Sumaciones Sucesivas

Por el Prof. Ing. Gabriel Poveda Ramos.

1. - **Introducción.**

1.1. En el estudio de las funciones de variables discretas (o sucesiones), y de las ecuaciones en diferencias finitas que ellas satisfacen, se presentan numerosas ocasiones en que se trata de estudiar o de calcular expresiones de la forma

$$(1.1.1) \qquad \sum_{0}^{n} \sum_{0}^{m} \ldots \sum_{0}^{q} a_i$$

que contiene varios signos de sumación con referencia a alguna sucesión (a_i) previamente definida.

El significado de la expresión (1.1.1) es bien claro. En términos de operaciones puede describírsele en la siguiente forma: se ha de sumar los términos de la sucesión a_i, para los cuales el índice "i" recorre la sucesión de números naturales 0, 1, 2, . . ., q. Esta suma depende a su vez del índice "q", y su resultado, b_q, habrá de sumarse nuevamente con q desde 0 (cero) hasta p, para obtener un resultado c_p que depende de p, y que también habrá de sumarse haciendo variar a p; y así sucesivamente. La penúltima etapa será la de sumar el término genérico d, haciendo que l recorra los naturales 0, 1, 2, . . ., m, para obtener una suma e_m. La última etapa consiste en sumar los términos e_m con m en la sucesión 0, 1, 2, . . ., n.

Esta descripción permite entender fácilmente por qué el resultado final no depende de los índices intermedios m, . . ., p, q, que tienen papel de índices mudos, sino del índice n, límite superior de la primera sumación. Esta comprobación es otro índice más para señalar la evidente analogía que hay entre expresiones como la que comentamos y los integrales sucesivos (definidos) de la forma

$$(1.1.2) \qquad \int_0^w \int_0^v \ldots \int_0^y f(x)\, dx \ldots dx$$

que, como bien se sabe, una vez calculados, dependen solamente de la variable w, procedente de la integral que se evalúa en la última etapa del cálculo, y que es justamente la primera que aparece en la expresión escrita (1.1.2).

Con el fin de hacer notar explícitamente que tratamos con expresiones que contienen varios signos o sumación, o eventualmente, uno solo —como caso especial— indicaremos su número con h + 1, siendo h un número natural. En el caso especial de ser h = 0, se tendrá solamente una sumación simple, y los resultados que encontremos para el caso de varias sumaciones se convertirán en casos triviales.

A expresiones del tipo de (1.1.1) las llamaremos pues, sumaciones sucesivas de orden $h + 1$. En esta nota nos proponemos establecer una fórmula para convertirlas en sumaciones simples, con lo cual se simplifica su cálculo y se ponen de presente muchas de sus propiedades con gran sencillez.

1.2. - Un problema concreto en donde se ocurre calcular una sumación sucesiva, es el de calcular una sucesión (U_n), conocida la sucesión que forman sus diferencias finitas de orden elevado, es decir, a partir de la ecuación en diferencias finitas (E.DD.FF.).

$$\Delta^{h+1} u_i = a_i \, ; \; i = 0, 1, 2, \ldots, h > 0$$

De aquí resulta

$$u_n = \sum_{0}^{n} \sum_{0}^{m} \ \sum_{0}^{q} a_i$$

con $h + 1$ sumaciones, como solución.

Este problema tiene una aplicación interesante dentro de otro más amplio, cual es el de convertir una ecuación en diferencias de orden elevado, superior al primero, $(h + 1 > 1$; o sea $h > 0)$, en una ecuación sumatoria equivalente. Las ecuaciones sumatorias o ecuaciones de sumación, hasta ahora muy poco estudiadas, constituyen en la teoría de sucesiones el análogo de las ecuaciones integrales en el campo de la teoría de funciones continuas (y analíticas). Y así como una ecuación diferencial ordinaria de orden elevado puede convertirse en ecuación integral (de Volterra), así mismo una E.DD.FF. (ordinaria) puede convertirse en ecuación de sumación, en la forma que se indicará más adelante en esta nota. En realidad, el trabajo que aquí presentamos ha sido elaborado por el autor dentro de una serie de estudios que ha venido haciendo sobre las ecuaciones de sumación, de las cuales aún no se ha presentado una teoría completa.

2. - La Función Generatriz.

