

# SOBRE ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE FORMA EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

Por: Tomás Castrillón O.

Profesor Depto. de Ingeniería Civil

## I. INTRODUCCION

En el presente trabajo se definen, en primer término, las funciones de forma, se ilustra la manera de obtener las deformadas de vigas simples en función de ellas y se deducen algunas de las más utilizadas.

Seguidamente y como aplicación, se deduce la matriz de rigidez de una barra prismática actuando en el plano y sin considerar deformaciones axiales, mediante el uso de las funciones de forma.

También se define la matriz de masa generalizada y se la obtiene aplicando las funciones de forma.

El objetivo principal es familiarizar al lector con algunos de los métodos y procedimientos modernos, empleados en el análisis de estructuras.

## II. OBTENCION DE LAS FUNCIONES DE FORMA

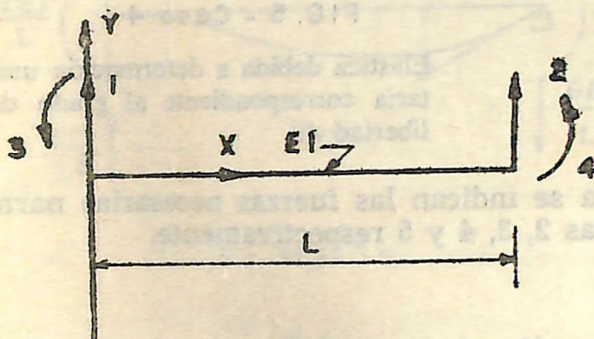


FIG. 1

Se trata de estudiar la deformación de una viga prismática (Fig. 1) con los cuatro grados de libertad ilustrados a saber: desplazamientos (1 y 2) y giros (3 y 4). La deflexión de un punto cualquiera (sin incluir el efecto de cargas aplicadas en el Tramo) está dada por

$$Y_x = \sum_i \Psi_i(x) q_i \quad (1)$$

Siendo:  $\Psi_i(x)$  = función de forma (correspondiente a cada grado de libertad)

$q_i$  = Coordenada generalizada (no restringida); las coordenadas en estos sistemas son independientes entre sí. (Ref. 3).



Dicho de otro modo, puede obtenerse la elástica mediante la superposición de las elásticas ilustradas en las figuras 2, 3, 4 y 5 (las que corresponden a giros y desplazamientos unitarios) multiplicadas por los valores reales de tales desplazamientos.

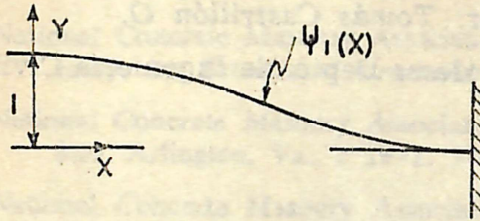


FIG.2 Caso 1

Elástica debida a deformación unitaria correspondiente al grado de libertad 1.

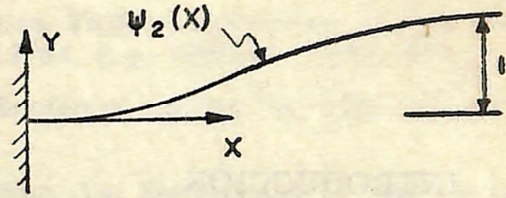


FIG.3 Caso 2

Elástica debida a deformación unitaria correspondiente al grado de libertad 2.

En estas figuras están definidas implícitamente las funciones de forma.

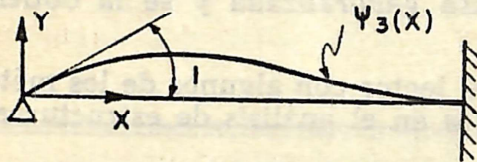


FIG 4 - Caso 3

Elástica debida a deformación unitaria correspondiente al grado de libertad 3.

