

## LAS LINEAS DE INFLUENCIA Y SU RELACION CON LA ELASTICA O DEFORMADA DE UNA ESTRUCTURA

Por: Tomás Castrillón O.  
Profesor del Departamento de Ingeniería

### INTRODUCCION

Dentro de la evolución que últimamente ha sufrido la ingeniería, empiezan a definirse claramente tres rangos en el cálculo numérico: aquel en el cual es suficiente la regla de cálculo, viene luego el campo de aplicación de la calculadora (mecánica, eléctrica o electrónica) y finalmente el campo en el cual el volumen de información que debe procesarse, requiere el uso del computador. Por ahora, en nuestro medio se presenta bastante trabajo para cada herramienta.

En el cálculo de estructuras **relativamente pequeñas** encuentran su aplicación para los dos primeros campos mencionados, aunque también podrán emplearse éstos métodos, como verificaciones rápidas de los resultados obtenidos con computadora.

En muchos problemas específicos el estudio de las líneas de influencia y su relación con la elástica o deformada, dá el mejor criterio para conocer el comportamiento de una estructura. A estos campos se hará referencia en el presente artículo.

Se mostrará la forma de determinar las líneas de influencia para momentos en los apoyos de una viga continua basados en la elástica o deformada de la misma viga. Se utilizará la teoría elástica clásica y los conceptos más elementales de dicha teoría tales como el principio de superposición, el principio de trabajos virtuales, el principio de reciprocidad, etc.

Para ilustrar la teoría anterior y su resolución rápida con regla de cálculo o calculadora electrónica se resolverá un problema numérico.

### 1. DETERMINACION DE ELASTICAS DE DEFORMACION

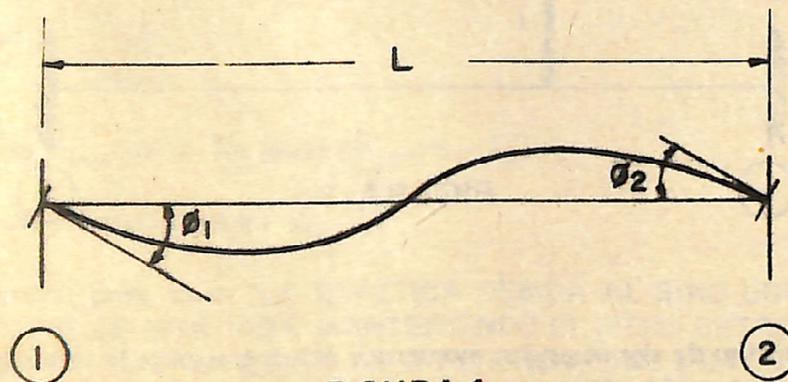


FIGURA 1

La figura 1 ilustra una viga que ha sido sometida a giros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en sus extremos. Se trata de determinar la elástica de la deformación debida a estos giros. Los ángulos de giro  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se consideran positivos cuando siguen el movimiento de las agujas del reloj.

La estructura que muestra la figura 1 puede descomponerse en la forma como indica la figura 2.

