



Opciones Reales Multinomiales con dos variables de estado y Teoría de juegos en la valoración de estrategias de inversión

Gastón S. Milanesi ¹   - Universidad Nacional del Sur, Argentina & Universidad de Buenos Aires, Argentina & Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Resumen

Analizar y valorar estrategias implica considerar incertidumbres emergentes de las decisiones del agente, estados de la naturaleza y las acciones de terceros. El modelo a utilizar debe ser capaz de recrear las contingencias mencionadas para que sus resultados informen los cursos de acción de mayor valor actual. El presente trabajo propone un modelo analítico simple para cuantificar las múltiples fuentes de riesgo, combinando Teoría de Juegos y Opciones Reales. Las estrategias de compra o diferimiento son valoradas con un modelo multinomial modificado de dos variables de estado. Los resultados obtenidos son empleados en una negociación modelada matricialmente en un simple juego no recurrente. Aplicando la metodología de casos en administración, se analiza una estrategia de integración horizontal y expansión en la elaboración de cloruro de litio en la República Argentina. En tal sentido el trabajo aporta un modelo analítico numérico aplicable a la valoración de estrategias, incentivos económicos y penalidades. El modelo se constituye en una herramienta para el análisis estratégico y diseño acuerdos de colaboración.

Clasificación JEL: G13, G31.

Palabras clave: Teoría de Juegos, Multinomial, Opciones Reales, Incertidumbre.

Multinomial Real Options with Two State Variables and Game Theory in Investment Strategy Valuation

Abstract

Analyzing and assessing strategies involves considering emerging uncertainties from the agent's decisions, states of nature, and actions of third parties. The model to be used must be capable of recreating the mentioned contingencies so that its results inform courses of action with the highest present value. This paper proposes a simple analytical model to quantify the multiple sources of risk, combining Game Theory and Real Options. Buying or deferring strategies are assessed using a modified multinomial model with two state variables. The obtained results are applied in a matrix-modeled negotiation in a simple non-recurring game. Applying the methodology of case studies in management, a strategy of horizontal integration and expansion in lithium chloride production in the Argentine Republic is analyzed. In this regard, the work provides a numerical analytical model applicable to the assessment of strategies, economic incentives, and penalties. The model serves as a tool for strategic analysis and the design of collaboration agreements.

JEL Classification: G13, G31.

Keywords: Games Theory, Multinomial, Real Options, Uncertainties.

¹ Autor de correspondencia. San Andrés 800 Campus Universitario, 8000 Bahía Blanca, Argentina. Correo electrónico: milanesi@uns.edu.ar. +54-291-4131898

*Sin fuente de financiamiento para el desarrollo de la investigación



1. Introducción

La formulación de estrategias y el estudio de las decisiones secuenciales derivadas de los cursos de acción, requieren de modelos numéricos analíticos para estimar un valor ajustado por las diferentes fuentes de incertidumbre a la cual se expone el agente decisor. Se agrupan en tres categorías: riesgos emergentes de los estados de la naturaleza fuera del campo de acción de quien decide, los derivados de las propias decisiones del agente y finalmente incertidumbres de los potenciales cursos de acciones de los competidores y terceros que interactúan con la organización. El modelo de valoración debe cumplir con los determinar el valor estratégico de la inversión ajustado, sin perder de vista las conductas de los agentes involucrados ante el planteo de la estrategia objeto de valuación. Para ello es menester utilizar modelos analíticos derivados de las opciones reales y juegos.

La Teoría de Juegos brinda el marco conceptual para modelar situaciones en donde existe interdependencia en la toma de decisiones. La Teoría de Opciones Reales proporciona modelos para valorar la flexibilidad estratégica en las decisiones de inversión. La conjunción de las teorías mencionadas dan origen a dos grupos de modelos: a) Modelos Simples de Teoría de Juego y Opciones Reales (SROG, *standard real options games*), b) Modelos Complejos de Teoría de Juegos y Opciones Reales (NSROG, *non-standard real options games*)².

Los trabajos seminales vinculados a los modelos SROG corresponde a (Smit y Ankum, 1993); (Dixit y Pindyck, 1994); (Grenadier, 1996); (Kulatilaka y Perotti, 1998); (Smit, 2003); (Smit y Trigeorgis, 2004). Los SROG son modelos planteados en tiempo discreto a partir del modelo de valuación binomial utilizando resolución matricial o extensiva en juegos de una sola etapa o secuenciales. El grupo NSROG combinan modelos microeconómicos correspondientes a estructuras de mercado oligopólicas y se concentran en el estudio de la competencia y movimientos estratégicos, estructuras informativas perfectas e imperfectas para la toma de decisiones y acuerdos de cooperación, entre otras conductas estratégicas (Ghemawat y Nalebuff, 1985); (Fudenberg y Tirole, 1986); (Lambrecht, 2001); (Grenadier, 2000 y 2002); (Lambrecht y Perraudin, 2003); (Paxson y Pinto, 2003); (Murto, 2004); (Smit, y Trigeorgis, 2004); (Pawlina y Kort, 2006); (Hsu y Lambrecht, 2007); (Paxson y Melman, 2009); (Armada, Kryzanowski y Pereira, 2009); (Thijssen, 2010); (Graham, 2011); (Boyer, Laserrere y Moreaux, 2012)³. Combinar herramientas propias de la teoría de juegos con opciones reales permite cuantificar y justificar conductas estratégicas entre los agentes. Este sería el caso de las alianzas o acuerdos explicados formalmente mediante conductas cooperativas, para acceder a situaciones de superior bienestar en relación a los juegos de suma cero (Axelrod, 1986). Los modelos permiten cuantificar las penalizaciones, a partir de los incentivos económicos para el cumplimiento del acuerdo (Milanesi y Thomé 2015), (Perez, Ferro Moreno y Milanesi, 2022) y (Milanesi, 2023)

² Los modelos complejos, presentan dos o más variables estocásticas, y las decisiones no se toman en un punto del tiempo determinado. Estos modelos

³ Un aspecto que diferencia a la pura Teoría de Juegos con los SROG está dado por los pagos. En el primer caso son determinísticos, en el segundo es estimado mediante modelos de Opciones Reales. En el presente trabajo el modelo será planteado en tiempo discreto.

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar un modelo analítico numérico del tipo SROG, para valorar estrategias con múltiples fuentes de incertidumbre y las posibles conductas de los agentes intervinientes en un proceso de negociación. La resolución y valoración de las estrategias se concreta mediante un modelo multinomial, con dos variables de estado precio y cantidad, (Boyle, 1988), (Kamrad y Ritchken, 1991), (Tian, 1993) Este es modificado con el fin de que las probabilidades de transición no se transformen en negativas (Herath y Kumar, 2006 y 2007). El comportamiento de la variable de estado precio se modelado con volatilidad cambiante utilizando una rejilla trinomial (Milanesi, 2022). Los pagos contingentes obtenidos permiten valorar las estrategias y seguidamente diseñar un juego sin repetición entre comprador del yacimiento (decisor de estrategias) y proveedor (titular del yacimiento). El resultado de equilibrio brinda información relativa a la óptima y racional conducta en términos económicos, además de pronosticar potenciales cursos de acción observables por los agentes, acordes al conjunto de información disponible.

Siguiendo la metodología de análisis de casos en administración, el modelo es aplicado para el estudio de la estrategia de adquirir o diferir la compra de un yacimiento de sal utilizado como proveedor del principal insumo en la operación y producción de carbonato de litio en región de Cuyo en la República Argentina en el presente. En este caso el precio del litio y los posibles escenarios de producción son las variables de estado y fuente de incertidumbre. El resultado esperado consiste en determinar el precio máximo y el piso de negociación, las potenciales conductas a la luz de equilibrio de Nash de las partes, con información completa y con estrategias mixtas.

Como todo modelo, este es una simplificación donde la incertidumbre se reduce a dos variables de estado, y la conducta de los agentes se explica a través de incentivos económicos. El modelo se constituye en una herramienta para analizar estratégicamente decisiones de inversión, su flexibilidad y la conducta de los agentes. En tal sentido permite fundamentar la toma de decisiones estratégicas, en el marco de la racionalidad provista por la teoría de opciones reales y teoría de juegos.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la siguiente sección es desarrollado el modelo analítico multinomial de valoración estratégica. Seguidamente son expuestas las variables del caso analizado, aplicables a las estrategias de compra o diferimiento. La cuarta sección presenta los resultados obtenidos, primero a la luz de la teoría de opciones reales y luego incorporando los pagos en un juego de negociación. En este apartado se determinan las cotas de precios, su sensibilidad a variaciones en el precio de costo de la materia prima, el equilibrio de Nash, el valor de las penalidades ante el incumplimiento del acuerdo y las probabilidades de indiferencia para estrategias mixtas. Finalmente se exponen las principales conclusiones.

2. El modelo

2.1 Rejillas trinomiales y multinomiales

A continuación, es desarrollado el modelo de valoración multinomial con dos variables de estados y volatilidad cambiante. Se constituye en dos tramos: desde $t=1$ hasta $T=n$ adopta un formato trinomial modificado para una variable de estado (precio, ζ^p), con volatilidad cambiante, al estilo Kamrad y Ritchken (1991) con ajuste en el parámetro para la amplitud de los nodos. Desde el periodo $t=1$ hasta

$t=0$ la rejilla trinomial se empalma con el modelo multinomial, con dos variables de estado (precio, ζ^p), y cantidades, ζ^q), siguiendo la lógica propuesta por Herath y Kumar (2007), conocida con las siglas MKR (*Modified Kamrad y Ritchken*).

Para estimar las futuras cantidades el horizonte de proyección se separa en tres tramos: Desde $t = 0 \rightarrow 1$ se plantean tres escenarios de producción: alta ($q_{(a,t)}$) media ($q_{(m,t)}$) y baja ($q_{(b,t)}$), tomando la forma de una rejilla trinomial. Proyectado el primer periodo, por cada escenario y hasta $t=5$, se supone que las cantidades evolucionan condicionadas por las características de cada escenario, en base a un factor de crecimiento. Finalmente, las cantidades se estabilizan con los valores alcanzados en $t=5$ hasta $t=31$, final de vida útil estimada. Los tres escenarios tienen la misma pendiente μ_q y volatilidad σ_q .

La proyección del precio del bien se divide en dos tramos: Desde $t = 1 \rightarrow 5$ sigue un comportamiento trinomial con volatilidades variables por año. Igual que las cantidades, desde $t = 5 \rightarrow 31$ el precio se estabiliza. El proceso estocástico del precio se describe con pendiente μ_p y volatilidad cambiante. La volatilidad presenta tres tramos: $\sigma_{pmax(t=1)} > \sigma_{p(t=2)} > \sigma_{p(t=3)} > \sigma_{p(t=4 \rightarrow \infty)}$, siendo el primer periodo el de máxima volatilidad.