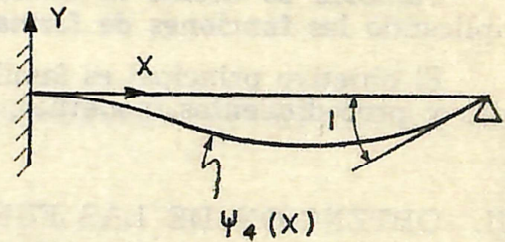


FIG. 5 - Caso 4

Elástica debida a deformación unitaria correspondiente al grado de libertad 4.

En las figuras 2a, 3a, 4a y 5a se indican las fuerzas necesarias para producir las elásticas de las figuras 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

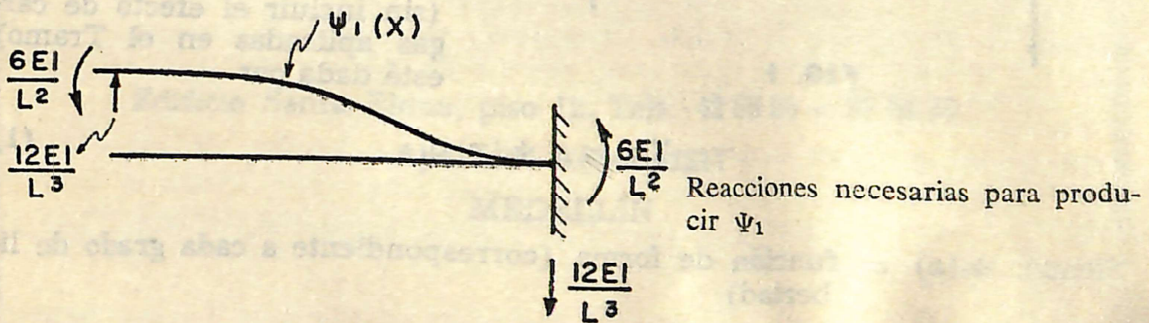


FIG. 2a



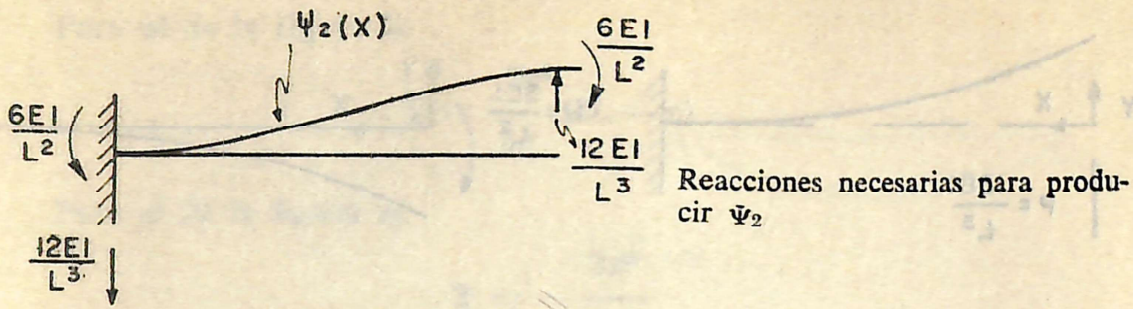


FIG. 3a

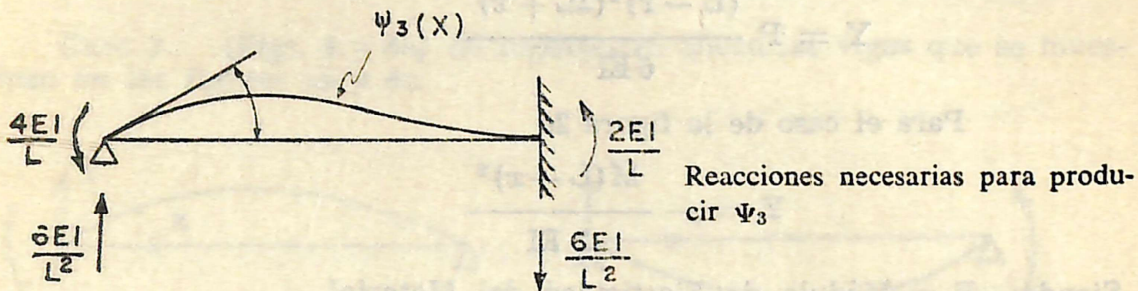


FIG. 4a

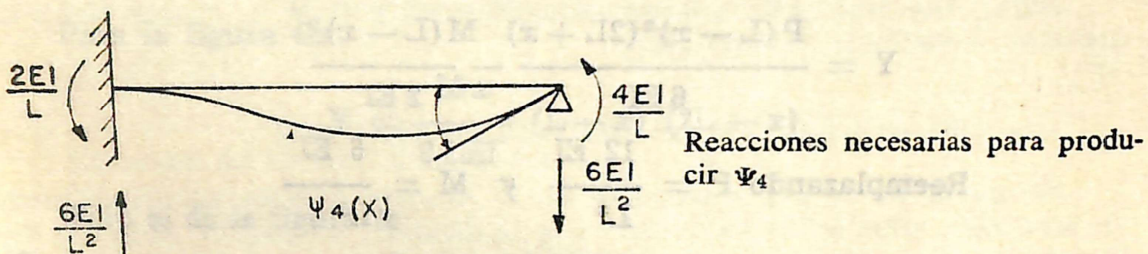


FIG. 5a

Mediante la aplicación de las fórmulas elementales de la Resistencia de Materiales (Ref. 1), se obtienen en seguida, las funciones de forma correspondientes a los grados de libertad definidos en la figura 1.

