Método de Iteración de Schroder

(Ecuación de los tres momentos)

Por los Ings.

Germán Zerrate, Germán Ramírez, y Alvaro Betancur.

INTRODUCCION:

El objeto de este trabajo es el de buscar la aplicación de los computadores a la solución de una de las principales ecuaciones de una materia importantísima en Ingeniería, las Estructuras. Dicha ecuación es la "De los tres momentos", para la solución de vigas estáticamente indeterminadas.

Schroder imaginó un método de iteración para resolver el sistema de ecuaciones de los tres momentos. En este trabajo nos encargaremos de discutir y resolver este método para contribuir a los diversos programas desarrollados en el centro de computación. Hemos tenido como orientación teórica el libro "Beton-Kalender" y las notas traducidas por el profesor Dr. Francisco Javier Pérez.

DISCUSION TEORICA:

Schroder imaginó un método de iteración para resolver el "sistema de ecuaciones de los tres momentos", de convergencia bastante rápida y además fácil de comprobar. (Ver figura 2). El método consiste en calcular primero los términos $aj(Mi + R_1)$ con valores aproximados de Mi y luego los términos $bj(M_k + L_2)$, más tarde se hacen correcciones a los primeros términos, teniendo en cuenta valores más exactos de Mi luego se corrigen los segundos términos, etc.

Tomemos la figura 1 como base para aplicación del método.

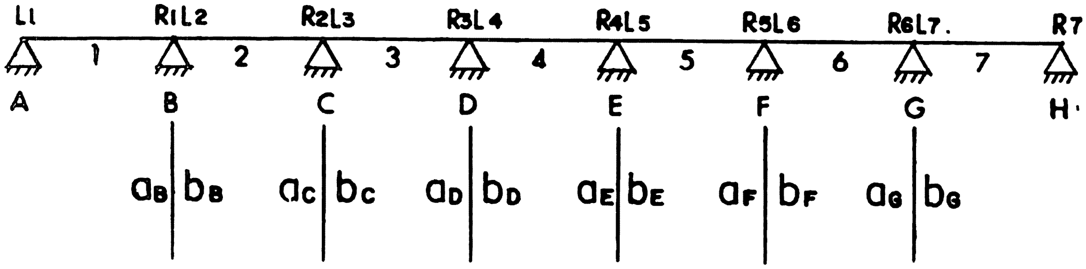
Las cantidades L y R son conocidas para cada tramo una vez definidas las condiciones de carga (hay tablas). Lo mismo ocurre con cada apoyo; pueden calcularse inmediatamente.

El proceso de iteración se inicia como sigue:

1ª Etapa: Como el momento en un apoyo intermedio se compone de dos términos:

$$M_j = a_j\,(M_i + R_i) + b_j\,(M_k + L_k)$$

como primera aproximación podemos suponer que los b son cero y calcular $M_{j1} = a_j\,(M_{i1} + R_i)$.



$a_B R_1 = M_{B1}$, $a_C(R_2+M_{B1}) = M_{C1}$, $a_D(R_3+M_{C1}) = M_{D1}$, $a_E(R_4+M_{D1}) = M_{E1}$, $a_F(R_5+M_{E1}) = M_{F1}$
$a_G(R_6+M_{F1}) = M_{G1}$

$b_B(L_2+M_{C1}+M_{C2}) = M_{B2}$, $b_C(L_3+M_{D1}+M_{D2}) = M_{C2}$, $b_D(L_4+M_{E1}+M_{E2}) = M_{D2}$
$b_E(L_5+M_{F1}+M_{F2}) = M_{E2}$, $b_F(L_6+M_{G1}+M_{G2}) = M_{F2}$ $b_G L_7 = M_{G2}$

$a_C M_{B2} = M_{C3}$, $a_D(M_{C2}+M_{C3}) = M_{D3}$, $a_E(M_{D2}+M_{D3}) = M_{E3}$, $a_F(M_{E2}+M_{E3}) = M_{F3}$
$a_G(M_{F2}+M_{F3}) = M_{G3}$

