

Sección de Ingeniería Industrial

CAPACIDAD OPTIMA PARA UNA NUEVA PLANTA INDUSTRIAL

Por: Gabriel Poveda Ramos
Profesor del Departamento de Matemáticas

1. En el estudio de proyectos de nuevas industrias, uno de los problemas más importantes que es necesario resolver es el de la capacidad física de producción de la nueva planta. Esta decisión debe ser adoptada, por lo común, en medio de muchos factores de incertidumbre. Posiblemente esto explique que muchas veces se decide este tema por métodos empíricos, convencionales o pragmáticos y casi nunca con base en análisis cuantitativos fundados en consideraciones técnico-económicas.

En Colombia fue muy frecuente en el pasado que se sobredimensionaran las plantas industriales, especialmente las que irían a producir en régimen monopolista, porque el costo del capital financiero (tipos de interés) era bajo, porque los aranceles para maquinarias y equipos eran módicos, porque se importaban sin pagar impuestos a las ventas y porque por largas épocas se mantuvieron tipos de cambio sobrevaluado. Todos estos factores constituían un subsidio a los propietarios del capital o a los prestatarios de crédito, que permitía o inducía una propensión excesiva al desembolso de capital. Pero estas condiciones han cambiado y van a cambiar fundamentalmente en el futuro por varias razones:

a. En nuestro país el régimen cambiario refleja ya más el costo real de la divisa internacional y los tipos de cambio están aumentando continuamente, con tendencia a acelerar ese aumento.

b. En años recientes ha comenzado a aplicarse el impuesto a las ventas al equipo importado, con tendencia a elevar sus tasas.

c. Hay una tendencia mundial a elevar rápidamente los precios internacionales en divisas de los bienes de capital, que se prolongará a largo plazo en el futuro.

d. La integración andina hará cada vez más infrecuentes los casos de producción monopolista.

e. Los aranceles colombianos han venido subiendo para maquinaria y equipo, y en el Grupo Andino el arancel externo común que entrará a regir en 1980 establecerá tarifas también proteccionistas para muchísimos equipos y máquinas.

2. Estas y otras consideraciones indican la conveniencia de estudiar con mayor detenimiento el problema del tamaño óptimo de las plantas industriales que vayan a instalarse en el futuro para tomar decisiones más racionalizadas y que permitan economizar al máximo el factor más escaso, más costoso y de menor movilidad que hay en nuestra economía, que es el capital. El propósito de esta nota es el de mostrar un método elemental de análisis sobre este problema y una idea para resolverlo en ciertos casos que suelen ser de frecuente ocurrencia en nuestra industria.

3. Supongamos que se trata de determinar la capacidad de producción Q de una

planta industrial que ha de establecerse para atender una demanda del mercado nacional y/o del exterior, bajo los siguientes supuestos:

- a. El crecimiento de la demanda es predecible y es monótonicamente creciente.
- b. Existe una correlación conocida entre las capacidades de planta y sus costos, y esta es una función derivable.
- c. La planta funcionará durante todo el período prescrito para su amortización, que es conocido.
- d. El costo del capital es alto, por lo cual los cálculos de valores futuros se reducirán a valores descontados iniciales, mediante un proceso de capitalización continua.
- e. La capacidad de producción de la planta no mengua con el tiempo.

Establezcamos además las siguientes convenciones de nomenclatura:

- t: Transcurso de tiempo desde el momento de iniciar la producción y venta del producto, lo cual ocurre en el instante $t = 0$.
- D(t): Demanda que se atiende (o sea ventas) en unidades físicas por unidad de tiempo, en fecha t.
- Q: Capacidad de producción en unidades físicas por unidad de tiempo en la planta.
- K(Q): Costo o monto total de inversión y preinversión de la planta (que dependa de la capacidad), ya instalada y lista para comenzar a producir.
- T: Período de amortización de la inversión en la planta. Llamaremos L a su inverso: $1/T = L$
- t = h: Fecha en la cual la planta queda copada en su capacidad por la demanda a que atiende, es decir $D(h) = Q$
- m: Margen de contribución (precio menos costos directos y proporcionales—inclusive los gastos financieros— menos impuestos de ventas e impuestos directos), por unidad física de producto, que supondremos constante por ser generalmente muy inciertas sus tendencias futuras.
- r: Coeficiente exponencial de capitalización continua del dinero, que supondremos constante.
- i: Tipo de interés (nomial o de oportunidad, según el caso) para el dinero, por unidad de tiempo, incluyendo impuestos al capital (patrimonial).