**Caso 1.** (Figs. 2 y 2a.). Superponiendo los casos que se ilustran en las figuras 2b y 2c.



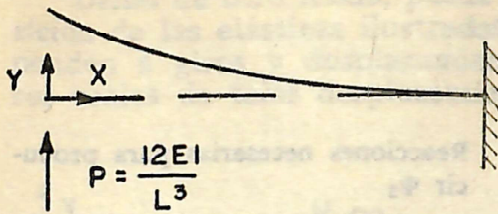


FIG. 2 b

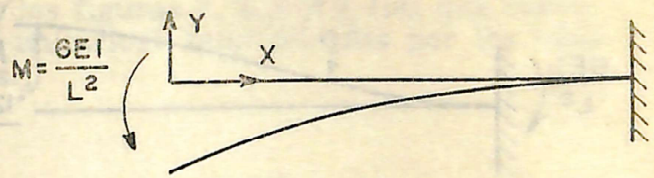


FIG. 2 c

Para el caso de la figura 2b

$$Y = P \frac{(L-x)^2(2L+x)}{6EI}$$

Para el caso de la figura 2c

$$Y = - \frac{M(L-x)^2}{2EI}$$

Siendo:  $E$  = Módulo de Elasticidad del Material

$I$  = Momento de Inercia de la Sección transversal.

Entonces la elástica para el caso 1 será:

(Tomando la  $Y$  positiva hacia arriba)

$$Y = \frac{P(L-x)^2(2L+x)}{6EI} - \frac{M(L-x)^2}{2EI}$$

$$\text{Reemplazando } P = \frac{12EI}{L^3} \text{ y } M = \frac{6EI}{L^2}$$

$$\text{Se obtiene: } Y = \psi_1 = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 \quad (2)$$