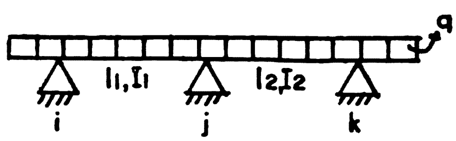
$b_B(M_{C3}+M_{C4}) = M_{B3}$, $b_C(M_{D3}+M_{D4}) = M_{C4}$, $b_D(M_{E3}+M_{E4}) = M_{D4}$, $b_E(M_{F3}+M_{F4}) = M_{E4}$
$b_F M_{G3} = M_{F4}$

$a_C M_{B3} = M_{C5}$, $a_D(M_{C4}+M_{C5}) = M_{D5}$, $a_E(M_{D4}+M_{D5}) = M_{E5}$, $a_F(M_{E4}+M_{E5}) = M_{F5}$
$a_G(M_{F4}+M_{F5}) = M_{G5}$ y así sucesivamente hasta que sea despr. la aproximación

Suma de los resultados por columna

Fig. 1

Ecuación original de los tres momentos



① $l_1' M_i + 2(l_1' + l_2')M_j + l_2' M_k + l_1' R_1 + l_2' L_2 = 0$

donde $\frac{l_1}{I_1} = l_1'$ $\frac{l_2}{I_2} = l_2'$ $R_1 = \frac{6A_1 x_1}{l_1^2}$ $L_2 = \frac{6A_2 y_2}{l_2^2}$

A_1 = área del diagrama del momento flector
x_1 = distancia del centroide de ese mismo diagrama hasta el apoyo izquierdo
Y_2 = distancia del centroide del segundo diagrama hasta el apoyo izquierdo
A_2 = área del segundo diagrama de momento flector.

La ecuación ① se puede transformar en la ② que es la básica para la solución del Método de Schöder $M_j = a_j(M_i + R_1) + b_j(M_k + L_2)$ ②

donde $a_j = -\frac{l_1'}{2(l_1' + l_2')}$ $b_j = -\frac{l_2'}{2(l_1' + l_2')}$

Fig. 2

En donde M_{j1} es la primera aproximación de M_j y M_{i1} es la primera aproximación del momento en el apoyo anterior. Se procede de izquierda a derecha, así:

apoyo B $M_{B1} = a_B R_1$ ya que $M_A = 0$

" C $M_{C1} = a_C (M_{B1} + R_2)$

" D $M_{D1} = a_D (M_{C1} + R_3)$

y así sucesivamente.

2ª Etapa: Aquí se suponen cero todos los a y se calculan los $M_{j2} = b_j(M_k + L_k)$ utilizando como M_k el valor aproximado hasta ese momento procediendo de derecha a izquierda, así:

$$M_{G2} = b_G L_7 \quad \text{ya que} \quad M_H = O$$
$$M_{F2} = b_F(M_{G1} + M_{G2} + L_6)$$
$$M_{E2} = b_E(M_{F1} + M_{F2} + L_5)$$

y así sucesivamente.

3ª Etapa: Correcciones.

Se ejecutan los dos pasos anteriores utilizando los valores de los momentos aproximados que no se habían tenido en cuenta en el paso anterior, o sea:

$$M_{C3} = a_c M_{B2}$$
$$M_{D3} = a_D(M_{c2} + M_{c3})$$
$$M_{E3} = a_E(M_{D2} + M_{D3})$$
$$\text{y} \quad M_{F4} = b_F M_{G3}$$
$$M_{E4} = b_E(M_{F3} + M_{F4})$$

Esta última etapa se continúa hasta que la corrección sea despreciable.

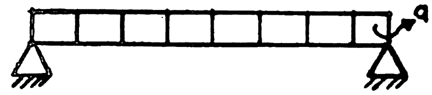
4ª Etapa: Comprobación.

Los valores finales o sea la suma de los valores calculados en los diferentes ciclos se utilizan para calcular de nuevo los momentos en los apoyos o sea se reemplazan en la fórmula

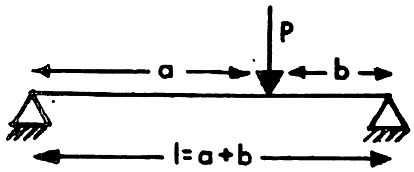
$$M_j = a_j (M_i + R_i) + b_j (M_k + L_k).$$

El valor calculado de M_j debe coincidir con el obtenido aproximadamente. (Ver figura 1).