2.1. - El procedimiento que aquí se emplea para establecer el resultado que se busca, se apoya en el uso de funciones generatrices, concepto bastante sencillo pero de uso poco extendido, probablemente por lo mismo que sus más fecundas aplicaciones están en el campo de las sucesiones, que se suele mirar con poco interés.

Como se sabe, diremos que para una sucesión dada

(2.1.1) $\qquad (a_i) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, con $a_0 \neq 0$

se llama función generatriz a la función

$$(2.1.2) \qquad A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

definida para todos los valores de x que permiten la convergencia de la serie, lo cual impone ciertas condiciones a la sucesión (2.1.1) cuando es infinita, para que tenga función generatriz. Afortunadamente una clase muy amplia de sucesiones posee función generatriz en algún intervalo finito al menos. Entre ellas, una sub-clase muy importante por sus aplicaciones es la de sucesiones acotadas, para las cuales la serie que define A (x) converge siquiera en el intervalo abierto (—1, +1), como se comprueba mediante comparación con la serie de potencias de x, previa división de A (x) por max (mod a_i).

2.2. - La correspondencia entre una sucesión (a_i) y su correspondiente función generatriz —supuesto que exista— se indica

$$A(x) = G[a_i]$$

y en cierta manera es análoga a la correspondencia que hay, por ejemplo, entre una función analítica real f(x) y su transformada de Laplace —supuesto que la tenga—, que es otra función F (S), que se le asocia usando la notación

$$F(s) = L[f(x)]$$

Por tratarse de una correspondencia de sucesión a función, la función generatriz define, pues, un operador sobre una clase muy amplia de las sucesiones reales, así como lo hace la transformada de Laplace (o también la de Fourier, o la de Hankel, etc.) entre las funciones analíticas.

2.3. - Para una sucesión

$$(2.3.1) \qquad a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, \text{ con } a_0 \neq 0$$

llamemos sucesión primitiva (o de sumación) a

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots$$

(2.3.2)

cuyos términos están definidos por

$$S_n = \sum_{0}^{n} a_i$$

o bien por la condición equivalente

$$\Delta S_n = a_{n+1}$$

La relación entre estas dos sucesiones (2.3.1), (2.3.2) es similar a la que hay entre una función real (x) y su primitiva $F(x)$, que se anule en $x = 0$: $F(0) = 0$. De ahí el nombre de sucesión primitiva que proponemos para (2.3.2).

Entre la función generatriz de una sucesión y la de su primitiva existe una simple e importante relación. En efecto, tales funciones son

(2.3.3) $$G[a_i] = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

(2.3.4) $$G[S_i] = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \dots$$

Multiplicando la última por x resulta:

(2.3.5) $$x\, G[S_i] = S_0 x + S_1 x^2 + S_2 x^3 + \dots$$

y restando ésta de (2.3.4), resulta

$$(1-x)\; G[S_i] = S_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

por ser

$S_{n+1} - S_n = a_n$, para $n = 1, 2, \dots$, y $S_0 = a_0$. Es decir que

(2.3.6) $$G[\sum_0^n a_i] = G[a_n]/(1-x), \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta identidad puede usarse para establecer también la función generatriz de la sucesión de primeras diferencias de una sucesión conocida:

$$G[\Delta a_n] = (1-x)\; G[a_{n+1}]$$

intercambiando los papeles de primitivas y diferencias.

2.4. - Para efectos de este trabajo será necesario ocuparse de un tipo especial de sucesiones y de sus funciones generatrices. Nos referimos a las sucesiones cuyo término genérico es el coeficiente binomial,

(2.4.1) $$\binom{n+h}{h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y siendo h un número natural previamente especificado.

Para $h = 0$ la sucesión (2.4.1) es la sucesión "uno": 1, 1, 1, 1, ... cuya función generatriz es

$$1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x), \text{ con } -1 < x < 1.$$

Para $h = 1$ la sucesión es la de los naturales no nulos 1, 2, 3, 4, ... y tiene función generatriz

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = 1/(1-x)^2, \text{ con } -1 < x < 1.$$

Para $h = 2$ la sucesión (2.4.1) es

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, \ldots$$

y la función generatriz es $1/(1-x)^3$ en el intervalo abierto $(-1, 1)$.
Para $h = 3$ la sucesión (2.4.1) es

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, \ldots$$

cuyos términos son los coeficientes de la expansión en serie de $1/(1-x)^4$.