2.2 Desarrollo del modelo para una variable de estado (precio)

Seguidamente se presentan el conjunto de ecuaciones a ser utilizadas en la valoración de estrategias. La secuencia lógica para su implementación es detallada en el apartado 2.4, gráficos 1 y 2. Para calcular los flujos de fondos libres correspondientes a cada escenario de producción se emplea la siguiente expresión,

$$\zeta(FFL)_{(t)} = \{[(\zeta^p(t) \times q_{(e,t)}) \times (1 - \%C_{(a,s)})] \times (1 - \tau)\} \quad (1)$$

Donde $\%C_{(a,s)}$ representa el porcentaje de los costos de operación sobre ingresos. El subíndice indica si los costos corresponden a la estrategia de adquirir (a) o diferir la adquisición (s). Las cantidades proyectadas para cada escenario son representadas por la variable $q_{(e,t)}$. En este caso, el único componente estocástico es el precio $\zeta^p(t)$, extendiéndose en su aplicación desde $t = 1 \rightarrow \infty$. El subíndice (e) indica los diferentes escenarios de producción: alta, media y baja. Finalmente, la variable τ representa la tasa de impuesto a las ganancias⁴. La variable $\zeta^p(t)$ sigue un proceso de trinomial, adoptando tres posibles estados

$$\zeta^p(t) = \begin{cases} u \text{ con probabilidad } p_u^{\sigma(t)} \\ m \text{ con probabilidad } p_m^{\sigma(t)} \\ d \text{ con probabilidad } p_m^{\sigma(t)} \end{cases} \quad (2)$$

⁴ Para recrear el comportamiento estocástico del flujo de fondos y el valor de continuidad se toma una solución similar a la planteada por Smith, (2005).

El movimiento ascendente responde a la siguiente expresión

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{t}} \quad (3)$$

El movimiento descendente se obtiene de la expresión $d = 1/u$ y la centralidad determinada por $m = u \cdot d = 1$. El coeficiente de variación correspondiente a la variable precio es $1/\theta$, donde $\theta = \mu_p/\sigma_{pmax(t=1)}$. El modelo KR no provee un camino explícito para seleccionar el valor de λ , por lo general se define *ad-hoc*. Esto trae los siguientes inconvenientes: (a) no se garantiza un confiable conjunto de probabilidades, (b) el valor de las probabilidades dependen del valor de λ sobre el valor de la opción. El modelo MKR adaptado a una variable de estado subsana los inconvenientes asegurando un conjunto de probabilidades positivas ($0 \leq p_i \leq 1$). Para ello, Herath y Kumar (2007) proponen la condición de borde sobre el parámetro λ :

$$\sqrt{1 + \theta^2\Delta t} \leq \lambda \leq \frac{1+\theta^2\Delta t}{\theta\sqrt{\Delta t}} \quad (4)$$

Aplicando la ecuación 4 y $\sum p_i^{\sigma(t)}=1$, se obtienen las expresiones correspondientes a las probabilidades de transición para el periodo $t=1 \rightarrow 2$, este considerado el de máxima volatilidad:

$$p_u^{\sigma_{max(t=1)}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{\lambda} + \frac{\theta^2\Delta t}{\lambda^2} \right] \quad (5.1)$$

$$p_m^{\sigma_{max(t=1)}} = 1 - \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta^2\Delta t}{\lambda^2} \right] \quad (5.2)$$

$$p_d^{\sigma_{max(t=1)}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{\lambda} + \frac{\theta^2\Delta t}{\lambda^2} \right] \quad (5.3)$$

Las volatilidades de periodos intermedios $\sigma_{p(t=2)}, \sigma_{p(t=3)}, \sigma_{p(t=4 \rightarrow \infty)}$ implican probabilidades de transición ajustadas (Haahtela, 2010 y 2011); (Milanesi, 2022). Con las ecuaciones 5.1, 5.2 y 5.3, se obtienen las probabilidades de transición intermedias,

$$p_u^{\sigma(t)} = p_u^{\sigma_{max(t=1)}} \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_{pmax(t=1)}} \right)^2 \quad (6.1)$$

$$p_m^{\sigma(t)} = p_m^{\sigma_{max(t=1)}} \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_{pmax(t=1)}} \right)^2 \quad (6.2)$$

$$p_d^{\sigma(t)} = p_d^{\sigma_{max(t=1)}} \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_{pmax(t=1)}} \right)^2 \quad (6.3)$$

El horizonte explícito de proyección se extiende desde $t = 1$ hasta $t = 5$. Desde dicho periodo hasta el final de la vida útil del yacimiento se supone estabilidad de precios y cantidades para cada escenario $t = 5 \rightarrow 31$. En efecto el precio se estabiliza en el valor alcanzado para cada nodo

$\zeta^p(t = 5)$. El valor actual en $t = 5$ obtenido de actualizar desde $t = 31$ en cada nodo por escenario, es obtenido con la siguiente expresión,

$$\zeta(V)_{(t=5)} = \{[(\zeta^p(t = 5) \times q_{(e,t=5)}) \times (1 - \%C_{(a,s)})] \times (1 - \tau)\} \times \left[\frac{(1+r)^{(T-t)} - 1}{(1+r)^{(T-t)} \times r} \right] \quad (7)$$

En la ecuación anterior se utiliza la tasa libre de riesgo (r) como tasa de actualización, ya que el precio es el componente estocástico en los $(n \times 2) + 1$ nodos de la rejilla por escenario de producción. La variable T representa el horizonte final y t el quinto año.

En este caso las estrategias a valorar son:

- a) adquirir el yacimiento en t , con un nivel de inversión (I_5) e inversión inicial en operaciones (i_0);
- b) adquirir el yacimiento al inicio con un nivel de inversión (I_0). La primera estrategia contiene el ejercicio de la opción de compra para el horizonte t .

La expresión empleada para seleccionar la estrategia es la siguiente,

$$\zeta(VOR)_{(t=5)} = \text{Max}\{[\zeta(V)_{(a,t=5)} - I_5]; [\zeta(V)_{(s,t=5)}]\} \quad (8)$$

La ecuación indica el valor al ejercicio de la opción $\zeta(VOR)_{(t=5)}$, siendo el máximo valor entre el ejercicio de compra del yacimiento $\zeta(V)_{(a,t=5)} - I_5$ y continuar con las operaciones $\zeta(V)_{(s,t=5)}$. El subíndice indica el valor de los costos empleados en los flujos actualizados desde t hasta T . En el caso de adquirir el yacimiento (a), se elimina el costo relacionado con la compra del insumo. Si no se adquiere el yacimiento (s) se mantienen los costos de operaciones empleados en el cálculo del flujo de fondos desde $t=5$ hasta $t=1$.

La resolución de rejilla es recursiva desde $t=5$ hasta $t=1$ con las probabilidades de transición en el siguiente orden: desde $t=5$ hasta $t=2$ ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3; desde $t=2$ hasta $t=1$ ecuaciones 5.1, 5.2 y 5.3. La expresión utilizada es la ecuación 9.

$$\zeta(VOR)_{(t5..t1)} = \left\{ \left[p_u^{\sigma(t)} \times (VOR)_{(u,t+1)} + p_m^{\sigma(t)} \times (VOR)_{(m,t+1)} + p_d^{\sigma(t)} \times (VOR)_{(d,t+1)} \right] \times e^{-r} + \zeta(FFL)_{(s,t)} \right\} \quad (9)$$

Esta expresión se utiliza para establecer el valor actual en cada periodo y nodo, a partir del valor obtenido en la ecuación 8. Para su resolución se utilizan las probabilidades de transición del periodo, el valor actual de la estrategia calculado para el nodo del periodo posterior ($t + 1$) actualizado a la tasa libre de riesgo (e^{-r}) y el flujo de fondos correspondiente al periodo $\zeta(FFL)_{(s,t)}$. El subíndice s indica flujos de fondos son obtenidos computando costos sin adquisición $\%C_{(s)}$, puesto que la compra del yacimiento se ejerce en t (año 5).

La valoración de la estrategia alternativa (compra del yacimiento en $t=0$), requiere resolver recursivamente la rejilla trinomial construida con los flujos de fondos $\zeta(FFL)_{(a,t)}$ y valor (V)

obtenido en $t=5$. Este valor es calculado con la estructura de costos con adquisición $\%C_{(a)}$. Para ello se utiliza la ecuación 7, cuya resolución recursiva aplica la siguiente expresión,

$$\zeta(V)_{(t5..t1)} = \left\{ \left[p_u^{\sigma(t)} \times (V)_{(u,t+1)} + p_m^{\sigma(t)} \times (V)_{(m,t+1)} + p_d^{\sigma(t)} \times (V)_{(d,t+1)} \right] \times e^{-r} + \zeta(FFL)_{(a,t)} \right\} \quad (10)$$

Igual que en el caso anterior, la ecuación 10 se emplea en el cálculo del valor actual para cada periodo y nodo. Son utilizadas probabilidades de transición del periodo, el valor correspondiente a cada nodo del periodo posterior ($t + 1$), actualizado a la tasa libre de riesgo (e^{-r}); más el flujo de fondos correspondiente al periodo $\zeta(FFL)_{(a,t)}$. El subíndice s indica que los flujos de fondos son obtenidos computando costos con adquisición $\%C_{(a)}$.

Sintetizando, las ecuaciones 9 y 10 son aplicadas para resolver los nodos contenidos dentro del intervalo de tiempo que va desde $t=5$ hasta $t=1$, con única variable de estado (precio) por cada escenario (cantidades).

2.3 Desarrollo del modelo para dos variables de estado (precio y cantidades)

El siguiente paso consiste en determinar el valor actual de cada estrategia. Implica el desafío de combinar dos variables de estado: precio y cantidades desde el momento $t=1$ hasta $t=0$. Se plantean los diferentes estados de cada variable y los parámetros necesarios para obtener los coeficientes equivalentes ciertos acorde con el modelo MKR. Los posibles estados son los siguientes,

Tabla 1. Diferentes estados correspondientes a las variables precio y cantidades

ζ_1^P	ζ_1^Q	p
$\zeta_1^P(u)$	$\zeta_1^Q(u)$	p_1
$\zeta_1^P(d)$	$\zeta_1^Q(d)$	p_2
$\zeta_1^P(m)$	$\zeta_1^Q(m)$	p_3
$\zeta_1^P(u)$	$\zeta_1^Q(u)$	p_4
$\zeta_1^P(d)$	$\zeta_1^Q(d)$	p_5

Fuente: elaboración propia

La combinación de las variables en $t=1$ (precio ζ_1^P y cantidad ζ_1^Q), presentan movimientos ascendente ($u_i = e^{\lambda_i \sigma_i \sqrt{t}}$), descendente ($d = 1/u_i$) y centralidad $m_i = u_i \cdot d_i = 1$. Las variables tienen coeficiente de variación igual a $1/\theta_i$ siendo $\theta = \mu_i/\sigma_i$. Las variables precedentes permiten derivar los parámetro λ_1 y λ_2 , cuyas condiciones de borde son:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + \theta_1^2 \Delta t} \quad (11.1)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sqrt{1 + \theta_2^2 \Delta t}}{\sqrt{1 + \theta_1^2 \Delta t}} \quad (11.2)$$

Las probabilidades de transición resultan ser las siguientes,

$$p_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\theta_1 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_1} + \frac{\theta_2 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_2} + \frac{1 + \theta_1^2 \Delta t}{\lambda_1^2} + \frac{\rho + \theta_1 \theta_2 \Delta t}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (12.1)$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\theta_1 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_1} - \frac{\theta_2 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_2} + \frac{1 + \theta_1^2 \Delta t}{\lambda_1^2} - \frac{\rho + \theta_1 \theta_2 \Delta t}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (12.2)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left[-\frac{\theta_1 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_1} - \frac{\theta_2 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_2} + \frac{1 + \theta_1^2 \Delta t}{\lambda_1^2} + \frac{\rho + \theta_1 \theta_2 \Delta t}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (12.3)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \left[-\frac{\theta_1 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_1} + \frac{\theta_2 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_2} + \frac{1 + \theta_1^2 \Delta t}{\lambda_1^2} - \frac{\rho + \theta_1 \theta_2 \Delta t}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \quad (12.4)$$

$$p_5 = 1 - \left[\frac{1 + \theta_1^2 \Delta t}{\lambda_1^2} \right] \quad (12.5)$$

