Sección de Matemáticas

54/a

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES

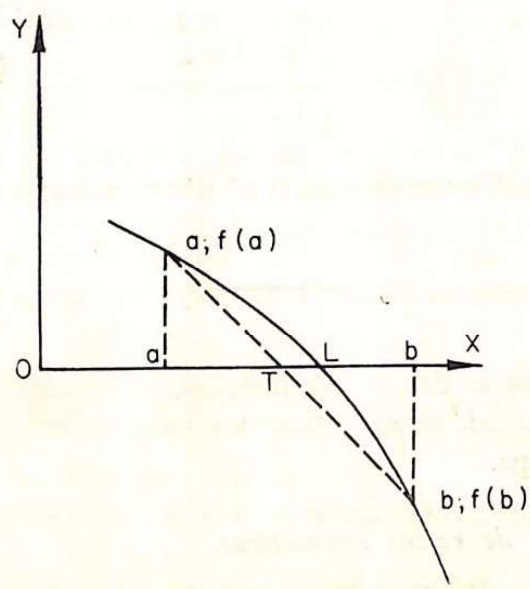
Dr. Luis de Greiff Bravo
Decano de la Facultad

Método de falsa posición (Regula falsis)

Este método utiliza la interpolación lineal.

Sea una función f (x) algébrica o trascendente que suponemos ser uniforme y continua en un intervalo (A ; B) en el cual encajaremos intervalos cada vez menores (a_1 ; b_1), (a_2 ; b_2), ..., en general (a ; b).

Si, calculada la función para a y para b se obtienen valores de signo contrario, entonces la función f (x) tendrá un número impar de *ceros* en el intervalo (a ; b); en lenguaje tradicional, la ecuación $f(x) = 0$ tendrá un número impar de raíces, representadas geométricamente por los interceptos que la gráfica o curva representativa de la función, determina sobre el eje de las x.



En la figura adjunta hemos indicado una raíz única (abscisa de L). f(a) tiene signo positivo; f(b), signo negativo.

Estrechando suficientemente el intervalo (a ;b), y además, por análisis de la marcha de la primera derivada $f'(x)$ y el signo que la derivada segunda $f''(x)$ posee en el intervalo, es fácil reducirse siempre al caso en que se tiene una sóla raíz en el segmento (a ; b).

El método de aproximaciones sucesivas conocido con el nombre de *Regula Falsis,* consiste en sustituír la curva f(x) entre los puntos de abscisas a, b, por el segmento de recta —cuerda— que une los puntos [a; f(a)] y [b; f(b)]. Así la función f(x) queda reemplazada en el intervalo por una función lineal. El intercepto (cero) de la curva indicado por L queda sustituído por el intercepto de la cuerda (T).

La ecuación de la recta que une los dos puntos es, según la Geometría Analítica,

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \tag{1}$$

De donde, llamando x_1 la abscisa de la traza T, se tiene,

$$- f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x_1 - a) \tag{2}$$

Para simplificar, escribiremos,

$$x_1 - a = h \; ; \qquad b - a = k \tag{3}$$

con lo cual se deduce de la (2),

$$h = \frac{k \;\; f(a)}{f(b) - f(a)} \tag{4}$$

fórmula en la cual los valores de f(x) deben tomarse con su signo propio.

Los ejemplos que se dan a continuación, trabajados con máquina calculadora de tipo comercial, serán suficientes para la correcta asimilación del método que nos ocupa.

1) *Extracción de raíces aritméticas.*

Se debe calcular con siete cifras decimales exactas, la raíz cúbica de 10.

Se escribe con tal fin

$$f(x) = x^3 - 10$$

debemos hallar el cero de esta función (la raíz real de la ecuación $x^3 - 10 = 0$).

