555

Sección de Matemáticas

N. de la R. — El trabajo que publicamos a continuación, reproduciéndole del Nº 41 de la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, bien puede ser considerado como un complemento al artículo, "Teoría de Matrices (Exposición elemental)", debido al mismo autor y publicado en el Nº 73 de la Revista "Dyna".

INVERSION DE MATRICES

por

Luis de Greiff Bravo
Decano de la Facultad

El siguiente estudio se inicia con una breve demostración de un principio conocido, en el cual se ha basado uno de los métodos utilizados para efectuar la inversión de matrices.

Introduciendo el concepto de "anti-matriz" como producto diádico de un vector columnar por un vector línea, el autor presenta un procedimiento que conduce, mediante cómputos de fácil ejecución, a la matriz inversa de una matriz dada.

Uno de los procedimientos utilizados para la obtención de la matriz inversa de una matriz dada, A, consiste en multiplicar esta sucesivamente, por matrices E_1, E_2, . . ., E_k que le reduzcan a la matriz idéntica, I. Si se efectúan las mismas operaciones sobre la matriz I, se tendrá, como resultado, la matriz inversa de A, a saber, A^{-1}.

Demostración. — La hipótesis equivale en símbolos a la siguiente relación,

(1) $$E_k \ldots E_2 E_1 A = I$$

Si se multiplica la matriz I por las E_i, en el mismo orden que se ha seguido en (1), se tiene,

(2) $$E_k \ldots E_2 E_1 I = X$$

Vamos a demostrar que se cumple la relación,

(3) $$X = A^{-1}$$

Con tal fin, multiplicamos los dos lados de (1), a la derecha, por A^{-1}, para tener,

$$E_k \ldots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} \tag{4}$$

El primer lado, en virtud de la ley asociativa, vale,

$$E_k \ldots E_2 E_1 (A A^{-1}) = E_k \ldots E_2 E_1 I \tag{5}$$

Por otra parte, el segundo lado de la misma (4) vale A^{-1}. En consecuencia,

$$E_k \ldots E_2 E_1 I = A^{-1} \tag{6}$$

como se quería demostrar.

El procedimiento de inversión a que dan base las relaciones (1) y (6), consiste en ir formando, paso a paso, la siguiente correspondencia, en la cual el primer par es dado,

$$\begin{array}{ccccccc} A; & E_1 A; & E_2 E_1 A; & \ldots & I \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ I; & E_1 I; & E_2 E_1 I; & \ldots & A^{-1} \end{array} \tag{7}$$

En la primera línea se tienen las matrices provenientes de A. En la segunda línea se tienen las matrices provenientes de I. En el trabajo numérico cada matriz y su correspondiente se hacen constar en una misma página.

En el análisis que se presenta en seguida, utilizaremos matrices de orden 4, lo que en nada disminuye la generalidad. Sea lo primero definir las matrices E_1, E_2, ... Estas matrices son *operadores* (operadores matriciales) cuya finalidad es ir transformando la matriz dada en la matriz idéntica, y, correlativamente, la matriz idéntica, I, en la matriz inversa.

Distinguiremos los operadores que reducen a 1 los términos de la diagonal principal. Son de la forma,

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ etc.} \tag{8}$$

o sea, son matrices que se deducen de la matriz idéntica, mediante división de uno solo de los términos (la unidad) de la diagonal principal, por el número que figura en posición homóloga en la matriz que se ha de transformar. Así, como primera operación se tendrá,

$$(9)\quad \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & a_{14}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

con resultados análogos para los otros casos. En la práctica la operación se reduce a efectuar la multiplicación de la horizontal i por el factor $1/a_{ii}$. El mismo factor opera sobre las matrices provenientes de I.

Otros operadores matriciales tienen por objeto producir *ceros* en cada una de las columnas de la matriz proveniente de A, a excepción del término correspondiente a la diagonal principal que, por la operación precedente se supone haber sido reducido a la unidad.

Para aclarar la explicación anterior, supongamos tener la matriz,

$$(10)\qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b'_{31} & b'_{32} & 1 & b'_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Queremos lograr ceros, en la tercera columna de esta matriz. Con tal fin consideramos la siguiente:

$$(11)\qquad E_{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 1 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se descompone así,

$$(12)\qquad E_{-3} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

teniéndose,

$$E_{-3} \times B = I\,B + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 0 \end{bmatrix} \times B$$

$$= B + \begin{bmatrix} -b_{13} \\ -b_{23} \\ 0 \\ -b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31}\,; & b_{32}\,; & 1\,; & b_{34} \end{bmatrix}$$

El segundo término —producto diádico— es la *antimatriz* o *anulante* correspondiente a la columna Nº 3. Adicionándole a B se obtiene el resultado que se busca. El operador es ahora el vector-columnar el cual se aplica correlativamente a la línea correspondiente —tercera en este caso—, de la matriz proveniente de A y la matriz proveniente de I.