Caso 2. (Figs. 3 y 3a) Superponiendo los casos ilustrados en las figuras 3b y 3c

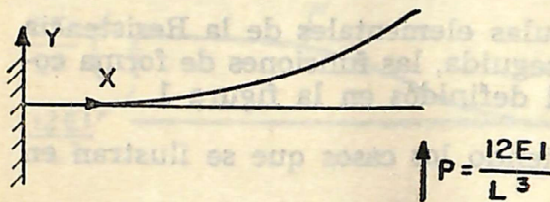


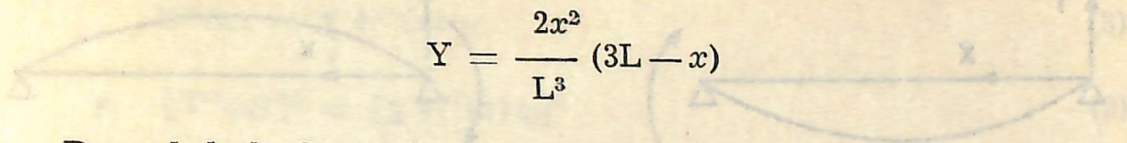
FIG. 3 b



FIG. 3 c



Para el de la figura 3b



$$Y = \frac{2x^2}{L^3} (3L - x)$$

Para el de la figura 3c

$$Y = -\frac{3x^2}{L^2}$$

Superponiendo:

$$Y = \psi_2 = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad (3)$$

Caso 3. (Figs. 4 y 4a) Se superponen ahora las vigas que se muestran en las figuras 4b y 4c.

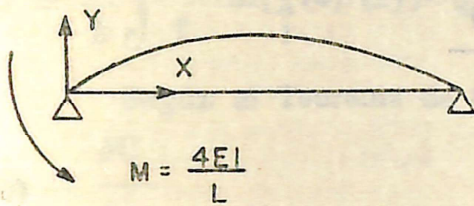


FIG. 4b

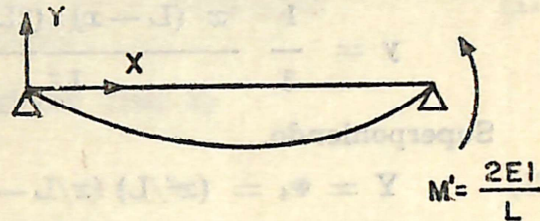


FIG. 4c

Para la figura 4b

$$Y = \frac{Mx}{6LEI} (L-x)(2L-x)$$

Para el de la figura 4c

$$Y = -\frac{M^1 Lx}{12EI} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Superponiendo y reemplazando:

$$M = \frac{4EI}{L} \text{ y } M^1 = \frac{2EI}{L}$$

Queda:

$$Y = \psi_2 = x(1 - x/L)^2 \quad (4)$$

Caso 4: (Figs. 5 y 5a). Se superponen los casos que se ilustran en las figuras 5b y 5c.



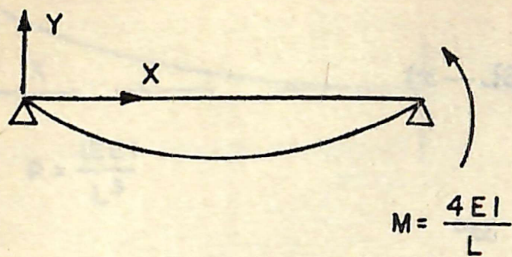


FIG. 5b

Para el de la figura 5b

$$y = -2x(L-x)(L+x)/3L^2$$

Para el de la figura 5c

$$y = \frac{1}{3} \frac{x(L-x)(2L+x)}{L^2}$$

Superponiendo

$$Y = \Psi_4 = (x^2/L)(x/L - 1) \quad (5)$$

En forma análoga pueden hacerse las deducciones para el caso en que  $EI = f(x)$ .

Notar que  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  no tienen dimensiones y  $\Psi_3$  y  $\Psi_4$  tienen como dimensión Longitud (Anexo III).

