento de todo el cantorismo, era debida a una falta de profundidad filosófica. Aristóteles, Bergson, y Poincaré tenían razón, y Cantor, Hilbert y Bertrand Russell estaban equivocados.

La famosa paradoja del hotel de Hilbert muestra también la imposibilidad del infinito actual. Se trata de un hotel que tiene infinitas habitaciones numeradas que están todas ocupadas albergando un huésped cada una. El conserje, para hacer entrar a un nuevo huésped, da la orden de que cada huésped del hotel se desplace a la habitación que tenga el número siguiente al de la suya. De esta forma la habitación número 1 queda vacía, y el nuevo huésped puede entrar. Los cantorianos solo ven en esto algo anti intuitivo. Pero el pensamiento profundo no se deja engañar. Si todas, ¡todas! las habitaciones estaban ocupadas, no hay movimiento de huéspedes que pueda hacer aparecer una habitación vacía. Eso sería un milagro, y, antes de admitir el milagro, un filósofo serio tiene que agotar todas las posibilidades de explicación racional. Es evidente que si aparece una habitación vacía es porque se ha construido una nueva habitación, ya que ¡todas! las que había antes estaban ocupadas. Pero si se ha construido una nueva habitación es porque el hotel no estaba completo, sino que era un hotel en construcción: no era un infinito actual, como quieren inculcar los profesores cantorianos a los ingenuos, sino un infinito potencial. El infinito actual no existe en ninguna parte, porque no puede existir en matemáticas. Por cierto,

11 No es que estas tres reglas sean inconsistentes; lo que es inconsistente es que una sucesión de pun tos inacabada (por tanto, sin último elemento) sea considerada como un conjunto completo o acabado.

que Hilbert no creía en el infinito actual en la naturaleza, a diferencia de Cantor.

Ya Euclides sabía que el todo es mayor que una parte, pero los cantorianos creen que no. Richard Dedekind definió conjunto infinito como aquel que es equipolente a algún subconjunto propio; es decir, que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto y algún subconjunto propio del mismo. Esta definición de Dedekind es estupenda, siempre que se tenga presente que se está definiendo un infinito potencial, porque si se considera un infinito completo (actual), entonces la definición de Dedekind lleva a un absurdo: el de considerar que una parte tiene igual número de elementos que el todo. Todos sabemos que el todo tiene los elementos de la parte más otros que son los que hacen que no se identifique el todo con la parte. Pero si el todo tiene más elementos que la parte, no podemos decir que tenga los mismos, porque esto va contra el principio de no contradicción. Este "misterio" del infinito actual no es otra cosa que otra evidencia de su inexistencia.

VII. Nueva física. Nuevas matemáticas. Nueva teología

En su último artículo para la revista *Espíritu*, Giandomenico Boffi nos habla de la importancia de la matemática del infinito para el estudio del mundo físico. Pone como ejemplo la utilización de espacios de Hilbert de infinitas dimensiones para el estudio de las señales electromagnéticas (Boffi, 2021, 190). De hecho, los espacios de Hilbert (que son generalizaciones del concepto de espacios euclídeos) se usan también regularmente en la formulación matemática de la mecánica cuántica, desde los trabajos de Hermann Weyl y de John Von Neumann. Cuando se habla de conjuntos numerables en estos trabajos, no tiene por qué suponerse válida la teoría de Cantor, sino la de Émile Borel, según la cual algunos conjuntos no son efectivamente numerables (ya que es imposible de encontrar un algoritmo que cree la correspondencia biunívoca), pero en realidad todos los conjuntos son numerables (ya hemos visto que el azar puede establecer tal correspondencia, siempre).

No hay nada que objetar a esta constatación. De hecho, las matemáticas del infinito se estuvieron aplicando en la ciencia por los matemáticos de la Grecia clásica, después por los físicos y matemáticos del siglo XVII que descubrieron el cálculo infinitesimal, y no pararon en los siglos posteriores.

Ahora bien, otra cosa muy distinta sería si se afirmara que el falso concepto de infinito actual ha tenido alguna importancia en ciencia. Aquí la respuesta es un rotundo no. Obsérvese que Hermann Weyl, que aplicó los espacios de Hilbert no fue precisamente cantoriano, y que todo el cálculo diferencial e integral se basa en el infinito potencial.

Toda la teoría de la computación, que da pie al estudio de la inteligencia artificial, de las máquinas algorítmicas (máquinas de Turing), computadores y robots, de que habla también Boffi (Boffi, 2021, 198), es, en realidad, un estudio de números computables, o de series computables. Ya me he referido a que, para nada interviene aquí el infinito actual, y que, si es válido el teorema de Turing de la parada, es debido a que utilizó infinitos potenciales y ordenaciones con algoritmos finitos, con lo cual su aplicación del método de la diagonal de Cantor, era en su caso, legítima.