Se supone correlación ρ entre las fuentes de incertidumbre. La valoración de la primer estrategia se realiza a partir de la ecuación 9, mediante el valor de los 3 nodos en $t=1$ cuya variable aleatoria es $\zeta_1^P = \zeta_1^{P(u)}, \zeta_1^{P(m)}, \zeta_1^{P(d)}$ y las cantidades expresadas en tres escenarios $\zeta_1^q = \zeta_1^{q(u)}, \zeta_1^{q(m)}, \zeta_1^{q(d)}$. En este caso, el modelo multinomial con dos variables de estado presenta 5 nodos a partir de combinar los escenarios de precio y cantidades. El valor actual de la estrategia de no invertir y diferir se calcula con la ecuación 13, en donde i_o representa la inversión operativa.

$$VOR_{(t=0)} = \left\{ \left[VOR_{(uu, t=1)} \times p_{uu}^1 + VOR_{(ud, t=1)} \times p_{ud}^2 + VOR_{(dd, t=1)} \times p_{dd}^3 + VOR_{(du, t=1)} \times p_{du}^4 + VOR_{(mm, t=1)} \times p_{mm}^5 \right] \times e^{-r} \right\} - i_o \quad (13)$$

Los mismos criterios son aplicados en la valoración de la estrategia 2. En el caso de adquisición el valor actual de la estrategia se obtiene mediante la ecuación 14, donde I_o representa el valor de adquisición.

$$V_{(t=0)} = \left\{ \left[V_{(uu, t=1)} \times p_{uu}^1 + V_{(ud, t=1)} \times p_{ud}^2 + V_{(dd, t=1)} \times p_{dd}^3 + V_{(du, t=1)} \times p_{du}^4 + V_{(mm, t=1)} \times p_{mm}^5 \right] \times e^{-r} \right\} - I_o \quad (14)$$

Finalmente, la elección entre ambas estrategias obedece a lógica expuesta en la ecuación 15. La elección de la estrategia $D(0)$ será función del valor dada la información disponible presente,

$$D(0) = \text{Max} \left[V_{(t=0)}, VOR_{(t=0)} \right] \quad (15)$$

2.4 Mapa gráfico para la valoración de estrategias: modelo multinomial con dos variables de estados correlacionadas y volatilidad cambiante precio.

El primer grafico presenta el mapa conceptual y las ecuaciones empleadas para valorar la estrategia 1. El planteo consiste en no adquirir y reservar la opción de compra con precio de ejercicio equivalente al valor actual del yacimiento más la tasa de interés de corto. El modelo consta de tres etapas de proyección: desde $t=5..31$ se suponen tres escenarios de producción (alta, media y baja). En el periodo $t=5$ se produce el ejercicio de la opción de compra del yacimiento o continuar adquiriendo el insumo del yacimiento para cada escenario de producción. Desde $t=5$ hasta $t=1$ cada escenario se valorado recursivamente como rejilla trinomial independiente. Los tres comparten la misma variable de estado (precio) con volatilidad cambiante, ajustado al flujo del periodo. Desde $t=1$ hasta $t=0$ el modelo es transformado a multinomial, pues existen dos fuentes de incertidumbre: precio y cantidades.

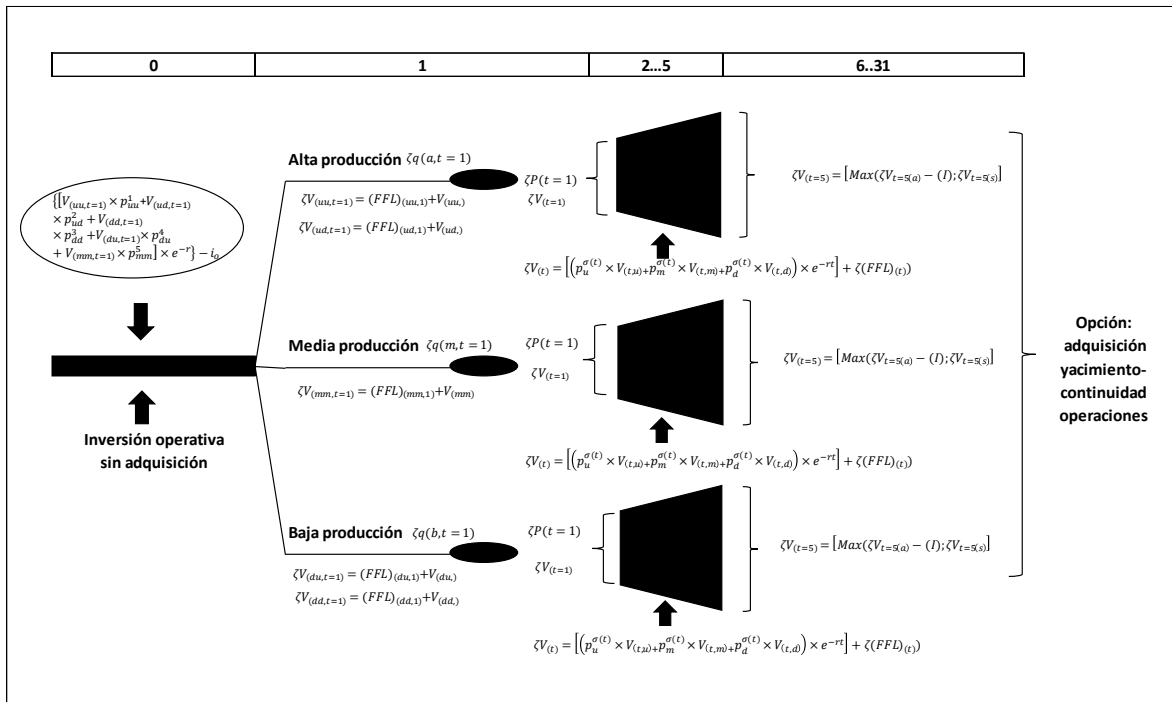


Gráfico 1. Proceso de valoración estrategia 1 diferimiento adquisición – continuidad operaciones
 Elaboración: elaboración propia

El segundo grafico representa la estrategia de compra y las expresiones utilizadas para su valuación. El planteo es similar al caso anterior, con la diferencia que no existe flexibilidad estratégica en $t=5$ y la inversión (compra) es irreversible. El modelo consta de tres etapas de proyección: desde $t=5$ a 31 se suponen tres escenarios de producción (alta, media y baja). Desde $t=5$ hasta $t=1$ cada escenario se plantea como una rejilla trinomial compartiendo la misma variable de estado (precio)

con volatilidad cambiante, ajustado al flujo y valor a las cantidades proyectadas. Desde $t=1$ hasta $t=0$ son dos fuentes de incertidumbre (precio y cantidades) siendo el modelo multinomial.

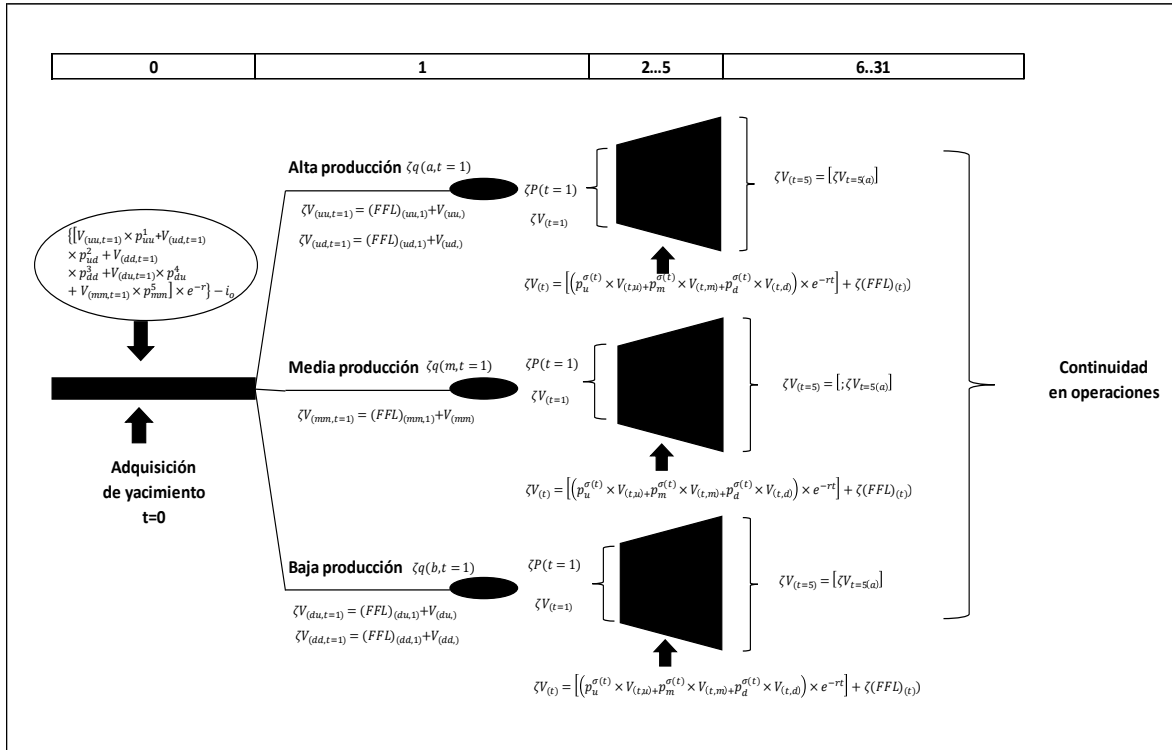


Gráfico 2. Proceso de valoración estrategia 2 adquisición – continuidad operaciones
 Fuente: elaboración propia

3. Análisis de caso: Compra o diferimiento yacimiento para la producción de litio.

Con el fin de ilustrar el funcionamiento del modelo desarrollado en el apartado anterior, se emplea la metodología de caso de estudio en administración (Castro Monge, 2010). Se centra en el análisis de la opción de inversión o diferimiento en un yacimiento a partir de una estrategia de expansión con integración vertical, incrementando la capacidad productiva de carbonato de litio. La localización del proyecto es la provincia de Jujuy, Argentina. En la actualidad el concesionario se encuentra produciendo y exportando carbonato de litio. La capacidad total actual de procesamiento de la planta es de 17.500 toneladas, proyectándose una expansión de la capacidad productiva hasta 25.000 toneladas adicionales por año, a partir de la provisión de salmuera de un yacimiento lindante con a la planta. El incremento en la capacidad productiva conlleva las siguientes estrategias en relación al yacimiento proveedor de salmuera:

1. Comprar la salmuera proveniente del yacimiento, con opción de compra de la concesión en el quinto año, cuya valoración se detalla en el gráfico 1.

- Adquirir en el presente la concesión de explotación del yacimiento, cuya valoración se detalla en el gráfico 2.