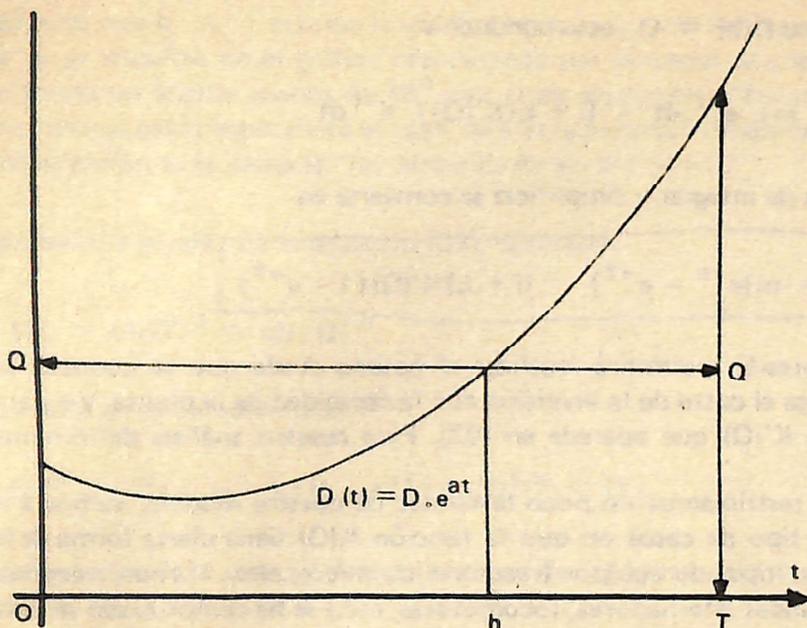
Durante la primera etapa de la vida de la planta, cuando se trabaja con capacidad holgada, o sea desde $t = 0$ hasta $t = h$, tenemos: Ingresos brutos por unidad de tiempo, en la fecha t, descontados al instante inicial $= e^{-rt} \cdot m \cdot D(t)$.

Costo por intereses del capital, por unidad de tiempo, descontado $= e^{-rt} \cdot i \cdot K(Q)$

Costo por depreciación por unidad de tiempo, descontado $= e^{-rt} \cdot K(Q)/T$

Posteriormente, durante la etapa de la planta con capacidad de producción copada (desde $t = h$ hasta $t = T$), se tendrá:

Ingresos brutos por unidad de tiempo, en la fecha t, descontados al momento inicial $= e^{-rt} \cdot m \cdot Q$.



Costo por intereses del capital, más depreciación, por unidad de tiempo, descontado al momento inicial = $e^{-rt} [i \cdot K(Q) + K(Q)/T]$

En consecuencia la utilidad total durante el período de amortización de la planta, que adoptaremos como base de juicio para definir la optimalidad de la planta, es:

$$U(Q) = \int_0^h e^{-rt} m D(t) \cdot dt + \int_h^T e^{-rt} m Q \cdot dt - (i + L) K(Q) \int_0^T e^{-rt} \cdot dt \quad (01)$$

en donde $L = 1/T$

Es natural definir el tamaño óptimo de planta como aquel que da lugar a un máximo de esta función.¹ El hecho de que hay un máximo se puede apreciar intuitivamente por las siguientes consideraciones:

- a. Si se adopta una planta muy pequeña, los costos de capital serán bajos, pero las ventas totales en la vida de la planta serán muy bajas.
- b. Si, por el contrario, la planta es muy grande, se podrán hacer ventas grandes pero los costos de capital serán también muy altos.

La función (01) es derivable, luego su máximo estará en un valor de Q que haga $dU/dQ = 0$. Para derivar esa función hay que tener en cuenta que la variable Q está afectando el límite h de los dos integrales, y por lo tanto hay que aplicar la regla de derivación de Leibnitz que se refiere a estos casos. Derivando se obtiene:

$$U' = m \cdot D(h) e^{-rh} \cdot dh/dQ - m \cdot Q \cdot e^{-rh} dh/dQ + \int_h^T m \cdot e^{-rt} dt - (i + L) K'(Q) \int_0^T e^{-rt} \cdot dt$$

¹ Podrían adoptarse otros criterios de optimalidad, p.e. el de maximizar U/K

Pero como $D(h) = Q$, esto conduce a

$$U' = m \int_h^T e^{-rt} dt - (i + L) K'(Q) \int_0^T e^{-rt} dt$$

que después de integrar y simplificar se convierte en

$$rU' = m(e^{-rh} - e^{-rT}) - (i + L) K'(Q) (1 - e^{-rT}) \quad (02)$$

Esta expresión permitirá localizar el óptimo desde que se conozca la función $K(Q)$ que liga el costo de la inversión con la capacidad de la planta, y a partir de ella, la función $K'(Q)$ que aparece en (02). Para nuestro análisis definiremos la cap.