Como complemento de lo anterior se presenta en seguida un ejemplo numérico. Para eliminar posibles errores de cómputo, se ha introducido una columna, bajo la designación "k", la cual fue utilizada por Gauss en la solución de sistemas lineales por eliminación. Los números escritos bajo "k" son los *opuestos* de la suma algébrica de todos los elementos que constituyen la horizontal correspondiente en la matriz. La comprobación permanente de las operaciones consiste en sumar las horizontales a medida que aparecen, para constatar que tales sumas son iguales a cero

$$A = \left[\begin{array}{rrrr} 2.5700 & -1.4900 & 3.1400 & 0 \\ 1.7500 & -3.1800 & -2.5000 & 1.8700 \\ -2.2900 & -2.8000 & 3.0800 & 2.4800 \\ 0 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] \begin{array}{rl} \multicolumn{1}{c}{k} & \\ -4.2200 & \longrightarrow \\ -4.3000 & \\ -0.4700 & \\ -6.5400 & \end{array}$$

$$I = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{rl} -1 & \longrightarrow \\ -1 & \\ -1 & \\ -1 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1.0000 & -0.5798 & 1.2218 & 0.0000 \\ 1.7500 & 3.1800 & -2.5000 & 1.8700 \\ -2.2900 & -2.8000 & 3.0800 & 2.4800 \\ 0.0000 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] \begin{array}{rl} -1.6420 & \longleftarrow \\ -4.3000 & \\ -0.4700 & \\ -6.5400 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0.3891 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{rl} -0.3891 & \longleftarrow \\ -1.0000 & \\ -1.0000 & \\ -1.0000 & \end{array}$$

Obs. Las flechas indican las horizontales que han sido afectadas por la primera operación. En la práctica basta sobreponer las nuevas líneas, a las primeras matrices, suprimiendo así repeticiones inútiles, que no obstante hemos hecho constar aquí para mayor claridad.

Se ha reiniciado el ciclo de operaciones. A saber: reducción a la unidad del elemento diagonal y formación de las Antimatrices correspondientes a la segunda columna.

$$\begin{array}{cc} & k \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.5807 & 0.2585 \\ 0 & 1 & -1.1057 & 0.4458 \\ 0 & 0 & 1.3139 & 4.3201 \\ 0 & 0 & 3.9259 & 2.0801 \end{array}\right] & \begin{array}{|c} -1.8392 \\ -0.3401 \\ -5.6340 \\ -6.0060 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0.2950 & 0.1382 & 0 & 0 \\ -0.1623 & 0.2384 & 0 & 0 \\ 0.2211 & 0.9840 & 1 & 0 \\ 0.2548 & -0.3743 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{|c} -0.4332 \\ -0.0761 \\ -2.2051 \\ -0.8805 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0.5807 & 0.2585 \\ 0 & 1 & -1.1057 & 0.4458 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 3.9259 & 2.0801 \end{array}\right] \begin{array}{|c} -1.8392 \\ -0.3401 \\ -4.2880 \\ -6.0060 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0.2950 & 0.1382 & 0 & 0 \\ -0.1623 & 0.2384 & 0 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ 0.2548 & -0.3743 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{|c} -0.4332 \\ -0.0761 \\ -1.6783 \\ -0.8805 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & k \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -0.5807 & -1.9093 \\ 0 & 0 & 1.1057 & 3.6355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.9259 & -12.9084 \end{array}\right] & \begin{array}{|c} 2.4900 \\ -4.7412 \\ 0 \\ 16.8343 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -0.0977 & -0.4349 & -0.4420 & 0 \\ 0.1861 & 0.8281 & 0.8415 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6607 & -2.9401 & -2.9880 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{|c} 0.9746 \\ -1.8557 \\ 0 \\ 6.5888 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1.6508 \\ 0 & 1 & 0 & 4.0813 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & -10.8283 \end{array}\right] \begin{array}{|c} -0.6508 \\ -5.0813 \\ -4.2880 \\ 10.8283 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0.1973 & -0.2967 & -0.4420 & 0 \\ 0.0238 & 1.0665 & 0.8415 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ -0.4059 & -3.3144 & -2.9880 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{|c} 0.5414 \\ -1.9318 \\ -1.6783 \\ -5.7083 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & k \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.6508 \\ 0 & 1 & 0 & 4.0813 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -0.6508 \\ -5.0813 \\ -4.2880 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.1973 & -0.2967 & -0.4420 & 0 \\ 0.0238 & 1.0665 & 0.8415 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ 0.0375 & 0.3061 & 0.2759 & -0.0923 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 0.5414 \\ -1.9318 \\ -1.6783 \\ -0.5272 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.6508 \\ 0 & 0 & 0 & -4.0813 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -1.6508 \\ 4.0813 \\ 3.2880 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.0619 & 0.5053 & 0.4555 & -0.1524 \\ -0.1530 & -1.2493 & -1.1260 & 0.3767 \\ -0.1233 & -1.0065 & -0.9072 & 0.3035 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -0.8703 \\ 2.1517 \\ 1.7334 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & k \\ I = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A^{-1} = & \begin{bmatrix} 0.2592 & 0.2086 & 0.0135 & -0.1524 \\ -0.1292 & -0.1828 & -0.2845 & 0.3767 \\ 0.0450 & -0.2576 & -0.1461 & 0.3035 \\ 0.0375 & 0.3061 & 0.2759 & -0.0923 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -0.3289 \\ 0.2199 \\ 0.0551 \\ -0.5272 \end{array} \end{array}$$