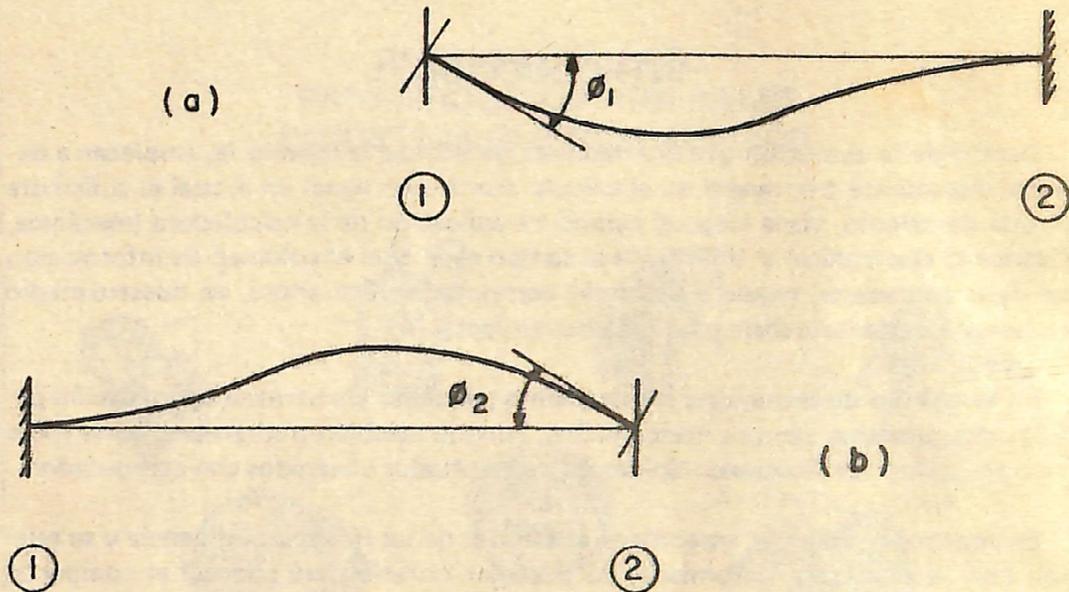


FIGURA 2

La figura 3 muestra una viga doblemente empotrada, cargada con una fuerza unitaria a una distancia  $X$  del extremo izquierdo.  $m_{12}$  y  $m_{21}$  son los momentos de empotramiento.

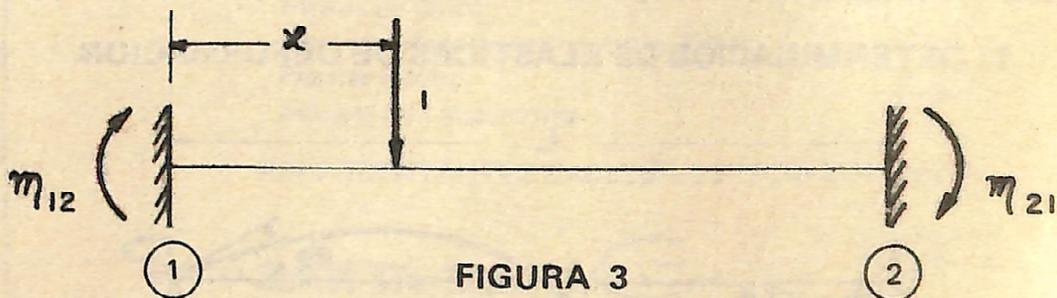


FIGURA 3

La convención de signos es: los momentos actuantes sobre la viga son positivos cuando siguen el sentido de las manecillas del reloj.