Para $a = 2$; $b = 2{,}2$ se obtiene,

$f(2) = -2$; $f(2{,}2) = 0.648$

y aplicando (4),

$$h = 0.15 \ ; \ a_1 = a + h = 2.15 \ ; \ b_1 = 2.16$$

Para el nuevo intervalo se tiene,

$$f(2.15) = -0.006162$$

$$f(2.16) = 0.007770 \text{ , de donde}$$

(fórmula 4)

$$h_1 = 0.004422$$

Los nuevos valores de ensayo son,

$$a_2 = 2.154 \ ; \ b_2 = 2.155$$

para los cuales se tiene,

$$f(a_2) = -0.006052 \ ; \ f(b_2) = 0.007874$$

$$h_2 = 0.0004347 \ ; \ x_3 = 2.1544347$$

2) Como segundo ejemplo se determina en seguida una raíz real de la ecuación cúbica,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 16x - 117 = 0$$

Por substitución directa se obtiene,

$$f(4) = -37 \ ; \quad f(5) = 13$$

Se advierte la presencia de una raíz en el intervalo [4;5]. Una sóla, porque la derivada,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 16$$

mantiene signo constante (positivo) en dicho intervalo.

Teniendo en consecuencia $a = 4$; $b = 5$, se tiene como primera corrección a la raíz $x_0 = 4$:

$$h = 0.74$$

Ahora utilizando la división sintética calcularemos los valores correspondientes a,

$$a_1 = 4.7 \ ; \ b_1 = 4.8$$

Se obtiene,

$$f(4.7) = -4.247 \;;\; f(4.8) = 1.272$$

con lo cual la nueva corrección es,

$$h_1 = 0.077$$

de donde se tiene como nueva valoración de la raíz,

$$x_1 = 4.777$$

Eligiendo ahora como nuevo intervalo

$$a_2 = 4.77 \;;\; b_2 = 4.78$$

podrá obtenerse la nueva corrección y con esto un valor más valedero de la raíz:

$$f(a_2) = -0.4074 \;; \qquad f(b_2) = 0.1502$$

$$h_2 = 0.0073 \;; \qquad x_2 = 4.7773$$

---

3) Nos ocupamos ahora en la resolución de una ecuación trascendente. Se trata de determinar el primer cero positivo de la función.

$$f(x) = \cos h\, x - 2 \operatorname{sen} x$$

Con ayuda de las tablas obtenemos,

x	f(x)
0.6	0.05618
0.7	−0.03327

$$h = \frac{0.1 \times 0.5618}{0.8945} = 0.062$$

Tomando ahora $a_1 = 0.64$; $b_1 = 0.68$ se obtiene de la Tabla,

$$f(0.64) = 0.01750 \;;\; f(0.68) = -0.01733$$

de donde,

$$h_1 = 0.0201; \qquad x_1 = \mathbf{0.6601}$$

Para este valor resulta, $f(x_1) = -\mathbf{0.00041}$

Así podrá continuarse en la determinación de nuevas cifras decimales para la raíz.

Para el cálculo de esta función trascendente fueron utilizadas las siguientes tablas: "Table of circular and hyperbolic Sines and Cosines for Radian Arguments" (Mathematical Table MT3) — editadas por el "National Bureau of Standards" de los Estados Unidos de América.

Noticia histórica.—Aunque desconocemos el origen histórico de este método y la extensión con que los matemáticos de los siglos XVII y XVIII hicieron empleo del mismo, conviene destacar como redescubridor y expositor apasionado del mismo, a Dn. José Mariano Vallejo, matemático y pedagogo español del siglo pasado (1799-1846).

Entre sus obras citaremos el "Compendio de Matemáticas" cuya edición de 1847, publicada por la "Vda. de Ch. Bouret", ejerció considerable influencia en los medios colegiales colombianos durante la pasada centuria.

Cabe anotar la simplificación que traen al método, 1º) el uso de gráficas cartesianas que le hacen intuitivo, y 2º) el empleo de máquinas de calcular.

La resolución numérica de ecuaciones se ha convertido así, como el mismo Vallejo lo anotara, en una cuestión sencillísima que se reduce a obtener cuartas proporcionales.

△ ⊙ △