556

LOS TRES PROBLEMAS CLASICOS

La Cuadratura del Circulo
La Duplicacion del Cubo y
La Triseccion del Angulo

Sr. Iván Obregón S.
Alumno de 6º Año de Ingeniería Civil

Introduccion

Hay en la historia de las Matemáticas más de un ejemplo de cuestiones que han desafiado el ingenio de los estudiosos durante siglos sin dar con su solución. Algunas de estas —como el famoso "último teorema de Fermat"— todavía en nuestros días esperan la solución.

Sinembargo tal vez ningunas tan famosas como los tres problemas geométricos propuestos por los griegos desde el siglo V A. C., cuya resolución (o mejor la demostración de su imposibilidad) hubo de esperar casi 23 siglos: *La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo* y *la trisección del ángulo.*

Ya desde el instante en que fueron propuestos, los geómetras griegos idearon construcciones ingeniosísimas para resolverlos, pero ninguna que llenara la condición exigida a saber: una construcción con *regla* y *compás.* Esta condición implica que las infinitas líneas que es posible imaginar sólo dos podrán emplearse en las construcciones: la línea recta y la circunferencia. Tal condición parece un poco arbitraria, ya que en esencia el círculo es sólo una de las secciones cónicas, y por lo tanto tan legítimo debiera ser su uso como, al menos, el de cualquiera otra cónica (parábola o hipérbola por ejemplo) con las cuales, como veremos, sí son resolubles dos de los anteriores problemas.

Fué Wantzel en 1837 quien demostró que "la condición necesaria y suficiente para que una construcción geométrica pueda realizarse con regla y compás es que la incógnita expresada analíticamente se deduzca de los datos mediante operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división) y un número finito de raíces *cuadradas*".

En general cumplen esta condición las raíces de ecuaciones de primero o segundo grado.

Para saber si una construcción es posible con regla y compás bastará entonces plantear la ecuación algebraica que la resuelve y ver si la incógnita puede expresarse por operaciones racionales y raíces cuadradas a partir de los coeficientes y si éstos a su vez se obtienen de la misma manera a partir de los datos del problema.

Expresamos en forma analítica y con la notación moderna (desde luego desconocida para los griegos) los tres problemas clásicos:

El problema de la cuadratura del círculo puede enunciarse: "dado el radio a de un círculo hallar al lado del cuadrado equivalente".

Se reduce a la ecuación:

$$x^2 = \pi a^2 \tag{1}$$

El problema de la duplicación del cubo, que se enuncia: "dado un cubo de lado a hallar el lado de otro cubo de doble volumen", da lugar a la ecuación:

$$x^2 = 2a^3 \tag{2}$$

En cuanto a la trisección o división de un ángulo en tres partes iguales, si llamamos α el ángulo a trisecar y $a = \operatorname{tg} \alpha$; $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$ se tendrá:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0 \tag{3}$$

(La tangente puede construírse fácilmente a partir del ángulo dado y recíprocamente).

Inmediatamente se ve que las ecuaciones de tercer grado (2) y (3) que implican en general el uso de raíces cúbicas son imposibles de resolver con regla y compás.

En cuanto a la ecuación (1), por ser de segundo grado, ella sería resoluble siempre que el coeficiente π pudiera expresarse por medio de operaciones racionales y raíces cuadradas, con lo cual el problema se transforma en la construcción **de** π.

La imposibilidad de esta construcción sólo fue puesta en evidencia 45 años más tarde (en 1887) al demostrar Lindemann la *trascendencia* de π (número trascendente es aquel que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales), con lo cual quedó dicha la última palabra sobre estos problemas, quedando así satisfecha la curiosidad de todos los matemáticos que se habían ocupado de la cuestión.

No deja de ser interesante observar la constancia admirable de estos hombres en la búsqueda de la solución de un problema que desde el punto de vista práctico carece de interés (se pueden dar soluciones suficientemente aproximadas para cualquier objetivo práctico), en contraposición con la actitud de quienes condenan como inútil toda especulación matemática.