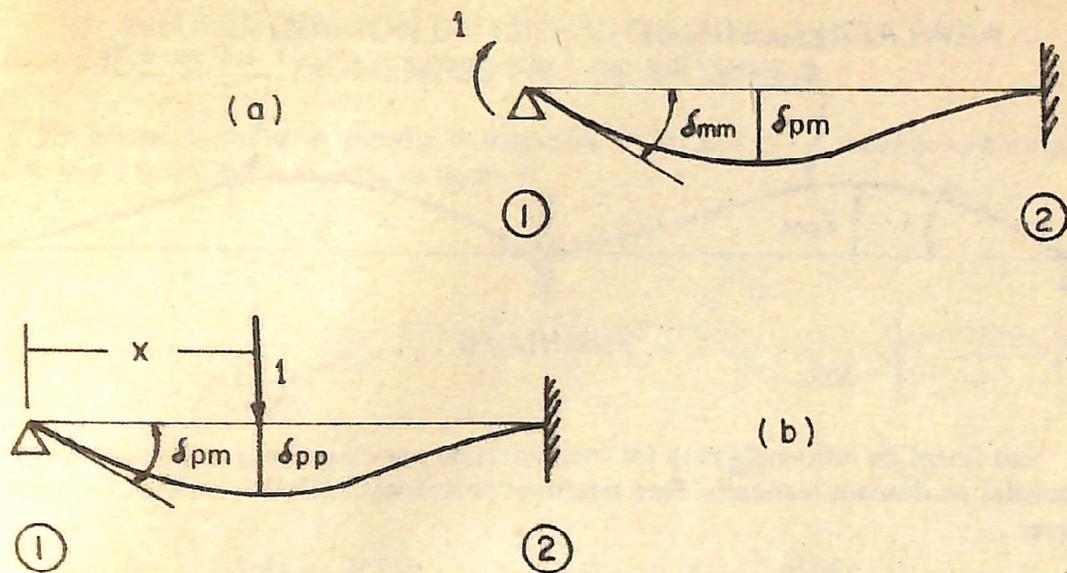


FIGURA 4

La figura 4 (a) ilustra la misma viga de la figura 3 a la cual se le ha quitado el empotramiento y se le ha aplicado un par unitario en el extremo (1).

La compatibilidad de deformaciones exige que:

$$m_{12} \cdot \delta_{mm} + \delta_{mp} = 0$$

de donde:

$$m_{12} = -\frac{\delta_{mp}}{\delta_{mm}}$$

La ley de Maxwell establece que:

$$\delta_{mp} = \delta_{pm}$$

Entonces:

$$m_{12} = -\frac{\delta_{pm}}{\delta_{mm}}$$

Tomando  $\delta_{mm} = 1$  quedará  $m_{12} = -\delta_{pm}$

Algo análogo resultaría para  $m_{21}$

Se concluye, pues, que: "LA ELASTICA DEBIDA AL GIRO UNITARIO EN UN EXTREMO DE UNA VIGA MANTENIENDO EL OTRO EXTREMO EMPOTRADO ES IGUAL A LA LINEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO CORRESPONDIENTE A ESE EXTREMO. (Ver figura 5).

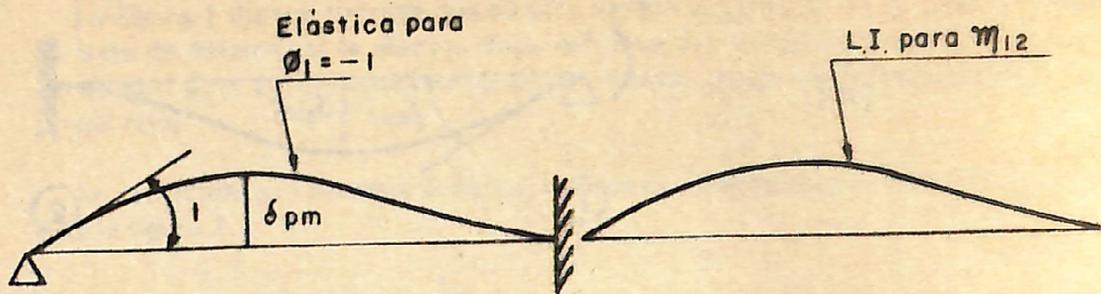


FIGURA 5

Las líneas de influencia para los momentos de empotramiento se encuentran tabuladas en diversos manuales. Para secciones prismáticas es fácil deducirlas. Se tiene que:

$$m_{12} = -\frac{Px(L-x)^2}{L} \quad ; \quad m_{21} = \frac{Px^2(L-x)}{L}$$

para  $P = 1$  y  $L = 1$  queda:

$$m_{12} = -x(1-x)^2 \quad ; \quad m_{21} = x^2(1-x)$$

En la tabla 1 aparecen calculadas las líneas de influencia de los momentos de empotramiento. ( $m_{12}$  y  $m_{21}$ ), para una viga de longitud unitaria.