### III. DEDUCCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Se parte de la expresión que da la Energía Interna de deformación de una viga, considerando únicamente la debida a la flexión (Ref. 2). Esta es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI [d^2y/dx^2]^2 dx \quad (6)$$

$$\text{ó } U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (Y'')^2 dx \quad (6a)$$

Es posible, según la ecuación (1), expresar la deformada de una viga mediante las funciones de forma, así:

$$Y(x) = \sum_j \Psi_j(x) q_j \quad (7)$$



De donde:

$$Y''(x) = \sum_j \Psi_j''(x) q_j \quad (8)$$

$$y \quad [Y''(x)]^2 = \left[ \sum_j \Psi_j''(x) q_j \right]^2 \quad (9)$$

Siendo

$$Y''(x) = (d^2y) / (dx^2)$$

La que puede ponerse:

$$[Y''(x)]^2 = \sum_j [\Psi_j(x)]^2 q_j^2 + \sum_{ij(i \neq j)} 2\Psi_i''(x) \Psi_j''(x) q_i q_j \quad (10)$$

Entonces la expresión para la Energía quedará:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \sum_j (\Psi_j''(x))^2 q_j^2 + 2 \sum_{ij(i \neq j)} \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) q_i q_j \right] dx \quad (11)$$

Según el Teorema de Castigliano (Ref 3)

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (12)$$

Siendo  $Q_i$  = fuerza generalizada correspondiente al desplazamiento  $q_i$   
Así mismo, y por la definición de rigidez (Ref. 3)

$$Q_i = \sum_j k_{ij} q_j \quad (13)$$

Entonces derivando la (11) respecto a  $q_i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( 2 \sum_j \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) q_j \right) dx \\ &= \int_0^L EI \sum_j \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) q_j dx \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que  $q_i \neq q_j$  y que además son independientes, pues el sistema de coordenadas es no restringido. (Ref. 3).

Finalmente:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \int_0^L EI \sum_j \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) q_j dx = \sum_j k_{ij} q_j$$



se concluye pues que

$$K_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (14)$$

En el anexo I se deducen a partir de esta expresión todos los términos de la matriz de rigidez para la viga ilustrada en la figura 1. Cuando  $EI_x = f(x)$  la deducción es análoga.

#### IV. DEDUCCION DE LA MATRIZ DE MASA GENERALIZADA

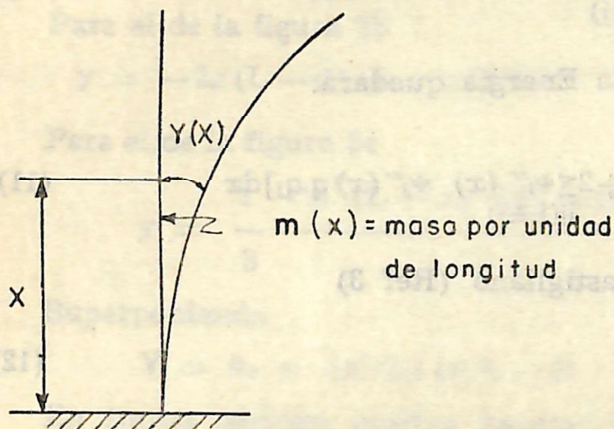


FIG 6

Se trata de obtener una expresión para la energía cinética, para un elemento estructural como el de la figura 6, en términos de las funciones de forma; se hará la deducción para un sistema de coordenadas generalizadas (sin restricciones). La deducción para el caso de coordenadas restringidas es análoga, y sólo es preciso tener en cuenta, la relación que existe entre los dos sistemas para obtener la expresión de la energía en uno u otro sistema de coordenadas (Ref. 3).

Según (1)  $Y(x) = \sum_j \psi_j q_j$

En donde  $\psi_j =$  función de forma

$q_j =$  coordenada generalizada

Derivando respecto al tiempo

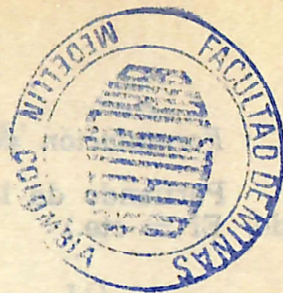
$$\dot{Y}(x) = \sum \psi_j \dot{q}_j \quad (15)$$

$$y [\dot{Y}(x)]^2 = \sum_k \psi_k \dot{q}_k \sum_L \psi_L \dot{q}_L \quad (16)$$