4. Aunque restrinjamos un poco la validez de nuestro modelo, vamos a resolverlo para cierto tipo de casos en que la función $K(Q)$ tiene cierta forma determinada. Para muchos tipos de equipos (reactores químicos, altos hornos, maquinas-herramientas, grandes alternadores, locomotoras, etc.) se ha comprobado empíricamente que la relación capacidad-inversión obedece a una ecuación empírica de correlación de la forma

$$K = cQ^b, \text{ siendo } b < 1 \quad (03)$$

o sea

$$\log K = \log c + b \cdot \log Q$$

La validez de esta correlación puede confrontarse en cada problema específico mediante una experiencia gráfico-numérica muy sencilla. En una cuadrícula doble-logarítmica se localizan varios puntos que correspondan a varios tamaños de planta o del equipo en cuestión, de un mismo tipo tecnológico, marcando sus respectivas capacidades (Q) en abscisas y sus precios o valores (K) en ordenadas. Si la colección de puntos así marcada es aproximadamente rectilínea se puede aceptar la validez de la ecuación (03).

Además, si se dispone de más de dos puntos en este diagrama, pueden calcularse los coeficientes o parámetros c , b , usando el método de mínimos cuadrados. Si sólo se dispone del dato de capacidad y costo para dos tamaños de planta o unidad, tecnológicamente análogos, el cálculo de los parámetros es aún más sencillo. Sean Q_1 , Q_2 las dos capacidades especificadas y K_1 , K_2 sus costos:

$$K_1 = cQ_1^b, \quad K_2 = cQ_2^b$$

$$\begin{aligned} \log K_1 &= \log c + b \log Q_1 \\ \log K_2 &= \log c + b \log Q_2 \end{aligned}$$

y resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones obtenemos

$$b = \log(K_1/K_2) / \log(Q_1/Q_2)$$

$$c = \sqrt{(K_1 K_2) / (Q_1 Q_2)^b}$$

$$\begin{aligned} \log K_1 - \log K_2 &= b (\log Q_1 - \log Q_2) \\ \log(K_1/K_2) &= b \\ \frac{\log(K_1/K_2)}{\log(Q_1/Q_2)} &= b \end{aligned}$$

El hecho de que $b < 1$ expresa lo que los economistas denominan "economías de escala" y se visualiza en el gráfico mencionado por el hecho de que la recta de regresión forma un ángulo menor de 45° con el eje en donde se marcan los valores de Q . Para muchos casos específicos el valor de b es aproximadamente cercano a $2/3$, y a esta observación se la llama la "ley empírica de los dos tercios".

Comprobada la validez de la ecuación (03), se deduce

$$K'(Q) = cbQ^{b-1} = cb/Q^{1-b}$$

y sustituyendo en la ecuación (02):

$$m(e^{-rh} - e^{-rT}) - (i + L)(1 - e^{-rT})cb/Q^{1-b} = U'r \quad (04)$$

En esta ecuación falta aún por determinar h , es decir el momento en que la planta queda copada en su capacidad.

5. Para muchos tipos de productos industriales en Colombia el crecimiento de la demanda ha demostrado ser un crecimiento exponencial, es decir con una tasa de aumento porcentual constante, o, como se dice también a veces, de crecimiento geométrico, análogo al del monto de una inversión con intereses capitalizables en forma acumulativa y continua. Esta ha sido la experiencia y sigue siéndolo en productos tan diversos como cemento, productos químicos minerales, resinas artificiales, calzado, vestuario, papel, varillas de acero, cobre, pinturas, energía eléctrica, etc.