La información arrojada por los estudios geológicos indica una vida útil correspondiente al yacimiento de 31 años. La siguiente tabla presenta el valor correspondiente a las inversiones en infraestructura operativa y precio de compra acorde a cada estrategia,

Tabla 2. Valores correspondientes a inversiones y gastos de infraestructura del proyecto

<i>D1: Diferir</i>		<i>T=0</i>	<i>T=5</i>
Infraestructura	\$	97.000.000,00	\$ 30.000.000,00
Compra			\$ 296.074.146,34
<i>D2: Invertir</i>		<i>T=0</i>	
Infraestructura	\$	55.500.000,00	
Compra	\$	300.000.000,00	

Fuente: elaboración propia

Para la estrategia 1 el valor de adquisición (I_5 , precio de ejercicio) en $t=5$ se obtiene capitalizado a la tasa de interés libre de riesgo el valor presente del yacimiento (ecuación 8). En el anexo 1 del trabajo se encuentra desarrolla la valoración del yacimiento. El valor estimado de compra e inversiones (I_0) asciende a \$300.000.000 y los costos de operación son de u\$55.500.000

Respecto de la proyección del precio del litio⁵, esta se lleva a cabo mediante una rejilla trinomial de cinco periodos, con pendiente a los efectos de ajustar el precio hacia un valor de equilibrio⁶. En relación a cantidades y perspectivas de producción, el crecimiento exponencial de la demanda se correlaciona con cantidades incrementales en la producción global y local de litio. Son propuestos tres escenarios de producción son tres: bajo, medio, alto para el primer periodo⁷. En relación a las cantidades, los escenarios son punto de partida en las proyecciones desde $t=1$ hasta $t=5$ suponiendo incremento en la producción, por ello presentan pendiente positiva. Para cada escenario se supone que los niveles de producción se estabilizan en máximos desde $t=5$ hasta el final de la vida

⁵En la actualidad no existen mercados desarrollados e institucionalizados que informen el precio del litio. Los datos disponibles se corresponden a valores aproximados obtenidos desde variadas fuentes de la industria, asociados a distintos compuestos, diferentes calidades y concentraciones y lugares específicos donde se producen las operaciones. Es así como el USGS (Servicio Geológico de Estados Unidos) ha publicado, en sus reportes anuales más recientes, los precios spot del carbonato de litio y del hidróxido de litio para China (principal productor), precio promedio anual de contratos fijos de suministro del carbonato de litio grado batería en Estados Unidos y el precio *spot* del metal de litio (99,9% de litio) en China. En el caso de Argentina y Chile, los precios correspondientes al carbonato de litio y cloruro de litio son levemente inferiores a los negociados en Estados Unidos, debido a la fijación de precios de transferencia entre partes relacionadas.

⁶ A la fecha del presente trabajo (junio 2023), si bien el precio observó un fuerte incremento, alcanzando los u\$80.000 la tonelada en enero 2023, se observa una tendencia decreciente en los valores, proyectando valores entre los u\$36.000 a u\$22.000 la tonelada para los próximos periodos. Ver <https://econojournal.com.ar/2023/03/el-precio-internacional-del-litio-bajo-mas-de-22-en-el-primer-trimestre-del-ano/> y https://www.datos.gob.ar/dataset/produccion-precios-internacionales-carbonato-litio-tablero-global-litio---siacam/archivo/produccion_e41cfefc-6404-4b5f-82b5-aa31e6eae83

⁷ Argentina produce actualmente 33.000 toneladas anuales representando el 5% de la producción mundial, posicionándose en cuarto lugar luego de China, Chile y Australia, <https://www.reportlinker.com/report-summary/Metals/89661/Global-Lithium-Industry.html?tstv=autogen>. Y <https://www.datos.gob.ar/dataset/produccion-proyeccion-demanda-oferta-global-litio-tablero-global-litio---siacam>.

propuesta para el yacimiento. La siguiente tabla expone las variables para la construcción de las rejillas trinomiales de precio (P) y cantidades (Q),

Tabla 3. Parametros rejilla trinomial para las variables precio y cantidades

<i>Variables rejilla multinomial</i>		
Precio/Cantidad	<i>P</i>	<i>Q</i>
μ (<i>drift</i>)	-2,67%	10,00%
σ	5,8%	15,0%
θ	-0,46	0,67
λ (<i>inferior</i>)	1,0998	1,2019
λ (<i>superior</i>)	2,6421	2,1667
r	4,87%	4,87%
u	1,0662	1,1975
d	0,9379	0,8350
$m=u.d$	1	1
ρ (<i>correlación</i>)	-0,2	

Fuente: elaboración propia

Los parámetros utilizados en la elaboración de rejillas trinomiales individuales (de un solo estado) u , d , m , θ y λ son obtenidos mediante las ecuaciones 3 y 4. La correlación precio cantidades se fija en una relación negativa de -0,2⁸.

Dado los altibajos correspondiente a la serie histórica del precio del litio, el valor de inicio de proyección responde a un promedio entre las series de precio futuras desarrolladas por las consultoras Benchmarkminerals y WoodMackenzie Energy Research⁹. En el intervalo de tiempo que va desde 2023 hasta 2054 se prevé precio estabilizado en u\$24.000 la tonelada. La media aritmética correspondiente al precio proyectado arroja un intervalo de valores entre u\$28.441 por tonelada (WoodMackenzie) y u\$25.594 por tonelada (Benchmarckminerals). El promedio de las estimaciones arroja un valor de u\$27.071. Este último es el que se toma como punto de partida en las proyecciones.

El mercado espera que el precio se estabilice gradualmente, consecuentemente la volatilidad precio no debe representarse como constante en el tiempo. El primer periodo se considera de máxima volatilidad hasta estabilizar en el cuarto periodo. Utilizando las ecuaciones 2, 3 y 4 se obtienen los parámetros correspondientes a $t=1$ para proyectar precio, conforme se expresa en la siguiente tabla. Por tasa libre de riesgo se toma a los T-Bonds emitidos por la Reserva Federal EE.UU a 10 años, media aritmética 1928-2022¹⁰

⁸ Valor fijado arbitrariamente a los efectos del desarrollo del ejercicio, asumiendo una relación causal tradicional entre precios y cantidades para la función de demanda.

⁹ Ver proyecciones en <https://www.benchmarkminerals.com/lithium-prices/> y <https://www.woodmac.com/industry/metals-and-mining/lithium-research-suite/>

¹⁰ Ver <https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/> (A. Damodaran).

Para estimar el flujo de fondos en cada periodo se utiliza la ecuación 1. Cabe recordar que una de las principales diferencias entre la estrategia de diferir (1) o adquirir (2) se basa en los costos de operación y compra de la materia prima. En el caso de la compra se denota como $(\%C_{(a,s)})$, e implica un ahorro en costo, en particular de compra de salmuera. La primer estrategia implica mayores costos operativos desde $t=1$ hasta $t=5$ $(\%C_{(s)})$.

En relación al ejercicio de la opción de compra, este tiene implicancia en los costos de operación correspondiente a la estrategia 1. El ejercicio de la opción implica comparar el valor desde $t=5$ hasta $t=31$ con la nueva estructura de costos, versus la actual. $Max\{[\zeta(V)_{(a,t=5)} - I_5]; [\zeta(V)_{(s,t=5)}]\}$. La siguiente tabla expone los costos de operación.

Tabla 4. Costos de operación para cada estrategia

Estrategia 1: Diferir	US\$/tn Li2CO3	Estrategia 2: Adquirir	US\$/tn Li2CO3
Compra de Salmuera	1.200	Extracción de Salmuera	100
Costo Directo de Procesamiento	2.100	Costo Directo de Procesamiento	2.100
Total Costos Directos	3.300	Total Costos Directos	2.200
Costos Indirectos	2.300	Costos Indirectos	1.900
Total Costo de Producción	5.600	Total Costo de Producción	4.100

Fuente: elaboración propia

En vías de simplificar el modelo, los costos se toman como constantes en valores absolutos y se los calcula como un porcentaje en relación al precio de venta¹¹, $(1 - \%C_{(a,s)})$ donde $\%C_{(a,s)} = co/\zeta^p(t)$, siendo co el costo de operación en unidades monetarias. Las probabilidades de transición para la rejilla trinomial con una sola variable de estado (precio) desde $t=1$ hasta $t=5 \rightarrow 31$ se tiene los siguientes valores,

Tabla 5. Probabilidades de transición precio (t=1 en adelante)

Volatilidad	σ_1	σ_2	σ_2	σ_3	σ_4
Probabilidades	5,8%	3,5%	3,5%	2,0%	1,0%
<i>pui</i>	0,4007	0,1444	0,1444	0,0471	0,0118
<i>pmi</i>	0,1722	0,7017	0,7017	0,9026	0,9756
<i>pdi</i>	0,4272	0,1539	0,1539	0,0503	0,0126

Fuente: elaboración propia

Para confeccionar las rejillas trinomiales por escenario de producción y para cada estrategia (comprar yacimiento o diferir la compra) se proyectan series de producción. En la siguiente tabla se presentan las toneladas proyectadas por escenario, desde $t=1$ hasta $t=5$ con la correspondiente estabilización en $t=5 \rightarrow 31$.

¹¹ Siendo decrecientes en participación sobre el precio frente a aumentos del último, y creciente ante bajas del precio.

Tabla 6. Escenarios de producción y proyección de cantidades (elaboración propia)

<i>Periodos</i>	<i>Alta</i>	<i>Media</i>	<i>Baja</i>
1	5000	3000	1000
2	17000	10000	5000
3	20000	17000	7000
4	25000	20000	10000
5	25000	20000	18000

Fuente: elaboración propia

Habiendo calculado los escenarios de producción, la estructura de costos por estrategia y la proyección del precio del litio, los pasos a seguir son:

- a) proyección del flujo de fondos desde $t=1$ hasta $t=5$;
- b) determinación del valor del proyecto en $t=5 \rightarrow 31$,
- c) resolución recursiva aplicando las probabilidades de transición de cada rejilla trinomial.

Para la resolución del intervalo de tiempo $t=1$ hasta $t=0$ se debe construir la rejilla multinomial. En este caso se combinan dos variables de estado correlacionadas: Precio (P) y Cantidades (Q). Son utilizadas las ecuaciones 11.1 y 11.2 para definir el valor de los parámetros de amplitud λ . Con dicho parámetro se procede a calcular las probabilidades de transición a ser utilizadas en la rejilla multinomial para el periodo $t=1 \rightarrow 0$ (12.1, 12.2, 12.3, 12.4 y 12.5). Seguidamente se presentan los valores obtenidos,

Tabla 7. Probabilidades de transición precio-cantidad rejilla multinomial

<i>Probabilidades rejilla multinomial</i>			
<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>Probabilidades</i>	
<i>u</i>	<i>u</i>	<i>p1</i>	0,17688
<i>u</i>	<i>d</i>	<i>p2</i>	0,11498
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>p3</i>	0,10767
<i>d</i>	<i>u</i>	<i>p4</i>	0,60047
<i>0</i>	<i>0</i>	<i>p5</i>	0,00000
ΣP			1,00000

Fuente: elaboración propia

4. Resultados obtenidos

La presente sección se divide en dos partes, la primera expone las tablas que arroja el proceso de valuación descrito en los gráficos 1 y 2. Asimismo es desarrollado un análisis de sensibilidad analizando el impacto del costo por tonelada sobre el valor de la estrategia. Los valores obtenidos constituyen el insumo para la elección de la estrategia y la construcción del juego. Este último es

desarrollado en la segunda sección, planteado desde la perspectiva del desarrollador del proyecto, con la finalidad de explorar posibles conductas y reacciones en ofertas de compra del yacimiento.

4.1 Valoración de estrategias desde la perspectiva del desarrollador del proyecto

La siguiente tabla desarrolla la rejilla trinomial correspondiente al precio del bien ($\varsigma^P(t)$), con las ecuaciones 2 y 3.

Tabla 8. Rejilla trinomial precio litio

0	1	2	3	4	5
\$ 27.017,82	\$ 28.807,11	\$ 30.714,90	\$ 32.749,04	\$ 34.917,89	\$ 37.230,38
	\$ 27.017,82	\$ 28.807,11	\$ 30.714,90	\$ 32.749,04	\$ 34.917,89
	\$ 25.339,66	\$ 27.017,82	\$ 28.807,11	\$ 30.714,90	\$ 32.749,04
		\$ 25.339,66	\$ 27.017,82	\$ 28.807,11	\$ 30.714,90
		\$ 23.765,74	\$ 25.339,66	\$ 27.017,82	\$ 28.807,11
			\$ 23.765,74	\$ 25.339,66	\$ 27.017,82
			\$ 22.289,58	\$ 23.765,74	\$ 25.339,66
				\$ 22.289,58	\$ 23.765,74
				\$ 20.905,11	\$ 22.289,58
					\$ 20.905,11
					\$ 19.606,64

Fuente: elaboración propia

Las siguientes tablas exponen el porcentaje que representan los costos (tabla 4) sobre precio del litio (tabla 8) para las estrategias analizadas.