Entonces la energía cinética será: [Suponiendo que  $m = m(x)$ ]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{Y}(x)]^2 dx$$





$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left( \sum_k \sum_L \Psi_k \Psi_L \dot{q}_k \dot{q}_L \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_L \dot{q}_k \dot{q}_L \int_0^L m(x) \Psi_k(x) \Psi_L(x) dx$$

$$\text{Llamando } m_{kL} = \int_0^L m(x) \Psi_k(x) \Psi_L(x) dx \quad (19)$$

$$\text{Queda } T = \frac{1}{2} \sum_k \sum_L m_{kL} \dot{q}_k \dot{q}_L$$

esta expresión puede ponerse así:

$$T = \frac{1}{2} [p]^T [m_{kL}] [\dot{q}] \quad (20)$$

Siendo  $[m_{kL}] =$  Matriz de masa generalizada

$[\dot{q}] =$  vector de velocidades

$[\dot{q}]^T =$  transpuesta del vector de velocidades.

En el anexo II se deduce la matriz de masa generalizada partiendo de la expresión (19)

## V. CONCLUSIONES

Mediante la utilización de las funciones de forma, se obtiene una formulación alterna de algunos de los métodos utilizados en el análisis de estructuras. Su mayor aplicación está en el análisis dinámico de estructuras. (Refs. 3 y 4).

## VI. REFERENCIAS

1. Basic Equations of Engineering Science. Por W. F. Hughes y E. W. Gaylord
2. Applied Elasticity. Por Chi - Teh - Wang.
3. Dynamics of Structures por W. C. Hurty y M. F. Rubinstein.
4. Dynamics of Structures por R. W. Clough y J. Penzien.



## ANEXO I.

*Formulación de la Matriz de rigidez utilizando funciones de forma.*

Partiendo de la ecuación (14) se tendrá sucesivamente: (Suponiendo  $EI = \text{cte.}$ )

$$K_{11} = \int_0^L EI \psi_1''(x) \psi_1''(x) dx$$

Reemplazando la ecuación (2)

$$K_{11} = \frac{36 EI}{L^4} \int_0^L (1 - 2x/L)^2 dx = 12 EI/L^3$$

$$K_{22} = \int_0^L EI \psi_2''(x) \psi_2''(x) dx$$

Reemplazando la ecuación (3)

$$K_{22} = \frac{36 EI}{L^4} \int_0^L (1 - 2x/L)^2 dx = (12EI)/L^3$$

$$K_{33} = \int_0^L EI \psi_3''(x) \psi_3''(x) dx$$

Reemplazando la ecuación (4)

$$K_{33} = \frac{4EI}{L^2} \int_0^L [4 - (12x)/L + (9x^2)/L^2] dx = (4EI)/L$$

y siguiendo así:

$$K_{44} = \frac{4EI}{L^2} \int_0^L [(9x^2)/L^2 - (6x)/L + 1] dx = (4EI)/L$$

$$K_{12} = - \frac{36EI}{L^4} \int_0^L (1 - 4x/L + 4x^2/L^2) dx = - 12EI/L^3$$



$$K_{13} = \frac{12EI}{L^3} \int_0^L (2 - 7x/L + 6x^2/L^2) dx = 6EI/L^2$$

$$K_{14} = \frac{12EI}{L^5} \int_0^L (6x^2 - 5xL + L^2) dx = 6EI/L^2$$

$$K_{23} = \frac{12EI}{L^5} \int_0^L (7Lx - 2L^2 - 6x^2) dx = -6EI/L^2$$

$$K_{24} = \frac{12EI}{L^5} \int_0^L (5Lx - L^2 - 6x^2) dx = -6EI/L^2$$

$$K_{24} = \frac{36EI}{L^4} \int_0^L (x^2 - Lx + 2L^2/9) dx = 2EI/L$$

Quedando por último

$$(K) = \frac{2EI}{L^3} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{vmatrix}$$

## ANEXO II

Obtención de la matriz de masa utilizando funciones de forma.