TABLA 1

x	1-x	x <sup>2</sup>	(1-x) <sup>2</sup>	m <sub>12</sub>	m <sub>21</sub>
0.0	1.0	0.00	1.00	-0.000	0.000
0.1	0.9	0.01	0.81	-0.081	0.009
0.2	0.8	0.04	0.64	-0.128	0.032
0.3	0.7	0.09	0.49	-0.147	0.063
0.4	0.6	0.16	0.36	-0.144	0.096
0.5	0.5	0.25	0.25	-0.125	0.125
0.6	0.4	0.36	0.16	-0.096	0.144
0.7	0.3	0.49	0.09	-0.063	0.147
0.8	0.2	0.64	0.04	-0.032	0.128
0.9	0.1	0.81	0.01	-0.009	0.081
1.0	0.0	1.00	0.00	-0.000	0.000

El problema inicial (figura 1) se podrá resolver, entonces, mediante la siguiente ecuación:

$$\boxed{\text{Ordenada de la elástica} = -L(m_{12}\phi_1 + m_{21}\phi_2)} \quad (1)$$

## II. DETERMINACION DE LINEAS DE INFLUENCIA PARA MOMENTOS EN LOS APOYOS

En primer término se estudia la variación del ángulo  $\phi_m$  al moverse una carga unitaria a través de la viga de la figura 6.

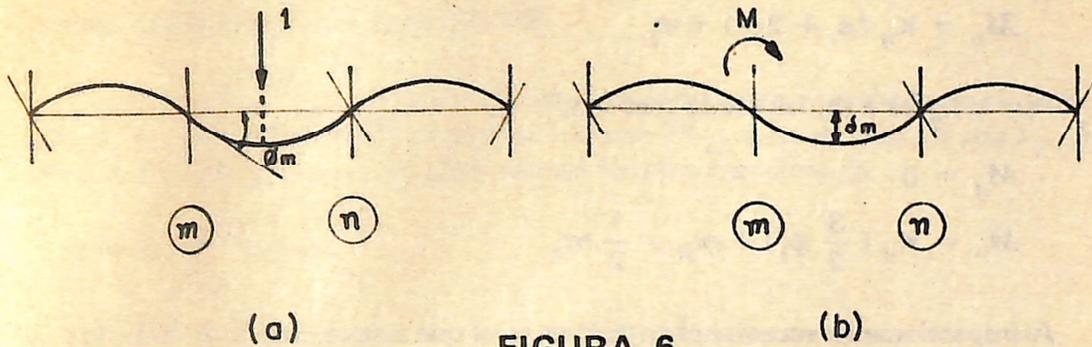


FIGURA 6

En la figura 6 (a) se muestra una carga unitaria que se desplaza a lo largo de una viga continua. En la figura 6 (b) se ha aplicado un momento  $M$  en el nudo  $(m)$

Según la Ley de Betti:  $1 \cdot \delta_m = M \cdot \phi_m$

Tomando  $M = 1$ , quedaría  $\delta_m = \phi_m$

Algo análogo resultaría para el nudo  $(n)$

Se concluye que: LA LINEA DE INFLUENCIA DE UN GIRO ES IGUAL A LA ELASTICA QUE SE OBTIENE CUANDO SE APLICA EN EL NUDO UN MOMENTO UNITARIO CORRESPONDIENTE AL GIRO.

Ya se ha establecido cómo se obtiene la elástica a partir de la línea de influencia de los momentos de empotramiento. Entonces, para obtener la línea de influencia de un giro bastará con determinar la elástica que resulta al aplicar un momento unitario correspondiente al giro utilizando la ecuación 1.

En segundo término consideremos las ecuaciones de las rotaciones angulares para las vigas de la figura 7.

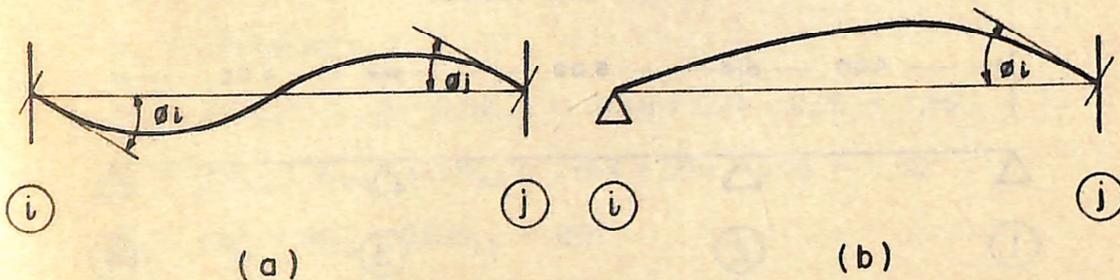


FIGURA 7

$$\text{Sea } K_{ij} = \frac{2EI}{L}$$

Para la figura 7 (a) las ecuaciones son:

$$M_{ij} = K_{ij} (2\phi_i + \phi_j) + m_{ij}$$

$$M_{ji} = K_{ij} (\phi_i + 2\phi_j) + m_{ji}$$

Para la figura 7 (b) las ecuaciones son:

$$M_{ij} = 0$$

$$M_{ji} = K_{ij} \left( \frac{3}{2} \phi_j \right) + m_{ji} - \frac{1}{2} m_{ij}$$

Al inspeccionar las ecuaciones anteriores se ve que si se calcula la variación de  $\phi_i$  y  $\phi_j$  y de  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$  al desplazarse la carga, o lo que es lo mismo, las líneas de influencia de  $\phi_i$  y  $\phi_j$  y de  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$  se obtiene la variación de  $M_{ij}$  y de  $M_{ji}$  o sea las líneas de influencia para los momentos en los apoyos.

Ya se ha establecido como se obtiene la línea de influencia para  $\phi_i$  y  $\phi_j$ , y que era la elástica que se obtenía cargando la estructura con momentos unitarios, correspondientes a dichos giros. Como ahora, interesa la variación de dichos giros multiplicados por una constante,  $2K_{ij}$ ,  $K_{ij}$  ó  $3/2 K_{ij}$  según el caso, se carga entonces la estructura con estos momentos. Y como también se conocen las líneas de influencia para  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$ , entonces bastará superponer las líneas de influencia de los giros y de los momentos de empotramiento, obtenidas como se indicó, para obtener las líneas de influencia de los momentos en los apoyos que era el problema planteado.

### III. CONCLUSION

Las líneas de influencia de una estructura y su elástica de deformación o deformada, están estrechamente ligadas, lo que permite a través de sus relaciones obtener las líneas de influencia de algunas características (momentos en los apoyos) que por otros métodos son de difícil obtención, a partir de las líneas de influencia de otras características (momentos de empotramiento) de fácil obtención por cualquier método.

### IV. APLICACION

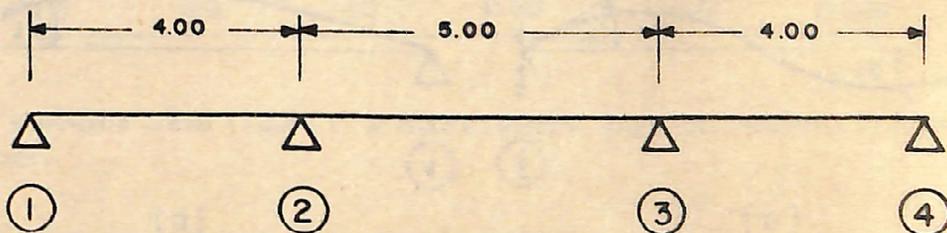


FIGURA 8

Se calculará la línea de influencia en (2). (Ver figura 8).

$$\text{Se tiene: } M_{23} = K_{23} (2\phi_2 + \phi_3) + m_{23}$$

El término  $m_{23}$  puede calcularse fácilmente partiendo de las líneas de influencia de los momentos de empotramiento. Evidentemente existe únicamente cuando la carga está aplicada en el tramo (2)–(3).

Queda por calcular el término  $K_{23}(2\phi_2 + \phi_3)$ ; para ello, y según la teoría ya expuesta, se carga la estructura en el nudo (2) con  $2K_{23}$  y en el nudo (3) con  $K_{23}$ , la elástica obtenida es la línea de influencia del término mencionado.