Tabla 9. Rejilla trinomial participación costos sobre precio litio estrategia 1

0	1	2	3	4	5
21%	19%	18%	17%	16%	15%
	21%	19%	18%	17%	16%
	22%	21%	19%	18%	17%
		22%	21%	19%	18%
		24%	22%	21%	19%
			24%	22%	21%
			25%	24%	22%
				25%	24%
				27%	25%
					27%
					29%

Fuente: elaboración propia

Tabla 10. Rejilla trinomial participación costos sobre precio litio estrategia 2 (elaboración propia)

0	1	2	3	4	5
15%	14%	13%	13%	12%	11%
	15%	14%	13%	13%	12%
	16%	15%	14%	13%	13%
		16%	15%	14%	13%
		17%	16%	15%	14%
			17%	16%	15%
			18%	17%	16%
				18%	17%
				20%	18%
					20%
					21%

Fuente: elaboración propia

Valoración de la estrategia 1 desde $t=5$ a $t=1$: Las siguientes tablas surgen de valorar recursivamente la estrategia 1 para los tres escenarios de producción. El flujo de fondos (ecuación 1) se construye de las proyecciones de producción ($q(t)$), precio ($\zeta^p(t)$) y costos operativos sin adquisición ($\%C_{(s)}$). El valor del proyecto en $t=5$ se obtiene mediante la ecuación 7 (valor desde $t=5$ hasta $t=31$). La estrategia 1 incorpora el ejercicio de la opción de comprar o continuar con las operaciones (ecuación 8). La resolución recursiva se desarrolla con la ecuación 9. Las tablas que se destacan en negritas itálicas indican la decisión adoptada en cada nodo. Para la resolución recursiva desde $t=5$ hasta $t=1$ es utilizada la ecuación 9.

Tabla 4. Proceso recursivo valoración estrategia 1 escenario de alta producción (ecuaciones 1,7,8 y 9)

	1	2	3	4	5	<i>Decisión</i>
\$	10.807.930.117,55	\$ 12.133.892.479,07	\$ 13.272.681.877,58	\$ 14.419.004.945,01	\$ 15.488.941.006,57	<i>Adquirir</i>
\$	10.001.572.338,08	\$ 11.240.079.711,39	\$ 12.307.166.710,64	\$ 13.382.366.762,77	\$ 14.387.756.778,67	<i>Adquirir</i>
\$	9.245.299.778,03	\$ 10.401.784.245,99	\$ 11.401.622.489,88	\$ 12.410.117.183,37	\$ 13.354.970.295,65	<i>Adquirir</i>
		\$ 9.615.557.742,27	\$ 10.552.324.245,96	\$ 11.498.256.844,03	\$ 12.386.333.175,26	<i>Adquirir</i>
		\$ 8.878.166.046,07	\$ 9.755.778.378,20	\$ 10.643.034.793,97	\$ 11.477.860.914,63	<i>Adquirir</i>
			\$ 9.008.708.283,57	\$ 9.840.933.064,84	\$ 10.625.816.499,88	<i>Adquirir</i>
			\$ 8.308.040.878,37	\$ 9.088.652.199,50	\$ 9.826.695.033,92	<i>Adquirir</i>
				\$ 8.383.097.679,67	\$ 9.077.209.318,97	<i>Adquirir</i>
				\$ 7.721.367.196,55	\$ 8.374.276.334,63	<i>Adquirir</i>
					\$ 7.715.004.555,84	<i>Adquirir</i>
					\$ 7.096.682.058,55	<i>Adquirir</i>

Fuente: elaboración propia

Tabla 5. Proceso recursivo valoración estrategia 1 escenario de media producción
 (ecuaciones 1,7,8 y 9)

1	2	3	4	5	Decisión
\$ 8.517.598.930,88	\$ 9.591.111.578,35	\$ 10.593.278.927,04	\$ 11.480.521.441,09	\$ 12.333.666.657,85	Adquirir
\$ 7.878.810.283,35	\$ 8.881.114.666,85	\$ 9.818.832.655,54	\$ 10.651.210.895,30	\$ 11.452.719.275,53	Adquirir
\$ 7.279.698.650,64	\$ 8.215.217.721,90	\$ 9.092.489.487,18	\$ 9.873.411.231,78	\$ 10.626.490.089,11	Adquirir
	\$ 7.590.681.566,72	\$ 8.411.261.598,77	\$ 9.143.922.960,31	\$ 9.851.580.392,80	Adquirir
	\$ 7.004.937.162,75	\$ 7.772.346.749,48	\$ 8.459.745.320,26	\$ 9.124.802.584,30	Adquirir
		\$ 7.173.116.753,78	\$ 7.818.063.936,96	\$ 8.443.167.052,50	Adquirir
		\$ 6.611.106.670,35	\$ 7.216.239.244,68	\$ 7.803.869.879,73	Adquirir
			\$ 6.651.795.628,82	\$ 7.204.281.307,77	Adquirir
			\$ 6.122.411.242,33	\$ 6.641.934.920,30	Adquirir
				\$ 6.114.517.497,27	Adquirir
				\$ 5.619.859.499,43	Adquirir

Fuente: elaboración propia

Tabla 6. Proceso recursivo valoración estrategia 1 escenario de baja producción
 (ecuaciones 1,7,8 y 9)

1	2	3	4	5	Decisión
\$ 7.180.467.671,85	\$ 8.126.714.872,34	\$ 9.076.006.433,67	\$ 10.070.584.889,26	\$ 11.071.556.918,36	Adquirir
\$ 6.641.166.135,06	\$ 7.524.221.155,31	\$ 8.411.367.589,33	\$ 9.341.556.210,96	\$ 10.278.704.274,27	Adquirir
\$ 6.135.362.180,23	\$ 6.959.150.069,75	\$ 7.788.011.390,48	\$ 8.657.809.617,42	\$ 9.535.098.006,49	Adquirir
	\$ 6.429.177.187,53	\$ 7.203.373.652,33	\$ 8.016.532.507,07	\$ 8.837.679.279,82	Adquirir
	\$ 5.932.122.457,49	\$ 6.655.049.459,03	\$ 7.415.086.977,20	\$ 8.183.579.252,16	Adquirir
		\$ 6.140.783.271,05	\$ 6.850.998.972,85	\$ 7.570.107.273,54	Adquirir
		\$ 5.658.459.646,92	\$ 6.321.948.109,82	\$ 6.994.739.818,05	Adquirir
			\$ 5.825.758.129,67	\$ 6.455.110.103,29	Adquirir
			\$ 5.360.387.947,71	\$ 5.948.998.354,56	Adquirir
				\$ 5.474.322.673,84	Adquirir
				\$ 5.029.130.475,78	Adquirir

Fuente: elaboración propia

Valoración de la estrategia 2 desde $t=5$ a $t=1$: Nuevamente se utiliza la ecuación 1 para estimar el flujo de fondos. Este surge de las proyecciones de producción ($q(t)$), precio ($\zeta^P(t)$) y costos operativos en este caso con adquisición ($\%C_{(a)}$). Aplicando la ecuación 7 se obtiene el valor de continuidad, resuelto recursivamente hasta el momento $t=1$, (ecuación 10).

Tabla 7. Proceso recursivo valoración estrategia 2 escenario de alta producción
 (ecuaciones 1,7 y 10)

	1	2	3	4	5
\$	11.134.436.523,33	\$ 12.469.254.693,02	\$ 13.598.431.066,96	\$ 14.729.917.519,59	\$ 15.776.371.743,61
\$	10.328.078.743,86	\$ 11.575.441.925,34	\$ 12.632.915.900,03	\$ 13.693.279.337,35	\$ 14.675.187.515,71
\$	9.571.806.183,81	\$ 10.737.146.459,94	\$ 11.727.371.679,27	\$ 12.721.029.757,95	\$ 13.642.401.032,69
		\$ 9.950.919.956,23	\$ 10.878.073.435,35	\$ 11.809.169.418,61	\$ 12.673.763.912,30
		\$ 9.213.528.260,03	\$ 10.081.527.567,59	\$ 10.953.947.368,55	\$ 11.765.291.651,67
			\$ 9.334.457.472,96	\$ 10.151.845.639,42	\$ 10.913.247.236,92
			\$ 8.633.790.067,76	\$ 9.399.564.774,08	\$ 10.114.125.770,97
				\$ 8.694.010.254,25	\$ 9.364.640.056,01
				\$ 8.032.279.771,13	\$ 8.661.707.071,67
					\$ 8.002.435.292,89
					\$ 7.384.112.795,59

Fuente: elaboración propia

Tabla 8. Proceso recursivo valoración estrategia 2 escenario de media producción
 (ecuaciones 1,7 y 10)

	1	2	3	4	5
\$	8.820.590.349,50	\$ 9.904.906.979,26	\$ 10.907.393.895,74	\$ 11.783.934.015,67	\$ 12.621.097.394,89
\$	8.182.565.690,62	\$ 9.194.910.067,76	\$ 10.132.947.624,24	\$ 10.954.623.469,88	\$ 11.740.150.012,57
\$	7.584.170.593,02	\$ 8.529.013.122,81	\$ 9.406.604.455,88	\$ 10.176.823.806,36	\$ 10.913.920.826,15
		\$ 7.904.476.967,63	\$ 8.725.376.567,48	\$ 9.447.335.534,89	\$ 10.139.011.129,84
		\$ 7.318.732.563,66	\$ 8.086.461.718,19	\$ 8.763.157.894,84	\$ 9.412.233.321,34
			\$ 7.487.231.722,48	\$ 8.121.476.511,54	\$ 8.730.597.789,54
			\$ 6.925.221.639,06	\$ 7.519.651.819,26	\$ 8.091.300.616,77
				\$ 6.955.208.203,40	\$ 7.491.712.044,81
				\$ 6.425.823.816,91	\$ 6.929.365.657,34
					\$ 6.401.948.234,31
					\$ 5.907.290.236,47

Fuente: elaboración propia

Tabla 9. Proceso recursivo valoración estrategia 2 escenario de baja producción (ecuaciones 1,7 y 10)

	1	2	3	4	5
\$	7.491.736.349,12	\$ 8.438.054.331,20	\$ 9.378.884.197,08	\$ 10.358.997.463,84	\$ 11.358.987.655,40
\$	6.964.988.305,60	\$ 7.850.025.392,53	\$ 8.730.839.657,63	\$ 9.648.942.018,72	\$ 10.566.135.011,31
\$	6.470.592.715,75	\$ 7.298.161.589,43	\$ 8.122.693.466,70	\$ 8.982.641.698,30	\$ 9.822.528.743,53
		\$ 6.780.192.822,11	\$ 7.551.944.006,10	\$ 8.357.355.666,50	\$ 9.125.110.016,86
		\$ 6.293.988.418,52	\$ 7.016.243.489,60	\$ 7.770.511.800,13	\$ 8.471.009.989,20
			\$ 6.513.388.305,34	\$ 7.219.696.108,41	\$ 7.857.538.010,59
			\$ 6.041.309.951,20	\$ 6.702.642.802,98	\$ 7.282.170.555,10
				\$ 6.217.224.977,53	\$ 6.742.540.840,33
				\$ 5.761.445.858,79	\$ 6.236.429.091,61
					\$ 5.761.753.410,88
					\$ 5.316.561.212,83

Fuente: elaboración propia

Valoración de la rejilla multinomial desde $t=1$ hasta $t=0$: Las siguientes tablas presentan la resolución de la rejilla multinomial para el periodo $t=1$ hasta $t=0$. Combina las dos variables de estado, arrojando 5 escenarios para $t=1$ ($2n+1$). Para valorar la estrategia 1 se utilizan la ecuación 13.