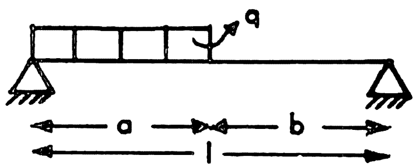
A continuación damos algunos valores típicos de R y L para algunos valores de carga.



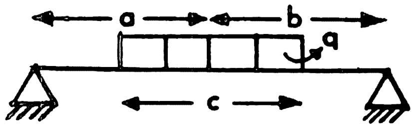
$$R = L = q\,l^2/4$$



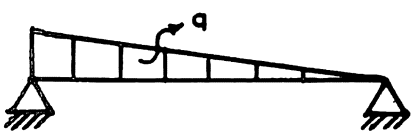
$$R = \frac{Pab(a+l)}{l^2} \qquad L = \frac{Pab(b+l)}{l^2}$$



$$R = \frac{qa^2}{4}\left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right) \qquad L = \frac{qa^2}{4}\left(2 - a/l\right)^2$$



$$R = \frac{qabc}{l}\left(l + a - \frac{c^2}{4b}\right) \qquad L = \frac{qabc}{l^2}\left(l + b - \frac{c^2}{4a}\right)$$



$$R = \frac{7}{60}\,q\,l^2 \qquad L = \frac{8}{60}\,q\,l^2$$

METODO DE CALCULO:

Una vez leído el número de luces, el error, y los valores de la luz y los momentos de inercia se calculan Alfa y beta. Luego se lee la carga distribuída en cada tramo y se calculan los L y R. En este caso R es igual a L. De acuerdo con el tipo de carga se puede modificar el programa en este punto para calcular los diferentes L y R. En este caso, como ya dijimos los L y R son iguales.

Debido a que las correcciones sucesivas de este método sólo tienen en cuenta las dos correcciones anteriores en el apoyo consecutivo, hay que calcular primero las aproximaciones que contiene L y R y luego hacer un segmento de programa para que calcule las correcciones sucesivas.

Las correcciones hay que almacenarlas en una matriz de dos dimensiones para tener a mano las dos correcciones anteriores.

Se considera suficiente aproximación cuando las sumas de las correcciones en valor absoluto en el último ciclo es menor que Epsilon y por lo tanto el valor de Epsilon se debe escoger de acuerdo con la precisión requerida.

Para calcular los momentos en los apoyos se suman los elementos de la matriz de los momentos columna por columna y los resultados se almacenan en la siguiente línea y luego suponiendo exactos los momentos calculados o sea la línea en donde están las sumas de las columnas se aplica la ecuación de los tres momentos para calcular de nuevo los momentos y los valores calculados se almacenan en la última línea de la matriz.

Finalmente se perforan las dos últimas líneas que corresponden a los momentos calculados por iteración y los de comprobación, y el número de orden del apoyo.

En el programa y en el diagrama de flujo aparece explicado el método de cálculo con el funcionamiento de los DO usados para lectura, cálculo y perforación.

ENTRADA Y SALIDA DE INFORMACIONES:

La entrada de información está compuesta de las siguientes tarjetas con los siguientes datos:

Una tarjeta con N en la primera palabra y EPS en la segunda N tarjetas con L en la primera palabra e I en la segunda N tarjetas con W (carga distribuída) en la primera palabra.

La salida de información se obtiene de (N menos una) N-I tarjetas perforadas con M calculada en la primera palabra, M de chequeo en la segunda palabra y J número de orden del apoyo en la tercera palabra.

APENDICE

NOMENCLATURA Y UNIDADES:

N = **número de luces**
L = **luz**
I = **momento de inercia**
Alfa = **a**
Beta = **b**
W = **carga distribuído**
R y L = **Momentos de los extremos**
M = **momento**
De acuerdo con los suscritos representan las correcciones o los momento totales.