Constantes Elásticas:

Barra	K
1–2	$2EI/4.0 = 0,5EI$
2–3	$2EI/5.0 = 0,4EI$
3–4	$2EI/4.0 = 0,5EI$

Puede trabajarse con K relativas, dividiendo por EI

$$\begin{aligned} \text{La carga es para el nudo 2: } 2K_{23} &= 0,8EI \\ \text{para el nudo 3: } K_{23} &= 0,4EI \end{aligned}$$

Si se divide también la carga por EI se obtendrán los giros reales. Estos se llevan a las ecuaciones de equilibrio de los nudos (ecuaciones nodales), que son: (ver referencia 1).

$$\begin{bmatrix} d_2^o & K_{23} \\ K_{23} & d_3^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2^o \\ S_3^o \end{bmatrix}$$

En donde:

$$\phi_2 = \text{giro del nudo 2}$$

$$\phi_3 = \text{giro del nudo 3}$$

$$d_2^o = 2(K_{21} + K_{23}) - 0,5K_{21} = 2(0,5 + 0,4) - 0,25 = 1,55$$

$$d_3^o = 2K_{32} + K_{34} - 0,5K_{34} = 2(0,4 + 0,5) - 0,25 = 1,55$$

$$S_2^o = m_{21} + m_{23} - 0,5m_{12} = 0,8$$

$$S_3^o = m_{32} + m_{34} - 0,5m_{43} = 0,4$$

Las ecuaciones nodales quedan:

$$\begin{bmatrix} 1,55 & 0,40 \\ 0,40 & 1,55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,18 & 0,69 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \phi_2 = 0,480 ; \phi_1 = -\frac{\phi_2}{2} = -\frac{0,480}{2} = -0,240$$

$$\phi_3 = 0,132 ; \phi_4 = -\frac{\phi_3}{2} = -\frac{0,132}{2} = -0,066$$

Estos resultados se representan en la figura 9.

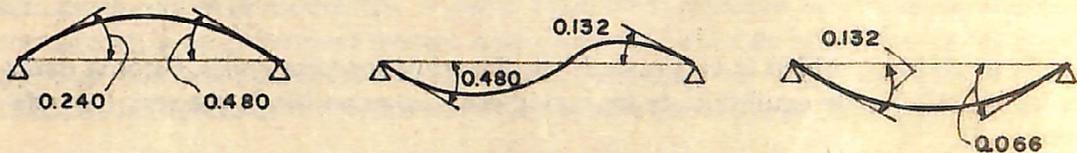


FIGURA 9

Se conocen pues los giros de los nudos. Puede procederse al cálculo de las elásticas.

$$\text{Elástica del primer tramo} = -(m_{12}\phi_1 + m_{21}\phi_2)$$

$$\text{Elástica del segundo tramo} = -(m_{23}\phi_2 + m_{32}\phi_3)$$

$$\text{Elástica del tercer tramo} = -(m_{34}\phi_3 + m_{43}\phi_4)$$

En donde los momentos de empotramiento  $m_{ij}$  son los valores de la tabla 1 multiplicados por la longitud del tramo respectivo.

En las tablas que aparecen a continuación están calculadas las elásticas para cada tramo o sea las líneas de influencia de cada tramo, excepto para el segundo tramo en el cual a la elástica se le agregó el término  $m_{23}$ .

PRIMER TRAMO

x	$m_{12}$	$m_{21}$	$m_{12}\phi_1$	$m_{21}\phi_2$	Elástica = L.I.
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000
0.10	-0.324	0.036	0.078	0.017	-0.095
0.20	-0.512	0.128	0.123	0.061	-0.184
0.30	-0.588	0.252	0.141	0.121	-0.262
0.40	-0.576	0.384	0.138	0.184	-0.322
0.50	-0.500	0.500	0.120	0.240	-0.360
0.60	-0.384	0.576	0.092	0.276	-0.368
0.70	-0.252	0.588	0.060	0.282	-0.342
0.80	-0.128	0.512	0.031	0.246	-0.277
0.90	-0.036	0.324	0.009	0.156	-0.165
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