Tabla 10. Valoración recursiva multinomial estrategia 1 (ecuación 13)

T=0		T=1		
	$p1$	\$ 10.807.930.117,55	$V=1 (FF1uu)+VA(Vuu)$	uu
	$p2$	\$ 9.245.299.778,03	$V=1 (FF1ud)+VA(Vud)$	ud
\$ 7.462.415.639,00	$p5$	\$ 7.878.810.283,35	$V=1 (FF1mm)+VA(Vmm)$	mm
	$p4$	\$ 7.180.467.671,85	$V=1 (FF1du)+VA(Vdu)$	du
	$p3$	\$ 6.135.362.180,23	$V=1 (FF1dd)+VA(Vdd)$	dd

Fuente: elaboración propia

En el caso de la estrategia 2 es empleada la ecuación 14 para estimar el valor actual

Tabla 11. Valoración recursiva multinomial estrategia 2 (ecuación 14)

T=0		T=1		
	$p1$	\$ 11.134.436.523,33	$V=1 (FF1uu)+VA(Vuu)$	uu
	$p2$	\$ 9.571.806.183,81	$V=1 (FF1ud)+VA(Vud)$	ud
\$ 7.506.688.076,61	$p5$	\$ 8.182.565.690,62	$V=1 (FF1mm)+VA(Vmm)$	mm
	$p4$	\$ 7.491.736.349,12	$V=1 (FF1du)+VA(Vdu)$	du
	$p3$	\$ 6.470.592.715,75	$V=1 (FF1dd)+VA(Vdd)$	dd

Fuente: elaboración propia

A partir de la información disponible en la actualidad, el agente selecciona el curso de acción de mayor valor (ecuación 15). Como todo modelo de analítico de toma de decisiones, la información suministrada se traduce a valores presentes cursos secuenciales de acciones futuras. Las conclusiones serán válidas en un punto del tiempo, ya que el conjunto de información tiende a variar (Massé, 1963). En este caso, la diferencia de valor entre la estrategia 1 y 2 asciende a u\$74.367.965, a favor de la primera.

Otra perspectiva de análisis reside en calcular el valor marginal de ambas estrategias, desde la perspectiva de la compra versus diferimiento de la inversión. El resultado obtenido deriva del máximo valor entre el incremento en el valor teórico de la cantera en $t=5$, y el valor de la opción de diferir, capitalizada al mismo horizonte. La tabla ratifica la elección de la estrategia 2.

Tabla 12. Análisis marginal de estrategias desde la perspectiva inversión-valor opción

Valor oferta adquisición $t=0$	\$ 300.000.000,00
Valor compra en $t=5$ $V(e^{rt})$	\$ 296.074.146,34
Valor opción diferir (VOR)	-\$ 74.367.955,04
$VOR^* e^{rt}, t=5$	-\$ 95.490.344,46
Δ Valor Cantera $(V(e^{rt})-V_0)$	-\$ 65.491.369,32
$Max(\Delta$Valor Cantera, $VOR^* e^{rt}, t=5)$	comprar ahora

Fuente: elaboración propia

El comportamiento del precio del litio es un factor exógeno común para ambas estrategias. El diferencial está dado por los costos variables, el valor de adquisición del yacimiento y momento de ejercicio de la compra. Bajo las condiciones analizadas, la estrategia 2 aporta mayor valor que la estrategia 1, sin perjuicio de que la decisión elegible en el caso analizado carece de flexibilidad estratégica. Por ello se procede a sensibilizar los valores correspondientes a costos por toneladas y precio de adquisición del yacimiento, a los efectos de comparar directamente las estrategias suponiendo similares condiciones.

Tabla 13. Sensibilidad costo-adquisición

Estrategia 2	\$ 250.000.000,00	\$ 300.000.000,00	\$ 350.000.000,00
\$ 3.600,00	\$ 7.721.465.194,21	\$ 7.671.465.194,21	\$ 7.621.465.194,21
\$ 4.100,00	\$ 7.556.688.076,61	\$ 7.506.688.076,61	\$ 7.456.688.076,61
\$ 4.700,00	\$ 7.358.955.535,50	\$ 7.308.955.535,50	\$ 7.258.955.535,50
\$ 5.600,00	\$ 7.062.356.723,83	\$ 7.012.356.723,83	\$ 6.962.356.723,83
\$ 6.000,00	\$ 6.930.535.029,75	\$ 6.880.535.029,75	\$ 6.830.535.029,75
Estrategia 1	\$ 250.000.000,00	\$ 300.000.000,00	\$ 350.000.000,00
\$ 3.600,00	\$ 7.896.564.003,75	\$ 7.896.564.003,75	\$ 7.896.564.003,75
\$ 4.100,00	\$ 7.732.492.994,70	\$ 7.732.492.994,70	\$ 7.732.492.994,70
\$ 4.700,00	\$ 7.536.906.664,90	\$ 7.535.607.783,83	\$ 7.535.607.783,83
\$ 5.600,00	\$ 7.468.202.702,82	\$ 7.432.320.121,57	\$ 7.390.322.624,51
\$ 6.000,00	\$ 7.455.875.750,12	\$ 7.419.993.168,88	\$ 7.377.995.671,82

Elección	1	2	3
A	E1	E1	E1
B	E1	E1	E1
C	E1	E1	E1
D	E1	E1	E1
E	E1	E1	E1

La estrategia 1 implica costos por u\$5.600 la tonelada y valor de adquisición (ejercicio) u\$296.074.146 en $t=5$, arrojando un resultado de u\$7.432.320.121 conforme es destacado en la tabla. La estrategia 2, en cambio, implica costos por u\$4.100 la tonelada y valor de adquisición en $t=0$ de u\$300.000.000, arrojando un valor de u\$7.506.688.076. Bajo estas circunstancias la elección recae sobre la inversión sin diferimiento. Si se supone similares condiciones de costos y valor de adquisición para cada estrategia, en todos los casos la estrategia 1 es elegible antes que la estrategia 2. El valor añadido se encuentra en su flexibilidad estratégica incorporada en el diferimiento de la decisión a la espera de mayor información sobre los factores de incertidumbre. Esa ventaja redundante en un mayor valor ante igualdad de condiciones, conforme surge de la tabla.

Seguidamente es sensibilizado el valor frente a cinco posibles escenarios de costos, con el objeto de trazar un comportamiento gráfico. Los escenarios son: estrategia 1 (E1: \$6.000, E2: \$5.600; E3: \$4.100; E4: \$3.600; E5: \$2.500) y estrategia 2 (E1: \$6.000, E2: \$4.100; E3: \$3.500; E4: \$3.000; E5: \$2.500). La valoración de cada estrategia es expuesta en la siguiente tabla,

Tabla 21. Sensibilidad costo para cada estrategia (elaboración propia)

Escenario	Estrategia 1	Estrategia 2
1	\$ 7.419.993.168,88	\$ 6.880.535.029,75
2	\$ 7.432.320.121,57	\$ 7.506.688.076,61
3	\$ 7.732.492.994,70	\$ 7.704.420.617,73
4	\$ 8.093.449.214,62	\$ 7.869.197.735,33
5	\$ 8.257.520.223,67	\$ 8.033.974.852,92

Atendiendo a las circunstancias del contexto, la estrategia 2 es la que presenta mayor valor, siempre que las condiciones iniciales de información para proyectar no varíen. El siguiente gráfico ilustra los valores obtenidos de sensibilizar costos.

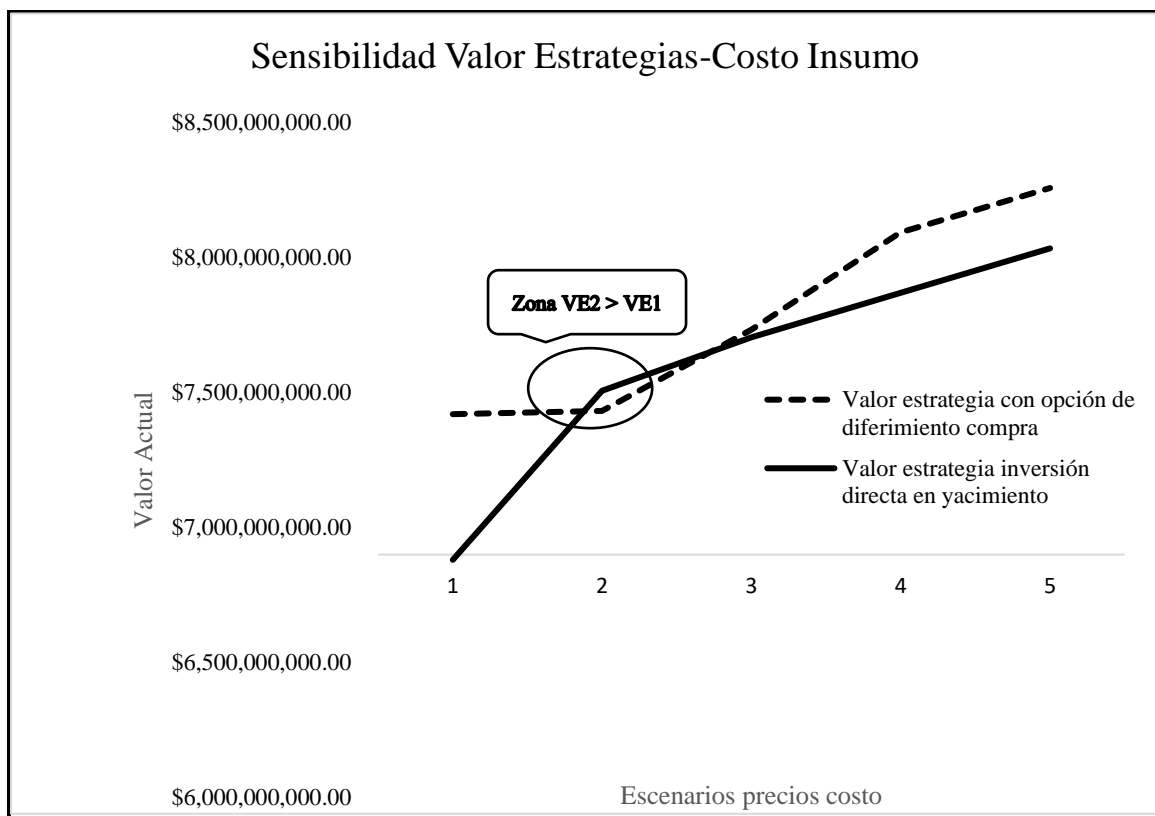


Gráfico 3. Perfil valor estrategias de diferimiento y adquisición

Fuente: elaboración propia

La línea punteada corresponde a la estrategia 1, asemejándose su comportamiento a un *call*, a partir del escenario 3 sus beneficios son superiores a los generados por la estrategia 2. El caso puntual evaluado (escenarios 2 a 3) hace que la estrategia 2 arroje valores por encima de la 1.