Los cantorianos consideran que los números reales se pueden representar en el mundo de las ideas por medio de infinitas cifras decimales, todas existentes. Boffi también se refiere a este problema (Boffi, 2021, 191). De la misma manera que se demuestra la inexistencia de conjuntos infinitos en acto, se demuestra también la inexistencia de infinitos decimales en ningún número, pues estos infinitos decimales se podrían colocar todos en el eje de las abscisas en las posiciones de Zenón, tal como hemos explicado anteriormente, y entonces podríamos preguntar al señor de las abscisas, situado de perfil en frente de todos ellos, qué decimal está viendo a la cabeza de la formación, ya que los tiene todos delante suyo (Sanvisens, 2023, 83). No cambiaría nada si fuera Dios mismo este señor de las abscisas. El resultado siempre es el mismo. Lo que se ve es un infinito potencial, porque la sucesión de decimales no está acabada, no es un infinito actual, y por eso no hay un último decimal. Entonces ¿qué hay que decir? ¿Cuántas cifras decimales tiene el número π? La respuesta la saben bien todos los matemáticos que actúan con rigor: el número pi no tiene ninguna cifra decimal. No es representable en cifras decimales. Solo puede representarse por medio de una letra griega: π. Las cifras decimales que se atribuyen a π no son suyas, sino que son las últimas cifras decimales de las distintas aproximaciones a π, que, por cierto, son infinitas potencialmente. El número 1/3 no tiene infinitos treses en su parte decimal. No es expresable con cifras decimales. Esta importante idea se la debemos a Carl Friedrich Gauss (Dauben, 1983, 85).

La matemática ha de ser una ciencia rigurosa y firme. No puede fundamentarse en axiomas falsos, como podría ser el de la existencia del infinito actual. Curiosamente, si se estudia a fondo el axioma del infinito del sistema de Zermelo-Fraenkel, nos encontramos con una mezcla de dos infinitos: el potencial y el actual. En realidad, se describe un infinito potencial, siempre aumentable, pero al final se escribe un signo de existencia del conjunto al que se aplica, con lo cual se indica que ya no es aumentable, sino que es una totalidad (infinito actual). Esto es contradictorio.

El axioma de elección que tanta polémica ha causado es evidente y ha de aceptarse siempre. El problema está en que se quiere aplicar a conjuntos infinitos actuales, y esto es imposible porque no existen. Al hacerlo surgen verdaderas paradojas absurdas como la de Banach-Tarski. En buena lógica, cuando, al aceptar ciertas hipótesis de partida, se llega a un resultado absurdo, como es la paradoja de Banach-Tarski, hay que rechazar las hipótesis de partida. En este caso es muy fácil: la hipótesis que hay que descartar es la existencia de conjuntos infinitos completos o actuales. Sin embargo, los cantorianos no están dispuestos a ello, y prefieren conservar las paradojas. A los cantorianos no les importa vivir en un mundo de misterio, milagro y absurdo paradoxal. Dicen que están dispuestos a todo con tal de no abandonar su paraíso fantasmagórico. También dicen que una gran parte de la matemática ha podido ser demostrada a partir del sistema de Zermelo Fraenkel (ZF) complementado con el axioma de elección (en el sistema ZFC), y que, por eso, nadie puede pretender cambiar la fundamentación de la matemática, perdiendo buena parte de los logros conseguidos con tanto esfuerzo.

En primer lugar, hay que separar los logros auténticos de las fantasmagorías derivadas de los transfinitos de Cantor y otros "números" infinitamente grandes e infinitamente pequeños, que participan del error del infinito actual. Las fantasmagorías hay que eliminarlas. Bastante tiempo se ha perdido ya en cuestiones como la hipótesis del continuo o la aritmética transfinita, que constituyen una pseudociencia. En cuanto a los verdaderos logros, los matemáticos han de encontrar un nuevo sistema axiomático, libre de las adherencias cantorianas del infinito actual, que permitan conservar los grandes teoremas que se tienen en la actualidad. Hay que redefinir los conjuntos, las líneas, la misma línea recta (Sanvisens, 2019, 67-70), los intervalos, las aplicaciones, etc. No será muy difícil establecer unos convenios con la filosofía, de forma que los puntos posibles inexistentes y potencialmente infinitos, puedan tratarse conjuntamente constituyendo conjuntos infinitos potenciales. Al fin y al cabo, esos puntos se convierten en reales cuando se piensa en ellos, o cuando se crean por medio de paradas de móviles, o de intersecciones o de ecuaciones. A efectos prácticos, todos los teoremas de la topología, del álgebra, y de las diversas disciplinas, acabarán encajando en el nuevo sistema que debe crearse.