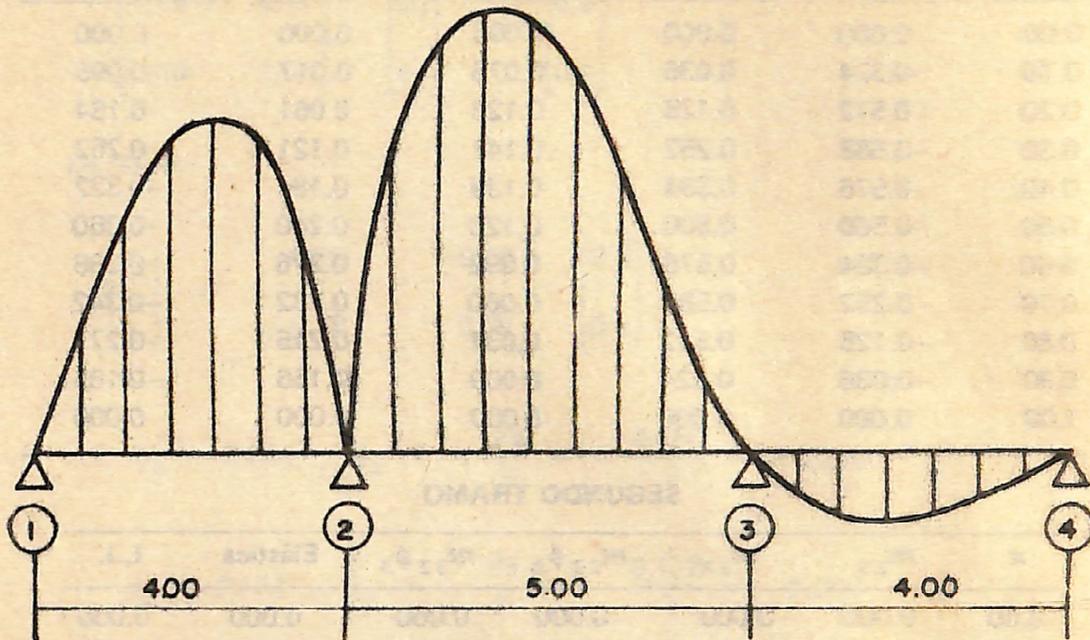
SEGUNDO TRAMO

x	$m_{23}$	$m_{32}$	$m_{23}\phi_2$	$m_{32}\phi_3$	Elástica	L.I.
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	-0.405	0.050	-0.194	0.007	0.187	-0.218
0.20	-0.640	0.160	-0.307	0.021	0.286	-0.354
0.30	-0.735	0.315	-0.353	0.042	0.311	-0.424
0.40	-0.720	0.480	-0.346	0.063	0.283	-0.437
0.50	-0.625	0.625	-0.300	0.083	0.217	-0.408
0.60	-0.480	0.720	-0.230	0.095	0.135	-0.345
0.70	-0.315	0.735	-0.151	0.097	0.054	-0.361
0.80	-0.160	0.640	-0.077	0.084	-0.007	-0.167
0.90	-0.050	0.405	-0.024	0.053	-0.029	-0.079
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000

TERCER TRAMO

x	$m_{34}$	$m_{43}$	$m_{34}\phi_3$	$m_{43}\phi_4$	Elástica = L.I.
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	-0.324	0.036	-0.043	-0.002	0.045
0.20	-0.512	0.128	-0.068	-0.008	0.076
0.30	-0.588	0.252	-0.078	-0.017	0.095
0.40	-0.576	0.384	-0.076	-0.025	0.101
0.50	-0.500	0.500	-0.060	-0.033	0.093
0.60	-0.384	0.576	-0.051	-0.038	0.089
0.70	-0.252	0.588	-0.033	-0.039	0.072
0.80	-0.128	0.512	-0.017	-0.034	0.051
0.90	-0.036	0.324	-0.005	-0.021	0.026
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Con estos resultados se construye gráficamente la línea de influencia para  $M_2$  (ver figura 10).



LÍNEA DE INFLUENCIA DE  $M_2$

FIGURA 10

**Reconocimiento:**

El autor agradece sinceramente la colaboración del Ingeniero Jesús Humberto Arango, en la presentación final de este trabajo, lo mismo que por sus comentarios.

**REFERENCIAS**

1. Influence Lines for statically indeterminate plane structures  
Por W. J. Larnach.
2. Estructuras aporricadas y vigas continuas.  
Por R. Guldan.