4.2. Negociación y valuación del yacimiento.

En el proceso de negociación¹² se deben estimar las bandas de valores, máximo y mínimos a ofertar ajustadas a cada curso de acción. Desde la perspectiva del comprador, los valores a ofertar por el yacimiento surgen del modelo analítico desarrollado para la valoración de las estrategias 1 y 2. Los cursos de acción se reducen a dos estrategias de negociación:

- Acordar un precio para la transferencia del yacimiento con incentivos a concretar la estrategia 2 (Adquirir)
- Diferir el derecho de compra (Diferir). Suponiendo información perfecta entre las partes los precios proyectados son los siguientes:

¹² Existe un amplio material para el estudio de Juegos, citando a (Guintis, 2009) y (Aguado Franco, 2007) entre otros.

Tabla 14. Precios propuestos frente a estrategias de compra acordada (A) – imposición y venta (I/A)

	(V) A	(V) I/A
(C) A	\$ 300.000.000	\$ 316.853.883
(C) I/A	\$ 251.407.943	\$ 230.582.777

Fuente: elaboración propia

La situación de acuerdo entre las partes (A-A) el precio ofertado asciende a u\$300.000.000, valor planteado para la valoración de las estrategias en el modelo analítico. El otro extremo presenta conductas sin acuerdo y supone por defecto la estrategia 1. El precio a ofertar en $t=5$, a valores actuales, se conecta con el valor determinado en el anexo, u\$230.582.777.

El precio anterior es un piso de referencia para la presente negociación al no acordar. De verificarse la tendencia en las proyecciones, el margen de negociación permite incrementar el precio en u\$192.040.154, que surge de la diferencia entre el valor de la estrategia 1 con opción de compra (u\$7.432.320.121) y el valor de la misma estrategia sin la opción de compra ni reducción de costos de operación (u\$ 7.240.279.967). El último valor es el resultante de una estrategia 1 sin ejercicio de opción de compra. En el anexo se desarrolla el proceso de cálculo para estimar el valor indicado.

Se supone para los escenarios con conductas opuestas, quien toma la iniciativa impone precio, siendo aceptado o rechazado por la contraparte. Suponiendo conductas hipotéticas, en el caso de iniciativa a favor del comprador, la oferta asciende a u\$251.407.943: valor intrínseco del yacimiento más 30% de la diferencia entre el máximo valor y el valor teórico. Si la iniciativa la toma el vendedor, el precio propuesto es el valor intrínseco de la cantera más el 60% de la diferencia entre el máximo valor y el valor de la cantera.

En base a los precios propuestos en la tabla anterior, es calculado el valor de la operación para las partes: adquirente (A) $VAN = (VAI - C)$, vendedor $VAN = (I(cobro) - VC)$

Tabla 23. Flujo de fondos para cada estrategia

Estrategias	Comprador	Vendedor
Acuerdo-Acuerdo	\$ 74.367.955,04	\$ 69.417.222,98
Iniciativa -Acuerdo	\$ 122.960.011,13	\$ 20.825.166,90
Acuerdo -Iniciativa	\$ 57.514.071,21	\$ 86.271.106,81
Diferir-Diferir	-\$ 74.367.955,04	\$ -

Fuente: elaboración propia

De estos valores se plantea un simple juego de única secuencia, a los efectos de anticipar potenciales conductas. Seguidamente se plantea el desarrollo matricial del mismo.

Tabla 24. Exposición matricial del juego

	(V) A	(V) I/A
(C) A	\$ 74.367.955,04	\$ 57.514.071,21
	\$ 69.417.222,98	\$ 86.271.106,81
(C) I/A	\$ 122.960.011,13	-\$ 74.367.955,04
	\$ 20.825.166,90	\$ -

Fuente: elaboración propia

Cuando el comprador plantea una estrategia de acuerdo, el vendedor obtiene un mayor valor si no acuerda (VD_B) y especula con el interés del comprador: *Si C acuerda* $\rightarrow VD_B > VA_B \rightarrow VD_B$. Si el comprador plantea una estrategia de iniciativa, para el vendedor aceptar la oferta (VA_B), implica una ganancia segura, en lugar de un futuro con un valor diferido: *Si C impone* $\rightarrow VA_B > VD_B \rightarrow VA_B$.

Las reacciones del adquirente frente a la conducta del vendedor son espejos de las descriptas. Si el vendedor plantea una estrategia de acuerdo, el comprador obtiene un mayor valor no acordando (VD_C), especulando con una fuerte oferta de precio o simplemente el diferimiento: *Si V acuerda* $\rightarrow VD_C > VA_C \rightarrow VD_C$. Si el vendedor toma la iniciativa, el comprador no tendría más remedio que aceptar la oferta (VA_C), pues estaría perdiendo el valor agregado de la estrategia 2: *Si V impone* $\rightarrow VA_C > VD_C \rightarrow VA_C$.

En efecto, el equilibrio de Nash indica que ambos deben imponer precio, en el caso del comprador ofertar \$251.407.943. En el caso del vendedor, debe preservar la iniciativa en el proceso \$316.853.883¹³.

En el caso de acuerdo de compra - venta el valor de la operación se encuentra entre ambas conductas, $C = [122.960.011; 57.514.071] \rightarrow V(\text{acuerdo}) = 74.367.955$, similares consideraciones caben para el vendedor. No acordar y diferir, con un potencial pago bajo las condiciones planteadas, es una estrategia no deseable, puesto que el valor es nulo (para el vendedor) y negativo (para el comprador ya que se pierde de la ventaja de comprar y ahorrar costos)¹⁴. De optar por dicha acción, se supone que existe futuro colaborativo el cual debe ser incentivado (Axelrod, 1981 y 1986), En tal caso, el adquirente puede disponer clausulas en base a penalidades monetarias frente al incumplimiento del compromiso de reservar la opción de compra. Si al precio pactado en $t=5$, el vendedor rechaza la oferta de compra (ejercicio de opción), el resarcimiento para el comprador estaría explicado por la siguiente expresión

¹³ Desde la posición del vendedor, el valor a negociar es u\$16.853.883, surgen de la diferencia entre el cuadrante de A-A y (V) I/A. De prevalecer la postura del vendedor el impacto en el resultado de la transacción es positivo para el vendedor, negativo para el comprador. Desde la posición compradora el valor a negociar es de u\$48.592.056 que surge del cuadrante A-A y (C) I/A. Si prevalece la postura compradora el ajuste es positivo para quien toma la iniciativa y negativo para el propietario.

¹⁴ De optar por dicha acción, el adquirente puede establecer penalidades frente al incumplimiento. En el caso de que el vendedor rechace la oferta de compra (ejercicio de opción) al precio pactado en $t=5$, el resarcimiento para el comprador estaría explicado por la siguiente expresión $p_t = \max[(VOR_t - V_{s(t)}); (I_{v(t)} - VCe^{rt})]$. La expresión anterior indica que la multa a pagar por el titular del yacimiento en el caso de incumplimiento es el máximo valor entre: diferencia de valor del proyecto con opción a partir de la estrategia 1 para el momento $t=5 \rightarrow 31 VOR_t$ y el valor del proyecto sin opción y consecuentemente sin variación en la estructura de costos $V_{s(t)}$; versus el precio de venta $I_{v(t)}$ menos el valor de ejercicio VCe^{rt} .

$$p_t = \max[(VOR_t - V_{s(t)}); (I_{v(t)} - VCe^{rt})] \quad (16)$$

La multa a pagar por el titular del yacimiento en el caso de incumplimiento es el máximo valor entre: diferencia de valor del proyecto con opción a partir de la estrategia 1 para el momento $t=5 \rightarrow 31$ VOR_t y el valor del proyecto sin opción y consecuentemente sin variación en la estructura de costos $V_{s(t)}$; versus el precio de venta $I_{v(t)}$ menos el valor de ejercicio VCe^{rt} .

Estrategias mixtas: Se puede explorar las probabilidades de elección de las estrategias en un planteo de juego mixto. En tal sentido p representa la probabilidad de acuerdo del comprador, $1 - p$ la probabilidad complementaria de no acuerdo o iniciativa. Similares consideraciones son aplicables al vendedor, notándolas como q y $1 - q$ respectivamente. Para estimar las probabilidades de indiferencia en cada estrategia se debe plantear el siguiente sistema de ecuaciones con los pagos para cada jugador VC y VV :

$$VC = 74pq + 57p(1 - q) + 122(1 - p)q - 74(1 - p)(1 - q)$$

$$VV = 69qp + 20q(1 - p) + 86(1 - q)p + 0(1 - p)(1 - q) \quad (17)$$

Despejando en función p se obtiene la siguiente expresión $VC = p(-179q + 131) + [196q - 74]$. El flujo de pago a recibir por el comprador, cualquiera sea su estrategia está dado por la expresión entre corchetes, pues no depende de p . Para una probabilidad de $q = 0.73$ el paréntesis se hace cero, entonces el comprador será indiferente ante cualquier valor de p ¹⁵. En el caso del vendedor el pago queda planteado como $VV = q(-37p + 20) + [86p]$, siendo la probabilidad de indiferencia $p = 0.54$.

5. Conclusiones

El planteo de estrategias de inversión requiere de un análisis cualitativo como cuantitativo de las decisiones secuenciales involucradas. A menudo el modelo empleado simplifica la flexibilidad estratégica del negocio, el comportamiento de las fuentes de incertidumbre y las acciones de otros agentes. El desafío consiste en valorar los cursos de acción involucrando las principales variables aleatorias, seleccionando la mejor alternativa a la luz de la información disponible en el momento de decisión. Asimismo, se deben incorporar las acciones de los principales agentes (comprador-vendedor), suponiendo conductas racionales y simetría informativa. El trabajo aporta el desarrollo un modelo analítico para valorar estrategias considerando fuentes de incertidumbre en el marco un modelo simple de juegos y opciones reales. Este propone recrear las condiciones de incertidumbre contenidas en las estrategias (compra del yacimiento o diferimiento), brindar rangos de valor en una eventual negociación y guía en la toma de la decisión. Es aplicado sobre un caso real de inversión

¹⁵ Los resultados son aproximados, pues los valores fueron simplificados. La interpretación del resultado es la siguiente: Si el vendedor opta por la estrategia q el 73% de las veces y la estrategia $1 - q$ el 27%, cualquier estrategia adoptada por C generará el mismo pago. Para $q > 73\%$, el pago se reduce por lo que p tiende a cero, es decir no seguir la estrategia de acuerdo. Para $q < 73\%$ si la estrategia adoptada por C es no acordar, el pago se reduce, con lo cual el incentivo de C es buscar el acuerdo de compra.

donde precio y cantidades se constituyen las fuentes de incertidumbre, presentan la necesidad de resolución analítica mediante rejillas multinomiales. La particularidad del modelo reside en fijar los límites del parámetro λ a los efectos que las probabilidades de transición no se conviertan en negativas. Analizadas y valoradas las estrategias, el modelo permite estimar los rangos de valor en un proceso de negociación entre comprador y vendedor. Desde la perspectiva del comprador (desarrollador de la estrategia) se establecen los rangos mínimos y máximos de negociación incorporando el valor de la flexibilidad estratégica en cada alternativa. Si bien, las condiciones del contexto dadas por el valor de inversión, precio proyectado del litio y costo del principal insumo hace elegible la estrategia de inversión, el análisis de sensibilidad expone la mejor cobertura frente al riesgo de precio en costos y consecuente mayor valor de la estrategia de diferimiento. El modelo desarrollado se complementa con un simple esquema de juego no secuencial de defección con alternativas de colaboración (acuerdo de compra) o iniciativa (no acuerdo y diferimiento). Esto permite determinar las posibles estrategias de la contraparte, con información perfecta. Asimismo, bajo la lógica de la teoría de juegos y opciones reales fueron cuantificadas las penalidades frente a incumplimiento de acuerdo estratégico de compra diferida. El análisis se extendió al uso de estrategias mixtas donde se establecieron los puntos de indiferencia para las partes. El modelo aporta un marco analítico de referencia como herramienta para modelar complejos problemas de decisiones secuenciales, considerando fuentes de incertidumbre propias del proyecto y las conductas racionales de los principales agentes económicos involucrados.