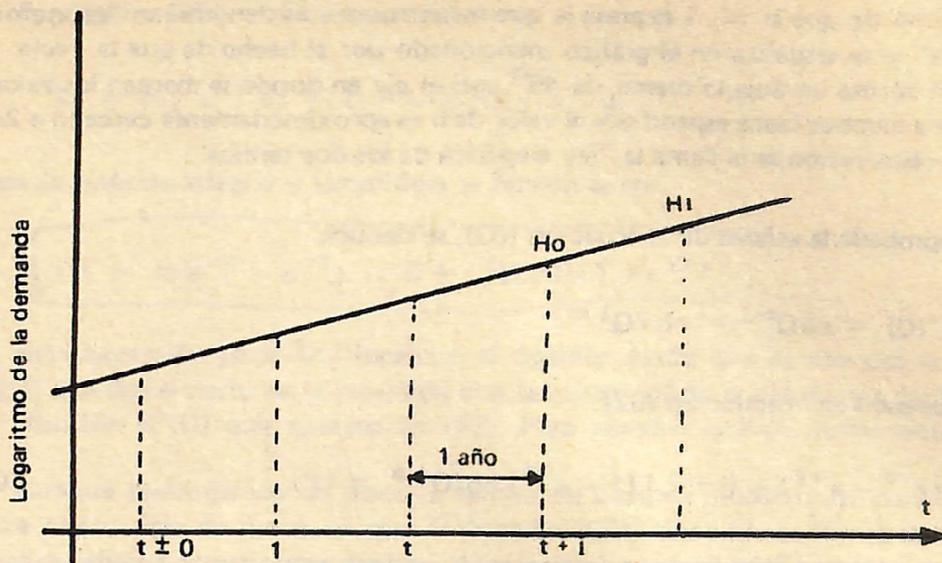
Matemáticamente, lo que hemos señalado se expresa mediante una función de pronóstico de la demanda atendible por nuestro proyecto de la forma

$$D(t) = D_0 e^{at}, \text{ siendo} \quad (05)$$

D_0 : Demanda atendida por el proyecto desde su iniciación (medida por estudio del mercado).

a : Tasa de crecimiento acumulativo de la demanda servida. Se calcula mediante la fórmula $a = \log_e [D(1)/D_0] \times \text{año}^{-1}$ que puede deducirse de (05) y en donde $D(1)$ es la demanda normal previsible 1 año después del arranque de la planta. En realidad la fórmula puede también escribirse $a = \log_e [D(t+1)/D(t)] \times \text{año}^{-1}$, siendo $D(t+1)/D(t)$ el cociente (mayor que 1) entre la demanda atendida por unidad de tiempo en un momento normal del mercado y la que se abasteció (por unidad de tiempo) un año atrás, también en condiciones normales del mercado.

En el diagrama anexo se muestran dos puntos H_0, H_1 , que serviría para hacer tal comparación de $D(t+1)$ sobre $D(t)$ y calcular a . En todo caso el mejor método para calcular a es acudir al estudio del mercado y de los antecedentes retrospectivos del crecimiento de la demanda, aplicando los métodos de mínimos cuadrados.



Establecidos los valores D_o , a en la ecuación (05), puede escribirse:

$$D(h) = Q \text{ o sea } D_o e^{ah} = Q$$

de donde

$$e^{ah} = Q/D_o \quad e^h = (Q/D_o)^{1/a} \quad e^{-rh} = (D_o/Q)^{r/a} \quad (05)$$

Sustituyendo en (04) se obtiene

$$U' = [m(D_o/Q)^{r/a} - m e^{-rT} - (i+L)(1 - e^{-rT})cb/Q^{1-b}]/r \quad (06)$$

Igualando a cero esta expresión se obtiene la ecuación que debe determinar el óptimo valor de Q :

$$-e^{-rT} + (D_o/Q)^{r/a} = l/Q^{1-b} \quad (07)$$

siendo $l = (i+L)(1 - e^{-rT})cb/m$.

La solución de la ecuación (07) sólo puede realizarse por métodos gráficos o numéricos para hallar la (o las) raíz (o raíces) aproximadas.

6. Una manera gráfica de resolver la ecuación (07) puede ser la siguiente. Obsérvese en primer lugar que según las ecuaciones (05), es:

$$e^{-rh} = (D_o/Q)^{r/a}$$

y puesto que

$$h < T \quad e^{-rh} > e^{-rT} \Rightarrow e^{-rh} - e^{-rT} > 0$$

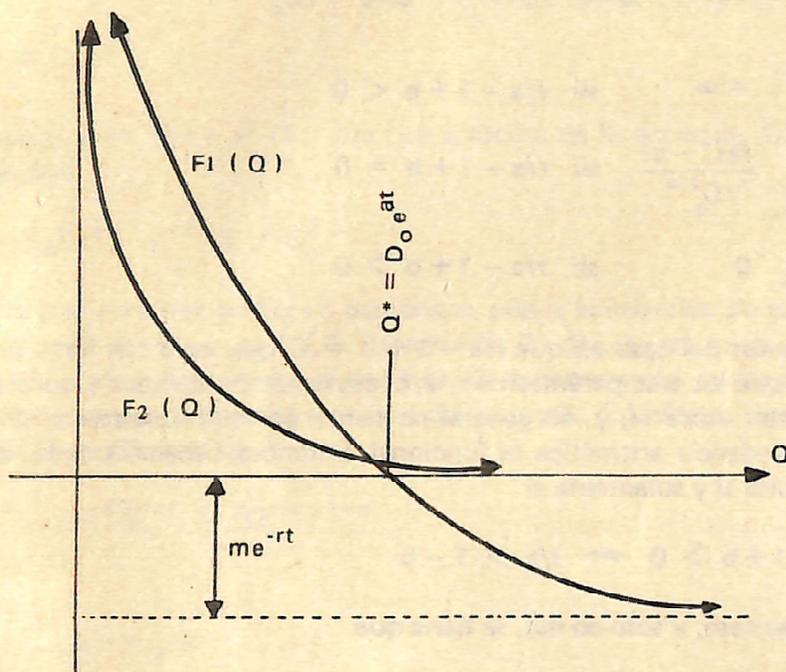
$$\Rightarrow F_1(Q) = (D_0/Q)^{r/a} - e^{-rT} > 0 \Leftrightarrow Q < D_0 e^{aT}$$

Se comprueba que el lado izquierdo de la ecuación (07) debe ser positivo en el intervalo $0 < Q < D_0 e^{aT}$ y negativo en la semirrecta $Q > D_0 e^{aT}$.

El lado derecho de la ecuación es positivo en todo caso.

Llamemos $F_1(Q) = (D_0/Q)^{r/a} - e^{-rT}$

y $F_2(Q) = //Q^{1-b} > 0$ para todo $Q > 0$.



La gráfica de la función $F_1(Q)$ tiene como asíntota vertical el eje de ordenadas en $+\infty$, y como asíntota horizontal la recta $y = -me^{-rT}$. Corta al eje horizontal en el punto Q^* :

$$m(D_0/Q^*)^{r/a} = me^{-rT}$$

$$Q^* = D_0 e^{aT}$$

La función $F_2(Q)$ tiene como asíntotas los dos ejes de coordenadas.

7. Se trata pues de resolver la ecuación trascendente

$$F_1(Q) = F_2(Q) \tag{08}$$

Esta ecuación tiene una raíz (única) si para todo valor de Q suficientemente pequeño, se tuviera, como se vé en la figura:

$$F_2(Q) < F_1(Q)$$

En tal caso (y sólo entonces), se tendrá

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \frac{F_2(Q)}{F_1(Q)} \leq 1$$

y aplicando la regla de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{F_2(Q)}{F_1(Q)} &= \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{F_2'(Q)}{F_1'(Q)} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{la(1-b)}{rD_0^{r/a}} Q^{(r/a - 1 + b)} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{sii } r/a - 1 + b < 0 \\ \frac{la(1-b)}{rD_0^{r/a}} & \text{sii } r/a - 1 + b = 0 \\ 0 & \text{sii } r/a - 1 + b > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Prescindamos del caso en que $r/a - 1 + b = 0$, que sería casi fortuito en la realidad, dado que los tres parámetros r , a , b provienen de campos y consideraciones muy diferentes entre sí, y, en general no tienen por qué obedecer a ninguna relación de dependencia aritmética ni funcional. Entonces, necesariamente, la ecuación tiene raíz única si y solamente si

$$r/a - 1 + b > 0 \Leftrightarrow r/a > 1 - b \quad (09)$$

porque en ese caso, y solo en ese, se tiene que

$$\lim_{Q \rightarrow 0} (F_2/F_1) = 0 < 1$$

Si por el contrario los parámetros r , a , b cumplen la desigualdad

$$r/a < 1 - b \quad (< 1)$$

la ecuación (08) carecería de solución o tendría dos soluciones, porque en ese caso se tendría

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \frac{F_2(Q)}{F_1(Q)} = +\infty > 1 \quad F_2(Q) > F_1(Q)$$

en algún entorno (acotado) a la derecha del origen (que sería el caso de dos raíces) o en toda la semirrecta $Q > 0$ (que sería el caso de ninguna raíz).