Partiendo de la ecuación (19) se tendrá sucesivamente (Suponiendo  $m(x) = \text{cte.}$ )

$$m_{11} = \int_0^L m \psi_1^2(x) dx$$

Reemplazando la (2)

$$m_{11} = m \int_0^L (1 - 6x^2/L^2 + 4x^3/L^3 + 9x^4/L^4 - 12x^5/L^5 + 4x^6/L^6) dx$$



$$= \frac{156}{420} mL$$

$$m_{22} = m \int_0^L \Psi_2^2(x) dx$$

Reemplazando la (3)

$$m_{22} = m \int_0^L (9x^4/L^4 - 12x^5/L^5 + 4x^6/L^6) dx$$

$$= \frac{156}{420} mL$$

y así sucesivamente se obtiene

$$m_{33} = \int_0^L m(x) \Psi_3^2(x) dx$$

$$= m \int_0^L (x^2 - 4x^3/L + 6x^4/L^2 - 4x^5/L^3 + x^6/L^4) dx = 4mL^3/420$$

$$m_{44} = m \int_0^L \Psi_4^2(x) dx$$

$$= m \int_0^L (x^6/L^4 - 2x^5/L^3 + x^4/L^2) dx = 4mL^3/420$$

$$m_{12} = m \int_0^L \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx$$

$$= m \int_0^L (-4x^6/L^6 + 12x^5/L^5 - 9x^4/L^4 - 2x^3/L^3 + 3x^2/L^2) dx$$

$$= \frac{54}{420} mL$$



$$\begin{aligned}
m_{12} &= m \int_0^L \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx \\
&= m \int_0^L [(2x^6)/L^5 - (7x^5)/L^4 + (8x^4)/L^3 - (2x^3)/L^2 \\
&\quad - (2x^2)/L + x] dx = \frac{22mL^2}{420}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{14} &= m \int_0^L \Psi_1(x) \Psi_4(x) dx \\
&= m \int_0^L [(2x^6)/L^5 - (5x^5)/L^4 + (3x^4)/L^3 + (x^3)/L^2 - (x^2)/L] dx \\
&= -\frac{13mL^2}{420}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{23} &= m \int_0^L \Psi_2(x) \Psi_3(x) dx \\
&= m \int_0^L [-(2x^6)/L^5 + (7x^5)/L^4 - (8x^4)/L^3 + (3x^3)/L^2] dx \\
&= \frac{13mL^2}{420}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{24} &= m \int_0^L \Psi_2(x) \Psi_4(x) dx \\
&= m \int_0^L [-(2x^6)/L^5 + (5x^5)/L^4 - (3x^4)/L^3] dx \\
&= -\frac{22mL^2}{420}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 m_{34} &= m \int_0^L \Psi_3(x) \Psi_4(x) dx \\
 &= m \int_0^L [(x^6)/L^4 - (3x^5)/L^3 + (3x^4)/L^2 - (x^3)/L] dx \\
 &= -\frac{3mL^3}{420}
 \end{aligned}$$

Al final se tendrá que la matriz de masa es:

$$|m| = \frac{mL}{420} \begin{vmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{vmatrix}$$

### ANEXO III

Variación de las funciones de forma sobre la longitud de la viga

x	$\Psi_2$	$\Psi_1$	$\Psi_3$	$\Psi_4$
0.1 L	0.028	0.972	0.081 L	-0.009 L
0.2 L	0.104	0.896	0.128 L	-0.032 L
0.3 L	0.216	0.784	0.147 L	-0.063 L
0.4 L	0.352	0.648	0.144 L	-0.096 L
0.5 L	0.500	0.500	0.125 L	-0.125 L
0.6 L	0.648	0.352	0.096 L	-0.144 L
0.7 L	0.784	0.216	0.063 L	-0.147 L
0.8 L	0.896	0.104	0.032 L	-0.128 L
0.9 L	0.972	0.028	0.009 L	-0.081 L
L	1	0	0	0