En el presente trabajo he intentado presentar los orígenes históricos de estos problemas, junto con una recopilación de las diversas soluciones dadas a ellos en diversas épocas.

LA CUADRATURA DEL CIRCULO

El problema nació probablemente de la necesidad de calcular el área de un círculo. Obsérvese que lograda la cuadratura queda lograda también la rectificación de la circunferencia —y viceversa— ya que el área puede siempre construírse como un rectángulo cuyos lados sean el radio y la semi-circunferencia.

El primero en ocuparse de la cuestión parece haber sido el filósofo Anaxágoras. Poteriormente Hipócrates de Chios trató en vano de hallar la solución. Parece probable que Hipócrates creyera el problema muy factible en vista de que halló otras figuras curvilíneas estas sí de área conmensurable y por tanto cuadrables con regla y compás. Tales son las célebres *lúnulas de Hipócrates.*

Las primeras son bastante conocidas: las lúnulas determinadas por los tres semi-círculos construídos sobre los lados de un triángulo rectángulo equivalen al triángulo mismo. El caso más sencillo se obtiene cuando el triángulo es isóceles pues entonces cada lúnula equivale al triángulo isóceles mitad del original.

Una segunda lúnula cuadrable la obtiene Hipócrates así (Fig. 1):

En el trapecio ABCD:

$$AB = BC = CD = a \ ; \ AD = a\sqrt{3}$$

sobre AD construye un arco semejante a AB , BC etc.

$$\frac{\text{área ABN}}{\text{área ADM}} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{1}{3}$$

lúnula ABCDMA = trapecio ABCD

En forma semejante determina Hipócrates una tercera lúnula cuadrable: Por medio de construcciones que sólo dependen de ecuaciones de 2° grado y por lo tanto posibles con regla y compás, logra constituír un trapecio tal que (Fig. 2):

$$AB = BC = CD \qquad AE = AB\sqrt{\frac{3}{2}}$$

(E : intersección de las diagonales)

trapecio que inscribe en un círculo.

Haciendo pasar otro círculo por los puntos AED, (Fig. 2), se obtiene la lúnula ABCDEA equivalente al pentágono ABCDE.

En efecto los arcos AB, AE son semejantes por corresponder ambos al mismo ángulo 2θ. Por lo tanto los segmentos AB, AE son semejantes

$$\therefore \quad \frac{\text{área segm. AB}}{\text{área segm. AE}} = \frac{AB^2}{AE^2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad 3.\text{área segm. AB} = 2.\text{área segm. AE}$$

y el área del pentágono no variará al restarle dos segmentos iguales a AE y sumarle tres iguales a AB.

SOLUCION POR MEDIO DE LA CUADRATRIZ

La solución por medio de esta curva la obtuvo Dinóstrato; posteriormente Hippias la utilizó para trisectar el ángulo como veremos luego.

La curva se define así (Fig. 3): AB gira con velocidad uniforme hasta llegar a AD, mientras BC se translada en el mismo tiempo hasta coincidir con AD.

El punto de intercesión M genera la curva.

Dinóstrato demostró que el radio AB es media proporcional entre el intercepto AN y la longitud del arco BD, ed. $AB^2 = AN \,.\, BD$.

La demostración era de carácter geométrico y por reducción al absurdo.

Por los métodos modernos podemos comprobarlo hallando la ecuación de la curva:

Igualando los tiempos para una posición cualquiera:

$$t = \frac{a - y}{v} = \frac{tg^{-1} \dfrac{x}{y}}{w}$$

Cuando AB haya girado todo el cuadrante: $T = \dfrac{a}{v} = \dfrac{\pi/2}{w}$

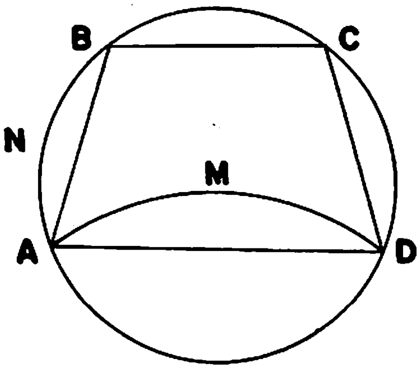


FIG.1

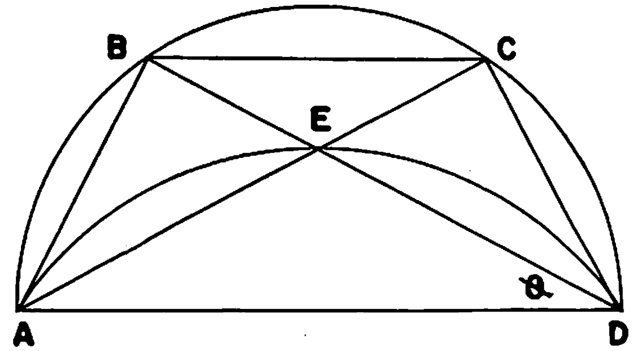


FIG.2

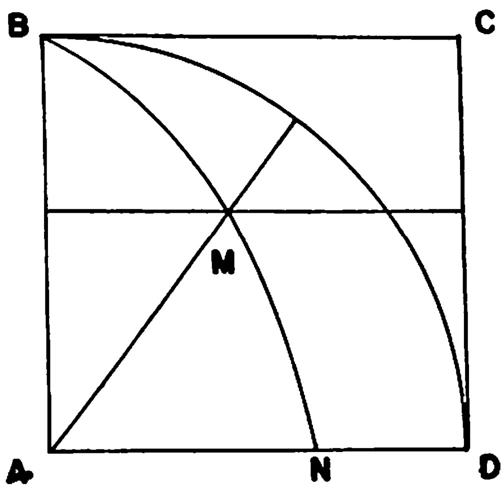


FIG.3

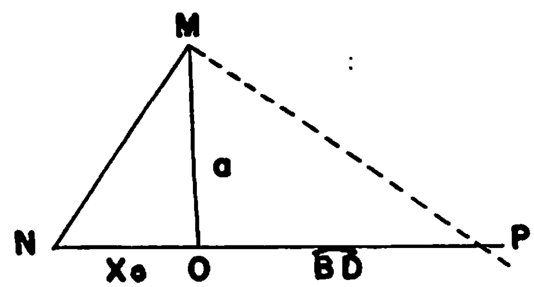


FIG.4

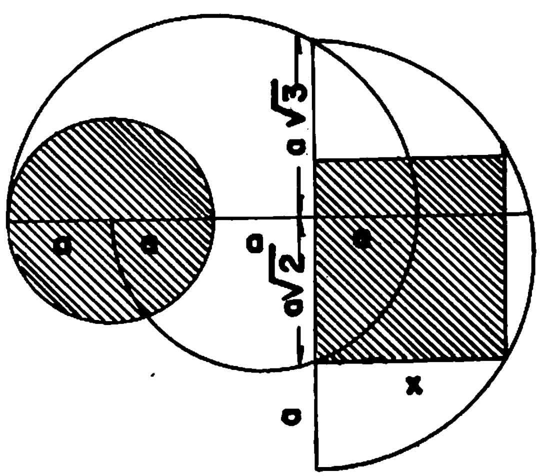


FIG.5

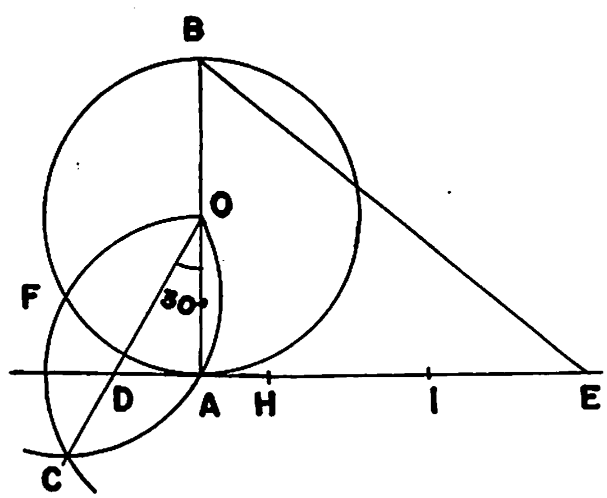


FIG.5A

Dividiendo: $$\frac{a - y}{a} = \frac{tg^{-1}\dfrac{x}{y}}{\dfrac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = tg\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right) = \cot\frac{\pi y}{2a}$$