8. La desigualdad (09) tiene un significado muy concreto. En efecto, escribiéndola como

$$r > (1 - b)a$$

se puede interpretar en el sentido de que para que el problema que hemos planteado tenga solución única es necesario que el costo de oportunidad del dinero (expresado por r) debe ser suficientemente alto frente a las economías de escala (expresadas en el factor $1 - b$) y a la tasa proyectada de crecimiento de las ventas. Si la situación fuera la contraria (es decir $(1 - b)a > r$) esto querría decir que la tasa proyectada en el crecimiento de las ventas (a) es tan alta y/o que las economías de escala (b) son tan poco importantes, que su producto es mayor que el costo de oportunidad del dinero. En ese caso no habría problema en el sentido de que hemos hablado y se montaría una planta con capacidad suficiente para la demanda proyectada en la fecha T , o sea la demanda más alta prevista:

$$Q^* = D_0 e^{aT}$$

9. Admitimos pues que $r > (1 - b)a$. La solución de la ecuación (07), Q_0 , cumple la igualdad

$$(D_0 / Q_0)^{r/a} - e^{-rT} \equiv l / Q_0^{1-b} \quad (07)$$

se obtendrá por métodos gráficos o numéricos, previa la inserción de todos los valores numéricos de m , D_0 , r , a , T , l , b . La solución Q_0 de esta ecuación es menor que $Q^* = D_0 e^{aT}$, pero, desde luego es positiva. Esta observación puede comprobarse en el gráfico, pero en todo caso conviene demostrarla. En efecto: multipliquemos (07) por $Q_0^{r/a}$, y obtenemos:

$$D_0^{r/a} - e^{-rT} Q_0^{r/a} = l Q_0^{r/a - 1 + b}$$

pero

$$D_0^{r/a} = Q^{*r/a} e^{-rT}$$

de donde

$$(Q^{*r/a} - Q_0^{r/a}) e^{-rT} = l Q_0^{r/a - 1 + b}$$

Como el lado derecho es positivo, evidentemente, entonces

$$Q^{*r/a} > Q_0^{r/a} \quad \text{ó sea} \quad Q^* > Q_0 > 0$$

lo que demuestra nuestra afirmación.

10. Comprobemos ahora que el valor Q_0 obtenido es efectivamente el mismo para $U(Q)$ Para esto es necesario y basta que

$$U''(Q_0) < 0 \quad \text{ó bien} \quad Q_0 U''(Q_0) < 0 \quad (10)$$

La segunda derivada de $U(Q)$ puede obtenerse derivando $U'(Q)$ en la ecuación (06):

$$U''(Q) = -(m/a) D_o^{r/a} Q^{-r/a-1} + (lm/r)(1-b)Q^{-2+b}$$

$$Q.U''(Q) = -(m/a) D_o^{r/a} Q^{-r/a} + (lm/r)(1-b)Q^{-1+b}$$

y por lo tanto debe tenerse

$$-(m/a) D_o^{r/a} Q_o^{-r/a} + (lm/r)(1-b)Q_o^{-1+b} < 0$$

$$\frac{r}{a(1-b)} > \frac{Q_o^{r/a}}{D_o} \frac{l}{Q_o^{1-b}} \quad (11)$$

Pero de la ecuación (07) deducimos

$$\frac{l}{Q_o^{1-b}} = \left[\left(\frac{D_o}{Q_o} \right)^{r/a} - e^{-rT} \right]$$

y sustituyendo en la desigualdad (11) se obtiene

$$\frac{r}{a(1-b)} > \left(\frac{Q_o}{D_o} \right)^{r/a} \left[\left(\frac{D_o}{Q_o} \right)^{r/a} - e^{-rT} \right]$$

$$e^{-rT} \left(\frac{Q_o}{D_o} \right)^{r/a} > 1 - \frac{r}{a(1-b)} = \frac{a(1-b)-r}{a(1-b)}$$

Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad (11), y es siempre válida porque

$$e^{-rT} \left(\frac{Q_o}{D_o} \right)^{r/a} > 0$$

mientras que, por la desigualdad (09) sabemos que

$$a(1-b) - r < 0 \quad (12)$$

o sea

$$\frac{a(1-b)-r}{a(1-b)} < 0$$

11. Por consideraciones prácticas es evidente que el tamaño óptimo Q_o de la planta no puede y no debe ser inferior (ni siquiera igual) a la demanda D_o que comenzará a abastecerse desde el primer momento de su arranque. Es decir, debe ser:

$$D_o < Q_o \text{ ó sea } D_o^{r/a} < Q_o^{r/a} \text{ y } D_o^{r/a-1+b} < Q_o^{r/a-1+b}$$

