Nueva Definición del Producto Vectorial

Por el Prof. Ing. Luis de Greiff Bravo.

El objeto de esta nota es hacer ver la ventaja que traería el reemplazar la definición ordinaria de producto vectorial, por la siguiente:

$$(1) \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

donde se tiene,

$$(2) \qquad \begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{i}X_1 + \vec{j}Y_1 + \vec{k}Z_1 , \\ \vec{V}_2 &= \vec{i}X_2 + \vec{j}Y_2 + \vec{k}Z_2 , \end{aligned}$$

como expresión de los vectores en una terna rectangular y directa.

Si el vector producto se designa por $\vec{P}$, se tendrá al desarrollar el determinante:

$$(3) \qquad \vec{P} = \vec{i}P_x + \vec{j}P_y + \vec{k}P_z ,$$

con los siguientes valores para las componentes·

$$(4) \qquad \begin{aligned} P_x &= Y_1Z_2 - Z_1Y_2 , \\ P_y &= Z_1X_2 - X_1Z_2 , \\ P_z &= X_1Y_2 - Y_1X_2 . \end{aligned}$$

Veamos las consecuencias de la definición dada en (1):

i) Se tiene.

$$(5) \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 ,$$

puesto que el intercambio de dos filas cambia el signo del determinante.

ii) El producto vectorial de dos vectores equipolentes es nulo, pues en este caso las horizontales segunda y tercera del determinante (1) quedan iguales. En símbolos:

$$(6) \qquad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_1 = 0 .$$

iii) El producto vectorial de dos vectores cuyos soportes sean paralelos es nulo, puesto que según la hipótesis es,

(7) $\vec{V}_2 = m\vec{V}_1$

de donde resulta que la tercera línea horizontal del determinante tiene sus elementos proporcionales a los homólogos en la segunda fila, y tal determinante es nulo.

iv) Se multiplica un escalar por un producto vectorial, multiplicando uno cualquiera de los dos factores por dicho escalar.

En efecto, se tiene:

$$(8) \qquad m(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mX_1 & mY_1 & mZ_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = m\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

Luego...,

v) De acuerdo con la definición, y según (ii), se tiene:

$$(9) \qquad \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

vi) Son consecuencia de la definición las relaciones siguientes,

$$(10) \qquad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

En efecto, las componentes de $\vec{i}$ son (1,0,0); las de $\vec{j}$ son (0,1,0). Al reemplazar tales componentes en el determinante (1), se obtiene:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \text{ etc.}$$

vii) El vector producto $\vec{P}$ es normal al plano determinado por $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

Digamos, antes de efectuar la demostración, que la definición (1) no hace referencia a la posición absoluta de los vectores. En otras palabras: el producto vectorial se define para vectores equipolentes.

Para demostrar la proposición enunciada al comienzo de este ordinal, basta multiplicar escalarmente los dos lados de la relación (3) por $\vec{V}_1$. Se obtiene,

$$(12) \qquad \vec{P}.\vec{V}_1 = (X_1Y_1Z_2 - X_1Y_1Z_2) + (Y_1Z_1X_2 - \ldots) + \ldots = 0.$$

De manera análoga se comprueba la igualdad:

$$\vec{P} \cdot \vec{V}_2 = 0. \tag{13}$$

Se concluye que P es normal al plano determinado por $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

En lo que sigue supondremos que los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ están aplicados al origen de coordenadas.

Módulo de $\vec{P}$. - Calcularemos en seguida el módulo de $\vec{P}$ que designaremos por P.

Se tiene, según (3):

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = P^2 = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2. \tag{14}$$

Ahora bien, se observa que cada paréntesis contiene el área de los paralelogramos que son proyección del paralelogramo construído con $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