UNIDADES:

L está dado en metros mts.
I está dado en cualquier sistema (cm^4, m^4, ft^4... etc.)
W está dado en kilogramos por metro kq/m
M está dado en kilogramos-metro kq-m.
Alfa y Beta sin dimensiones.
L y R en kilogramos-metro kg-m.

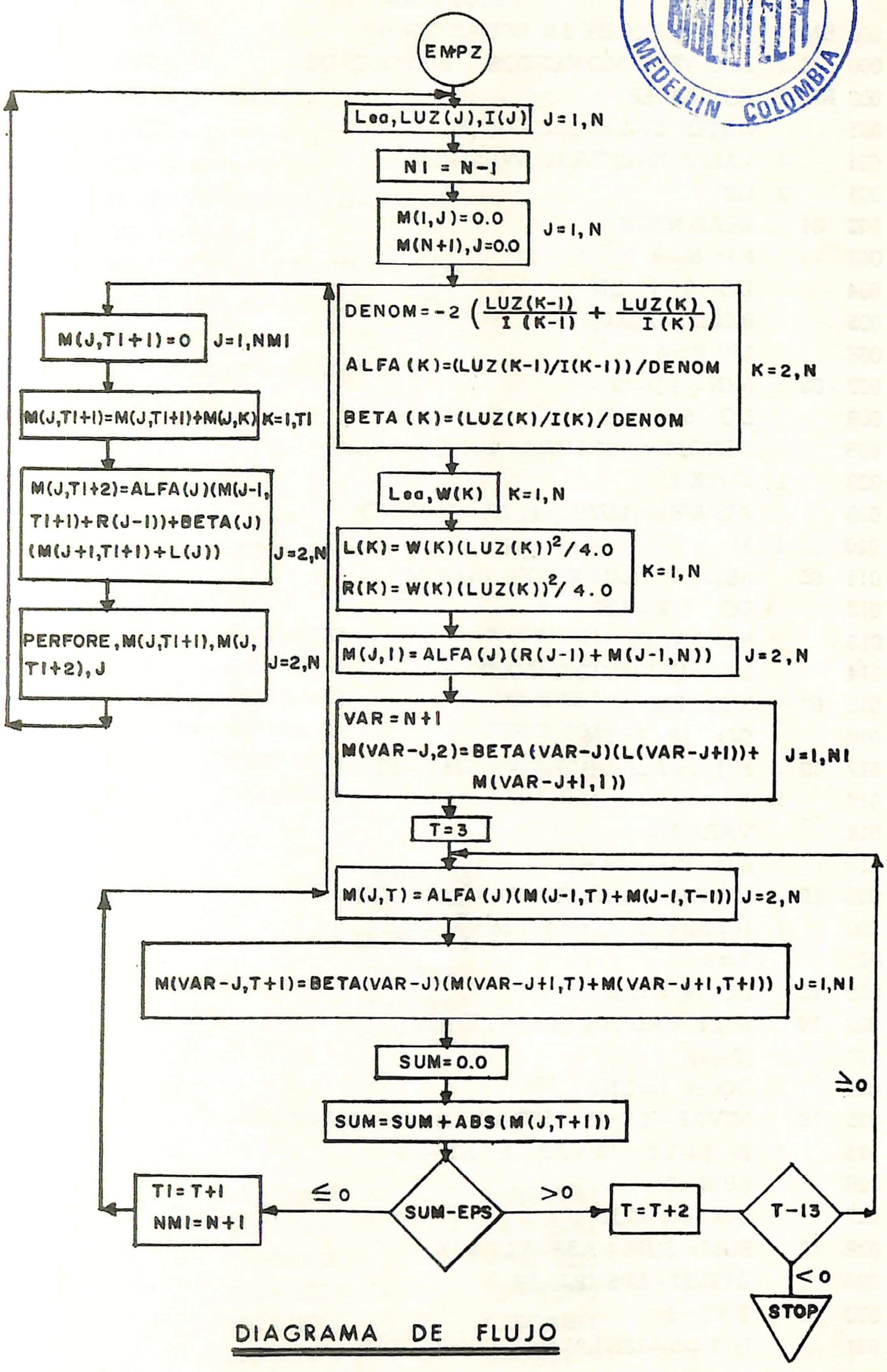


DIAGRAMA DE FLUJO

BUFFTRAN

```
000 RM     ITERACION DE LA ECUACION DE
000 RM 1   LOS TRES MOMENTOS    METODO DE
000 RM 2   SCHRODER
001        DIMEN LUZ(10),I(10),L(10),R(10
001      1 ),ALFA(10),BETA(10),M(10,16),W
001      2 (10)
002  01    READ,N,EPS
003        N1=N—1
004        DO  3  J=1,N
005        READ,LUZ(J),I(J)
006        M(1,J)=0
007  03    M(N+1,J)=0
008        DO  5 K=2,N
009        DENOM=—2*(LUZ(K—1)/I(K—1)+LUZ(
009      1 K)/I(K))
010        ALFA(K)=(LUZ(K—1)/I(K—1)/DENO
010      1 M
011  05    BETA(K)=(LUZ(K)/I(K))/DENOM
012        DO  7 K=1,N
013        READ,W(K)
014        L(K)=W(K)*LUZ(K)*LUZ(K)/4
015  07    R(K)=L(K)
016        DO  10  J=2N
017  10    M(J,1)=ALFA(J)*(R(J—1)+M(J—1,1
017      1 ))
018        VAR=N+1
019        DO  12  J=1,N1
020  12    M(VAR—J,2)=BETA(VAR—J)*(L(VAR—
020      1 J)+M(VAR—J+1,2)+M(VAR—J+1,1))
021        T=3
022  13    DO 14 J=2,N
023  14    M(J,T)=ALFA(J)*(M(J—1,T)+M(J—1
023      1 ,T—1))
024        DO 16 J=1,N1
025  16    M(VAR—J,T+1)=BETA(VAR—J*(M(VA
025      1 R—J+1,T)+M(VAR—J+1,T+1))
026        SUM=0
027        DO 18 J=2,N
028  18    SUM=SUM+ABS(M(J,T+1))
029        IF(SUM—EPS)22,22,19
030  19    T=T+2
031        IF(T+3—16)21,21,20
```

```
032  20     STOP
023  21     GO TO 13
034  22     T1=T+1