En cuanto al tema de las relaciones entre Dios y el infinito, lo mejor es separarlo completamente de la matemática. Dios no es cuantitativo. Si se dice que es infinito se refiere a que no puede haber perfección que no tenga, no puede cambiar o crecer. En la creación, como decía Santo Tomás, no hay nada infinito actual. Lo que llamamos el Dios inmanente (que no es propiamente Dios sino su manifestación), a mi modo de ver, no es otra cosa que un conjunto finito de campos morfogenéticos, de información, del tipo de los pensados por Rupert Sheldrake (Sheldrake, 1990, 157), incluyendo el campo de la humanidad. El Dios transcendente es un campo de existencia estimativo de carácter espiritual e informativo, y no tiene nada que ver con infinitos de ningún tipo.

Las pruebas tomistas de la existencia de Dios requieren el principio de causalidad para poder ser aceptadas. La escolástica siempre consideró dicho principio como inmediatamente evidente o conocido por sí mismo (per se notum) sin necesidad de prueba alguna, pero, desgraciadamente, los autores de otras escuelas filosóficas no captan esta evidencia y consideran que requiere una demostración. Por esta razón no han aceptado las pruebas tomistas de la existencia de Dios. A mi modo de ver, la evidencia del principio de causalidad es equivalente a la evidencia del principio de inexistencia del infinito actual: hay que ponerla a la vista, como se hace en la paradoja del señor de las abscisas. Eso equivale a una cierta demostración para el principio de causalidad (Sanvisens, 1995, 31-49) que es la siguiente: Si no hiciera falta ninguna causa para que un ser posible contingente cualquiera pasase a existir, entonces todos los seres posibles (infinitos potencialmente) podrían pasar a la existencia simultáneamente, apareciendo en el mundo un infinito actual de seres. Pero el infinito actual es imposible, como hemos visto; por consiguiente, todo ser posible y contingente requiere una causa para existir.

Referencias bibliográficas

Boffi, G. (2021). Scienza e fede: Diu e l'infinito. Considerazioni di un matemático. *Espíritu* 161, 185-200.

Borel, E. (1931). *El espacio y el tiempo.* Barcelona: Montaner y Simón.

Cantor, G. (1883). Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. En *Gesammelte Abhandlungen.*

Dauben, J.W. (1983). Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos. *Investigación y ciencia* 83, 82-93.

Delgado Reyes, H. (2008). El infinito en Santo Tomás de Aquino. Comunicación en el Seminario de la fundación Orotava. (fundacionorotava.org/media/web/publication-files/publication23_a2_c003w.pdf) (consulta 4 junio 2021).

Gómez Camacho, F. (2006). El infinito en la suma teológica: teología, física y matemáticas (Suma Teológica I, q. 7). *Pensamiento* 62, 233, 273-290.

Poincaré, H. (1946). *Últimos pensamientos.* Buenos Aires: Espasa Calpe.

— (1963). *Ciencia y método.* Madrid: Espasa Calpe.

Prevosti, A. (1984). *La Física d'Aristòtil. Una ciència filosòfica de la natura.* Barcelona: P.P.U.

Sanvisens Herreros, A. (1995). Defensa de la causalidad. *Convivium* 7, 31-49.

— (2019). *Saliendo del paraíso de Cantor.* Madrid: Vivelibro.

— (2023) Pruebas de la inexistencia del infinito actual. *Comprendre* 25/1, 71-92.

Saranyana, J.I. (1973). La creación "ab aeterno". Controversia de Santo Tomás y Raimundo Martí con San Buenaventura. *Scripta Theologica* 5, 1, 127-174.

Sheldrake, R. (1990). *La presencia del pasado. Resonancia mórfica y hábitos de la naturaleza.* Barcelona: Kairós.

Tomás De Aquino. (1883). *Suma Teológica.* Trad. H. Abad de Aparicio, 5 vols. Madrid: Nicolás Moya.

Turing, A. (1936-37). On computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society. Series* 2 42, 230-265.

Van Steenberghen, F. (1966). *La philosophie au XII[e] siècle.* Louvain-París.

Zimmermann, A. (1976). Mundus est aeternus. *Miscellanea Mediaevalia* 10, 324-325.