Referencias

- [1] Aguado Franco, J. C. (2007). *Teoría de la decisión y de los juegos*. Madrid: Delta Publicaciones.
- [2] Armada, M-Kryzanowski, L-Pereira, P. (2009). Optimal investment decisions for two positioned firms competing in a duopoly market with hidden competitors. *European Financial Management*, 17(2), 305-330. doi:doi.org/10.1111/j.1468-036X.2009.00514.x
- [3] Axelrod, R. (1981). The Emergence of Cooperation among Egoists. *The American Political Science Review*, 75(2), 306-318. doi:doi.org/10.2307/1961366
- [4] Axelrod, R. (1986). *La Evolución de la Cooperación*. Madrid, España: Alianza Editoria S.A.
- [5] Boyer, M-Laserrere, P-Moreaux, M. (2012). A dynamic duopoly investment game without commitment under uncertainty market expansion. *International Journal of Industrial Organization*, 30(6), 663-681. doi:DOI: 10.1016/j.ijindorg.2012.07.005
- [6] Boyle, P. (1988). A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 23(1), 1-12. doi:doi.org/10.2307/2331019
- [7] Castro Monge, E. (2010). El estudio de casos como metodología en la administración y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*. 1 (2), 31-54. doi: 10.22458/ma.vli2.332
- [8] Dixit, A- Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Pricenton University Press.
- [9] Fudenberg, D-Tirole, J. (1986). A theory of exit in doupoly. *Econometrica*, 54(4), 943-960. doi:10.2307/1912845
- [10] Ghemawat, P-Nalebuff, B. (1985). Exit. *Journals of Economics*, 16(2), 184-194. doi:10.2307/2555409

-
- [11] Graham, J. (2011). Strategic real options under asymmetric information. *Journal of Economics and Dynamic Control*, 35(6), 922-934. doi:10.1016/j.jedc.2011.01.001
- [12] Grenadier, S. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real state markets. *Journal of Finance*, 51(5), 1653-1679. doi:10.1111/j.1540-6261.1996.tb05221.x
- [13] Grenadier, S. (2002). Option exercise games: an application to the equilibrium investment strategies of firms. *Review of Financial Studies*, 15(3), 691-721. Obtenido de www.jstor.org/stable/2696718
- [14] Grenadier, S. (2005). Options exercise games: The intersection of real options and game theory. *Journal of Applied Corporate Finance*, 13(2), 99-107. doi:10.1111/j.1540-6261.1996.tb05221.x
- [15] Gintis, H. (2009). *Game Theory Evolving* (2 ed.). United Kingdom: Princeton University Press.
- [16] Haahtela, T. (2010). Recombining trinomial tree for real option valuation with changing volatility. *Social Science Research Network*, 1-25. doi:10.2139/ssrn.1932411
- [17] Haahtela, T. (2011). *Estimating Changing Volatility in Cash Flow Simulation Based Real Options Valuation with Regression Sum of Squared Error Method*. Social Science Research Network. doi:10.2139/ssrn.1
- [18] Herath, H-Kumar P. (2007). On a Simple Binomial Approximations for Two Variable Functions in Finance Applications. *Advances in Quantitative Analysis of Finance & Accounting*, 5, 163-179. doi:10.1142/9789812772213_0008
- [19] Herath, H-Kumar, P. (2006). Multinomial Approximating Models for Options. 1-37. Obtenido de <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.529.6466&rep=rep1&type=pdf>
- [20] Hsu, Y-Lambrech, B. (2007). Preemptive patenting under uncertainty and asymmetric information. *Annals of Operations Research*, 151(1), 5-28. doi:10.1007/s10479-006-0125-5
- [21] Kamrad, B-Ritchken, P. (1991). Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science*, 37(12), 1640-1653.
- [22] Kulatilaka, N-Perotti, E. (1998). Strategic growth options. *Management Science*, 44(8), 1021-1031. doi:10.1287/mnsc.44.8.1021
- [23] Lambrecht, B. (2001). The impact of debt financing on entry and exit in duopoly. *Review of Financial Studies*, 14(3), 765-804. Obtenido de www.jstor.org/stable/2696773
- [24] Lambrecht, B-Perraudin, W. (2003). Real options and preemption under incomplete information. *Journal of Economics Dynamics and Control*, 27(4), 619-643. doi:10.1016/S0165-1889(01)00064-1
- [25] Massé, P. (1963). *La elección de las inversiones: criterios y métodos*. Sagitario Ediciones.
- [26] Milanesi. (2023). Valoración de estrategias competitivas, acuerdos colaborativos y penalizaciones con Opciones Reales Multinomiales y Teoría de Juegos. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 36, 360-388. doi:doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.6092
- [27] Milanesi, G. (Enero - Marzo de 2022). Opciones reales secuenciales cuadrinomiales y volatilidad cambiante: Incertidumbres tecnológicas y de mercado en desarrollos de inversiones biotecnológicas. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas (REMEF)*, 17(1), 24-49. doi:10.21919/remef.v17i1.500
- [28] Milanesi, G-Thomé F. (2015). Un modelo consolidado de opciones reales, teoría de juegos y análisis de costos de transacción para el diseño de acuerdos contractuales. *Revista de Economía Política de Buenos Aires*, 14, 59-81.
- [29] Murto, P. (2004). Exit in duopoly under uncertainty. *Journal of Economics*, 35(1), 111-127. doi:doi.org/10.2307/1593732
- [30] Pawlina, G-Kort, P. (2006). Real options in an asymmetric duopoly: Who benefits from your competitive disadvantage? *Journal of Economics and Management Strategy*, 15(1), 1-35.
- [31] Paxson, D-Melane, A. (2009). Multi factor competitive internet strategy evaluation: Search expansion, portal synergies. *Journal of Modeling Management*, 4(3), 249-273. doi:10.1108/17465660911006477

- [32] Paxson, D-Pinto, H. (2003). Rivalry under price and quantity uncertainty. *Review of Financial Economics*, 14(3-4), 209-224. doi:10.1016/j.rfe.2005.04.002
- [33] Perez,S-Ferro Moreno,S-Milanesi, G. (2022). Análisis de estrategias en la ganadería bovina: Aplicación del marco de Juegos en Opciones Reales. *Estudios de Administración*, 29(2), 127-143. doi:/doi.org/10.5354/0719-0816.2022.67905
- [34] Smit, H. (2003). Infrastructure investment as a real options game: The case of European airport expansion. *Financial Management*, 32(4), 5-35. doi:doi.org/10.2307/3666135
- [35] Smit, H-Ankum, L. (1993). A real options and game-theoretic approach to corporate strategy under competition. *Financial Management*, 22(3), 241-250. doi:10.2307/3665941
- [36] Smit, H-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- [37] Thijssen, J. (2010). Preemption in a real option game with a first mover advantage and a player-specific uncertainty. *Journal of Economics Theory*, 145(6), 2448-2462. doi:doi.org/10.1016/j.jet.2010.10.002

Anexo 1. Estimación del valor del yacimiento.

El valor teórico del yacimiento surge a partir del valor actual correspondiente a la corriente de flujos de fondos a obtener por el titular. Los supuestos para la valoración son: valor de la salmuera, u\$1.200 por tonelada constantes, vida del yacimiento 31 años, % de costos de operación del yacimiento sobre tonelada de salmuera 45%; flujo de fondos libres por tonelada u\$660. Las magnitudes monetarias precedentes, son combinadas con los niveles de producción planteados para cada escenario de producción (alta, medio, bajo) constituyen los insumos para cuantificar las corrientes de flujo de fondos. La siguiente tabla detalla el flujo de fondos libres proyectado para cada escenario.

Tabla A1.1. Valoración yacimiento perspectiva del vendedor

Periodos	Flujo según escenario de demanda		
	Alta	Media	Baja
1	\$ 3.300.000,00	\$ 1.980.000,00	\$ 660.000,00
2	\$ 11.220.000,00	\$ 6.600.000,00	\$ 3.300.000,00
3	\$ 13.200.000,00	\$ 11.220.000,00	\$ 4.620.000,00
4	\$ 16.500.000,00	\$ 13.200.000,00	\$ 6.600.000,00
5 hasta 31	\$ 314.285.714,29	\$ 251.428.571,43	\$ 226.285.714,29
$VA(1)+FF(1)$	\$ 298.775.458,71	\$ 236.696.149,28	\$ 199.860.478,64
	u	m	d
$P(i)$	0,31775	0,30170	0,38051
$VA(0)$	\$ 230.582.777,02		

Fuente: elaboración propia

Los flujos de fondos libres para cada escenario son estimados aplicando la ecuación 1, simplificada puesto que precio y costos no se comportan de manera estocástica. Los flujos correspondientes al periodo $t=5$ hasta $t=31$ son obtenidos a través de la ecuación 7. Finalmente, el

valor del yacimiento surge de calcular el valor actual de los flujos fondos desde $t=1$ hasta $t=31$, más el flujo de fondos libres del periodo 1 para cada escenario, descontados al tipo sin riesgo. El valor obtenido es actualizado empleando las probabilidades de transición de la rejilla trinomial (ecuación 5) calculadas con los parámetros correspondientes a la variable de estado cantidades (Q). El valor teórico es de u\$230.582.777.

El valor a ofertar en el caso de emprender la estrategia 2 constituye un intermedio entre el máximo y mínimo valor a pagar. Se asume que la operación debe tener valor actual positivo para las partes: $VAN = [I - C]$. En el caso del vendedor, el ingreso es representado por el pago recibido. Su costo está dado el valor actual de la corriente de fondos a resignar por transferir el activo. En el caso del adquirente, el costo se encuentra representado por el pago efectuado y los ingresos de la operación se encuentran definidos por el valor actual de la estrategia.

El valor mínimo a ofertar racionalmente es representado por el valor teórico estimado (u\$230.582.777). El máximo valor se obtiene mediante iteración, planteando $0 = [VOR_{(t=0)} - V_{(t=0)}]$, sujeto a variar la inversión, (I_0) bajo la siguiente restricción $[VOR_{(t=0)} = V_{(t=0)}]$ ¹⁶. El resultado obtenido arroja un máximo de u\$374.367.955. El intervalo de negociación presenta dos precios extremos: $[u\$374.367.955_{(max)}; u\$230.582.777_{(min)}]$. Como consecuencia, la oferta del adquirente se posiciona en los u\$300.000.000.

Anexo 2. Valoración de la estrategia 1 sin la opción de compra.

El proceso de valuación corresponde al descrito en la secuencia del grafico 1, sin ejercicio de opción y manteniendo la estructura de costos de operaciones desde $t=5$ hasta $t=31$. En este caso los costos de operación de no adquirir. El valor de la estrategia sin ejercicio de opción es de u\$7.240.279.967.

Tabla A2.1. Valoración estrategia 1 sin opción de compra (ecuación 13)

T=0	T=1			
	p1	\$ 10.458.450.820,58	$V=1 (FF1uu)+VA(Vuu)$	uu
	p2	\$ 8.895.820.481,06	$V=1 (FF1ud)+VA(Vud)$	ud
\$ 7.240.279.967,53	p5	\$ 7.646.292.522,53	$V=1 (FF1mm)+VA(Vmm)$	mm
	p4	\$ 6.994.734.525,49	$V=1 (FF1du)+VA(Vdu)$	du
	p3	\$ 5.949.629.033,87	$V=1 (FF1dd)+VA(Vdd)$	dd

Fuente: elaboración propia

¹⁶ En este caso se utilizó el complemento de MS Excel ® Solver.