035         NM1=N+1
036         DO 25 J=1,NM1
037         M(J,T1+1)=0
038         DO 25 K=1,T1
039  25     M(J,T1+1)=M(J,T1+1)+M(J,K)
040         DO 30 J=2,N
041         M(J,T1+2)=ALFA(J)*(M(J—1,T1+1)
041     1   +R(J—1))+BETA(J)*(M(J+1,T1+1)+
041     2   L(J))
042  30     PUNCH,M(J,T1+1),M(J,T1+2),J
043         GO TO 01
044         END
```

DATOS:

N	EPS
6000000050	1000000050

L	I
4000000050	2000000051
5000000050	2500000051
3500000050	2000000051
5000000050	2500000051
3000000050	2000000051
4000000050	2500000051

W
1200000053
1200000053
1600000053
1000000053
1400000053
1200000053

N	EPS
6000000050	1000000051

L	I
4000000050	2000000051
5000000050	2500000051
3500000050	2000000051
5000000050	2500000051
3000000050	2000000051
4000000050	2500000051

W
1200000053
1200000053
1600000053
1000000053
1400000053
1200000053

RESULTADOS

M calculado	*M de Chequeo*	*Apoyo*	
2565988953—	2565989053—	2000000050	
2036044253—	2013295353—	3000000050	
1910461453—	1910395753—	4000000050	**1er. CASO**
1591977253—	1568603853—	5000000050	
1615900353—	1615650753—	6000000050	
2565988953—	2565989053—	2000000050	
2036044253—	2013295353—	3000000050	
1910461453—	1910395753—	4000000050	**2o. CASO**
1591977253—	1568603853—	5000000050	
1615900353—	1615650753—	6000000050	

Dos libros de ciencia por uno de literatura clásica; dos horas de laboratorio o de investigación con la lupa, el compás o la tiza en la mano, por una hora de amena o erudita lectura; dos renglones de fórmulas matemáticas por cada verso que se escriba... y ante todo y por encima de todo, Dios.

Víctor E. Caro