2.5. - Generalizando estas observaciones puede establecerse que la función generatriz de la sucesión

$$\text{(2.5.1)} \qquad \binom{n+h}{h}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

es la función

$$1/(1-x)^{h+1}, \text{ en } -1 < x < 1.$$

cuya expansión en serie es

$$\binom{h}{h} + \binom{1+h}{h} x + \binom{2+h}{h} x^2 + \binom{3+h}{h} x^3 + \ldots$$

y sus coeficientes son precisamente los términos de la sucesión (2.5.1).

2.6. - Otra propiedad que se usará en la deducción que comentamos es la referente al producto de dos funciones generatrices.

Si $A(x)$ es la función generatriz de la sucesión (a_i), es

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = G[a_i]$$

y si $B(x)$ es la función generatriz de la sucesión (b_i) es

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = G[b_i]$$

supuesto que ambas series converjan absolutamente en un mismo intervalo I. En tal caso el producto de las dos series, formado a la manera de Cauchy, define una nueva función que coincide con el producto de $A(x)$ y $B(x)$, al menos en el intervalo común de convergencia I, de sus respectivas series:

$$A(x).B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots$$

Cada coeficiente de esta serie es

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_n * b_n$$

expresión a la cual se le denomina producto convolutivo (en alemán: "faltung").

En síntesis, se establece que

$$G[a_i] . G[b_i] = G[a_i * b_i]$$

Este teorema es similar al que se refiere al producto de transformadas de Laplace o de transformadas de Fourier, o de otros tipos de transformaciones integrales sobre funciones de variable continua, en cuyos casos también aparece el producto convolutivo (o convolución, o plegamiento) de funciones.

3. - Las Sumaciones Sucesivas.

3.1. - Volviendo a la expresión de que nos ocupamos señalada en (1.1.1), ya podemos dar una forma equivalente. En efecto, la aplicación repetida de la fórmula (2.3.6), nos permite escribir

$$(3.1.1) \qquad G\left[\sum_0^n \sum_0^m \cdots \sum_0^q a_i\right] = \frac{1}{(1-x)^h} G[a_i]$$

si es $h+1$ el número de sumaciones que hay en el lado izquierdo. Además el lado derecho es

$$\frac{1}{(1-x)^h} G[a_i] = G\left[\binom{k+h}{h}\right] G[a_i] = G\left[\binom{k+h}{h} * a_k\right]$$

Teniendo en cuenta que la correspondencia entre sucesiones y funciones generatrices es biunívoca, se tiene que la sumación sucesiva de orden h es

$$(3.1.2) \qquad \sum_0^n \sum_0 \cdots \sum_0 a_i = \binom{n+h}{h} * a_n = \sum_0^n \binom{r+h}{h} a_{n-r}$$

Esta fórmula permite convertir una sumación sucesiva en una sumación simple.

Ejemplos particulares de la fórmula, pueden darse considerando diversos órdenes de multiplicidad para la sumación múltiple, como lo haremos más adelante.

Lo que ella significa, en general, es que la sumación múltiple que se considera, equivale a una combinación lineal de los términos de la sucesión cobijados por los procesos de suma.

3.2. - Sea por ejemplo, la sumación doble

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_i$$

que significa la suma

$$\sum_{m=0}^{n} S_m = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n \tag{3.2.1}$$

(3.2.1)

en la cual

$$S_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$$

de manera que (3.2.1) cobija $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Según la fórmula general (3.1.2), la suma doble equivale a

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{r+1}{1} a_{n-r} = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \ldots + (n+1)a_0$$

como se podría también comprobar por otros métodos elementales.

3.3. - La sumación de tercer orden

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \sum_{i=0}^{l} a_i$$

equivale a

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{r+2}{r} a_{n-r} =$$

$$a_n + 3a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10a_{n-3} + \ldots + (n+1)(n+2)\,a_0/2$$

El esfuerzo en dominar su propio campo, debe coincidir en el profesional con la adquisición de conocimientos generales de las especialidades concurrentes con su actividad, y de las nociones indispensables de disciplinas sociales, económicas y humanísticas que, al redondear su cultura, le permitan desempeñarse airosamente y correspondan a su condición de universitario.