Despejando $D_o^{r/a}$ de la ecuación (07), esta desigualdad se escribe

$$D_0^{r/a} = e^{-rT} Q_0^{r/a} + l Q_0^{r/a \cdot 1+b} > e^{-rT} D_0^{r/a} + l D_0^{r/a \cdot 1+b}$$

Es decir, que para que el problema tenga sentido técnico-económico, según el concepto expresado más atrás, es necesario que los parámetros y datos conocidos cumplan la desigualdad

$$D^{r/a} > e^{-rT} D_0^{r/a} + l D_0^{r/a \cdot 1+b}$$

o sea que los parámetros que entran en el coeficiente l deben hacerlo cumplir la condición

$$l < D^{1-b} (1 - e^{-rT}) \Leftrightarrow (i + L)cb/m < D^{1-b} \Rightarrow (i + L)cD^b < \frac{m}{b} D \quad (13)$$

o sea que los costos fijos financieros por unidad de tiempo, representados en $(i + L)cD^b$ deben ser inferiores a la contribución (mD/b) desde el primer momento. De lo contrario, nuestra solución óptima teórica Q_0 resultaría menor (!) que D_0 , lo cual indicaría que el proyecto no es viable con las condiciones técnicas y económicas dadas. Cabe subrayar, sin embargo, que la condición (13) es una condición necesaria pero no es suficiente (por sí sola) para garantizar la factibilidad técnico-económica del proyecto.

12. Ejemplo.

Consideremos el ejemplo descrito por los siguientes parámetros, y que se aproxima a algunos casos de plantas para productos químicos en Colombia, recientemente

- $D_0 = 2000$ Tons/año (Demanda atendible al comienzo de la producción).
- $a = 0.1$ año⁻¹ (o sea 10% anual de crecimiento en ventas).
- $T = 10$ años (el período de depreciación de una planta según la legislación tributaria)
- $L = 1/T = 0.1$ año⁻¹
- $m = \$30.000/\text{Ton}$ (o sea un margen bruto de contribución de \$20/kilo de producto)
- $r = 0.20$ año⁻¹ (que es aproximadamente el caso razonable en el país: 20% anual de desvalorización del dinero, a largo plazo).
- $rT = 2 \Rightarrow e^{-rT} = e^{-2} = 0.135335283$
- $b = 2/3$ ("Ley de los dos tercios" como expresión de las economías de escala de la planta).
- $c = \$500.000$ (Condición técnico-económica de la tecnología propia de tales plantas).
- $i = 30\%$ año⁻¹ (tipo de interés efectivo del dinero, en moneda corriente, sin corrección monetaria).
- $l = (i + L)(1 - e^{-rT})cb/m = (0.30 + 0.1)(1 - e^{-2}) \times 500000 \times (2/3)/30.000 = 3.8429542$
- $r/a = 2$

Comprobamos además la condición de que $r = 0.2$, $(1 - b)a = (1/3) \times 0.1 = 0.03333 \dots$, y la condición de que $(i + L)cD_0^b = (0.3 + 0.1) \times 10^6 \times 2000^{0.333333} = 5.428833 \times 10^6 < mD_0/b = 30000 \times 2000/0.6667 = 90 \times 10^6$

$$1 - b = 0.33333$$

Para resolver la ecuación $(D_0/Q)^{r/a} - e^{-rT} = I/Q^{1-b}$ formamos la tabla de cada uno de los dos lados de esta, con valores a partir de $D_0 = 2000$ Ton/año.

Q	$Q^{r/a}$	Q^{1-b}	$D_0^{r/a}/Q^{r/a} - e^{-rT}$	I/Q^{1-b}
Q	Q^2	$Q^{0.33333}$	$4 \times 10^6/Q^2 - 0.135335$	$3.842954/Q^{0.33333}$
2000	4×10^6	12.59921	0.864664	0.305015
2500	6.25×10^6	13.57208	0.504665	0.242092
3000	9×10^6	14.42249	0.309109	0.266456
*				Solución
3500	12.25×10^6	15.18294	0.191195	0.253110
4000	16×10^6	15.87401	0.114665	0.242091

En este caso la capacidad óptima estará en las cercanías de 3200 Ton/año, como se deduce al comparar las últimas dos columnas.