Designando por S el área de este paralelogramo, viene a tenerse:

$$P^2 = (S \cos a)^2 + (S \cos b)^2 + (S \cos c)^2,$$

en consecuencia,

$$P^2 = S^2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c),$$

de donde,

$$P = |S|.$$

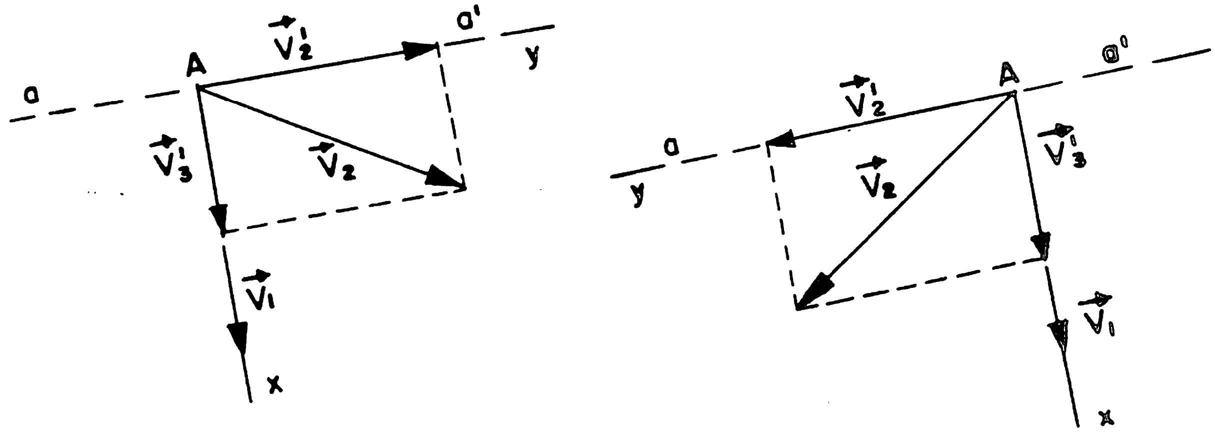
Propiedad distributiva. - Según la definición, se tiene:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 + X_3 & Y_2 + Y_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

lo que demuestra la igualdad:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \tag{16}$$



Vamos a demostrar ahora, basándonos en la última relación, la proposición siguiente: dados dos vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ que suponemos aplicado a un punto A, (Figura 1), se traza en el plano que determinan los dos vectores, la normal a — a' a $\vec{V}_1$ y si es $\vec{V'}_2$ el vector que resulta al proyectar $\vec{V}_2$ según a — a', se tiene:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V'}_2. \tag{17}$$

En efecto, atendiendo a la Figura, puede escribirse:

$$\vec{V}_2 = \vec{V'}_2 + \vec{V'}_3$$

de donde,

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= \vec{V}_1 \wedge (\vec{V'}_2 + \vec{V'}_3) \\ &= \vec{V}_1 \wedge \vec{V'}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V'}_3. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V'}_3 = \vec{0},$$

por tratarse de dos vectores cuyos soportes son paralelos, luego queda demostrada la relación (17).

Orientación del vector producto. - Para determinar, en la terna de ejes directos, la orientación o sentido que corresponde al vector P, según la definición dada en (1), bastará disponer los factores $\vec{V}_1$, $\vec{V'}_2$, según los ejes de x e y respectivamente. Se tendrá entonces,

$$\vec{V}_1 = (X_1,0,0), \qquad \vec{V'}_2 = (0,Y_2,0),$$

con lo que al sustituir en (1), resulta:

$$\vec{P} = \vec{k} X_1 Y_2$$

y puesto que X_1, Y_2 son positivos, se concluye que $\vec{P}$ sigue la orientación positiva del eje $\underline{z}$.

La definición de producto vectorial dada por la relación (1), es susceptible de generalización al espacio afín n-dimensional R_n.

Bastará escribir:

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ X^1_1 & X^1_2 & \cdots & X^1_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

donde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ son los vectores unitarios correspondientes.

Si los vectores que forman las filas segunda, ...,n-ésima son linealmente dependientes, el vector $\vec{P}$ será nulo.

La definición contenida en la relación (1) supone una terna cartesiana. Queda por investigar en qué forma debería modificarse la definición si se tratare de una terna rectilínea cualesquiera, labor que sugiero emprender a algún estudioso del Cálculo Vectorial.

Oh pueblos nuestros! Oh pueblos nuestros! Juntaos en la esperanza y en el trabajo y en la paz. No busquéis las tinieblas, no persigáis el caos y no reguéis con sangre vuestra tierra feraz.

Rubén Darío