13. Finalmente, vale la pena deducir el valor máximo de la utilidad total descontada, $U(Q)$, que estamos buscando. Con ese fin volvemos a partir de su expresión en la fórmula (01)

$$U(Q) = \int_0^h e^{-rt} m \cdot D(t) dt + \int_h^T e^{-rt} m Q dt + (i + L) K(Q) \int_0^T e^{-rt} dt \quad (14)$$

Sustituyamos en ella los valores y funciones que por hipótesis o por cálculo podemos hacer explícitas:

$$D(t) = D_0 e^{at} \quad (\text{Crecimiento exponencial de la demanda})$$

$$Q = Q_0 \quad (\text{Capacidad óptima})$$

$$K(Q) = cQ^b \quad (\text{Fórmula empírica para correlación costo-capacidad de planta})$$

y tendremos como valor máximo de $U(Q)$:

$$U^* = mD_0 \int_0^{h_0} e^{-(r-a)t} dt + mQ_0 \int_{h_0}^T e^{-rt} dt + (i + L) cQ_0^b \int_0^T e^{-rt} dt$$

en donde h_0 es el lapso de tiempo requerido para que la demanda llegue a copar la capacidad óptima elegida, Q_0 , es decir:

$$Q_0 = D_0 e^{ah_0}$$

Calculemos además:

$$\int_0^{h_0} e^{-(r-a)t} dt = \begin{cases} (1 - e^{-rh_0} e^{ah_0}) / (r-a) & \text{sii } r \neq a \\ h_0 & \text{sii } r = a \end{cases}$$

$$\int_{h_0}^T e^{-rt} dt = (e^{-rh_0} - e^{-rT}) / r$$

$$\int_0^T e^{-rt} dt = (1 - e^{-rT}) / r$$

Entonces si $r \neq a$ (y sólo en tal caso):

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{mD_0}{r-a} (1 - e^{-rh_0} e^{ah_0}) + \frac{mQ_0}{r} (e^{-rh_0} - e^{-rT}) + \frac{(i+L)(1 - e^{-rT})c}{r} Q_0^b \\ &= \frac{mD_0}{r-a} - \frac{mQ_0 e^{-rh_0}}{r-a} + \frac{mQ_0 e^{-rh_0}}{r} - \frac{mQ_0 e^{-rT}}{r} + \frac{lm}{rb} Q_0^b \end{aligned}$$

Pero de la condición de optimalidad (07) se deduce

$$lQ_0^b = Q_0 [(D_0/Q_0)^{r/a} - e^{-rT}]$$

que sustituyendo en la anterior, y recordando que $e^{-rh_0} = (D_0/Q_0)^{r/a}$, nos dá

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{mD_0}{r-a} + mQ_0 \left(\frac{D_0}{Q_0}\right)^{r/a} \left(-\frac{1}{r-a} + \frac{1}{r}\right) - \frac{mQ_0}{r} e^{-rT} \\ &\quad + \frac{m}{rb} Q_0 \left[\left(\frac{D_0}{Q_0}\right)^{r/a} - e^{-rT}\right] \end{aligned}$$

Reuniendo términos semejantes y efectuando sumas y restas de quebrados se obtiene

$$U^* = \frac{mD_0}{r-a} + \frac{m}{r} \left(\frac{D_0}{Q_0}\right)^{r/a} Q_0 \frac{r-a-ab}{b(r-a)} - \frac{m}{r} Q_0 e^{-rT} \frac{1+b}{b}$$

(sii $r \neq a$)

En el caso (muy improbable) de que la situación financiera y las tendencias del mercado coincidieran en hacer $r = a$, se tendría:

$$U^* = mD_0 h_0 + \frac{m}{r} Q_0 (e^{-rh_0} - e^{-rT}) + \frac{m}{rb} Q_0 \left[\left(\frac{D_0}{Q_0}\right)^{r/a} - e^{-rT}\right]$$

Otros análisis a que se presta este tema se dejan al lector

14. Conclusión

Este problema se presta a otros análisis y a otras variaciones que dejamos a estudio del lector. Podríamos por ejemplo proponer las siguientes cuestiones:

a. Establecer la condición de que la rentabilidad óptima respecto a la inversión y a la vida del proyecto no debe ser inferior a cierto nivel prescrito, por ejemplo, no inferior al interés bancario, es decir $U^*/K.T \geq i$, y deducir la condición que deben cumplir todos los parámetros del problema.

b. Usar como criterio de optimalidad no el de maximizar la utilidad total durante toda la vida del proyecto, U , sino su valor relativo respecto a la inversión fija U/K .

Desde luego, el problema aquí considerado es apenas uno de los muchos que hay que resolver en la evaluación de un proyecto. El hecho de encontrar cual es la dimensión óptima de la planta no garantiza que ella sea viable. Después de despejar esa incógnita, ella debe ser sometida a todas las comprobaciones y análisis requeridos para constatar su viabilidad económica.