$$\therefore \quad x = y \cot\frac{\pi y}{2a}$$

Haciendo $y = O$ obtendremos el intercepto $AN = x_o$; éste resulta indeterminada pero la indeterminación puede resolverse fácilmente:

$$x_o = \lim_{y \to o} \frac{y}{tg\,\dfrac{\pi y}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \qquad \text{por tanto: } x_o \,.\, \frac{\pi a}{2} = a^2$$

o $AB^2 = AN \,.\, \text{arco } BD$

Conocido $AN = x_o$ una sencilla construcción permite entonces construír el segmento OP = arco BD (Fig. 4),

(levantando por M una perpendicular a NM).

El triángulo MOP resulta equivalente al cuadrante del círculo de radio a

Soluciones aproximadas

Es interesante consignar aquí la siguiente solución aproximada, basada en que $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (Fig. 5).

Ella implica sólo un error de un 1% —menor que los inevitables errores de dibujo— y por lo tanto esta cuadratura desde el punto de vista práctico, puede considerarse exacta.

Más aproximada aún es la rectificación siguiente —Fig. 5A— debida a Kochansky que tiene la particularidad de utilizar una sola abertura de compás.

$AO = AF = FC = AC = DH = HI = IE = R$

$BE \cong$ media circunferencia

Exactamente se obtiene:

$$BE = R \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3.14154 \quad R$$

LA DUPLICACION DEL CUBO

Existen varias leyendas acerca del origen de este problema: Según una, consultado el oráculo de Apolo residente en Delos, sobre qué debería hacerse para aplacar a los dioses con motivo de una terrible peste que azotaba las ciudades griegas, aquel ordenó construír un ara doble de la existente en el templo. Los habitantes creyeron cumplir el mandato duplicando los lados, más como la peste no cedía, volvieron a consultar al oráculo quien les hizo ver que no habían cumplido lo mandado. El Problema fue entonces propuesto a Platón, quien empezó a buscar la solución.

Otra leyenda narra que mientras se construía el sepulcro de Glauco hijo del rey de Creta Minos, éste al observar que la tumba sólo medía 100 pies por cada lado exclamó: "Es un espacio muy pequeño para un rey; duplicadlo haciéndolo de 200 pies de lado", en lo cual evidentemente se equivocaba ya que al duplicar su lado el cubo se octuplica.

Las soluciones a la cuestión son muy abundantes, más siempre sin cumplir la condición de ser "con regla y compás".

Hipócrates dió el primer paso transformando el problema a la Geometría plana, a saber: Dados dos segmentos a y b construír entre ellos dos medias proporcionales. En efecto si se cumple: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

se tendrá: $x^2 = ay$

$xy = ab$ y multiplicándolas: $x^3 = a^2b$

y haciendo $b = 2a$ (o en general na) : $x^3 = 2a^3$ ($6\ x^3 = na^3$)

Un discípulo de Platón, Arquitas de Tarento, halló la primera solución, bastante ingeniosa, que hace uso de una construcción espacial (Fig. 6):

En un plano P se construye una circunferencia de diámetro $OA = b$ (el mayor de los segmentos) y la cuerda $OB = a$.

Consideremos el cilindro cuya base es dicha circunferencia; el cono engendrado al hacer rotar OB alrededor de OA y el toro resultante de hacer girar un círculo de diámetro OA situado en el plano perpendicular a P alrededor de una normal en O.

Estas tres superficies tienen un punto común M. Las dos medias buscadas son OM y OM′ —su proyección sobre el plano P—.

Demostración:

Por estar M sobre el cilindro, M′ cae en la circunferencia de diámetro OA
" " " " el toro: $OA' = OA = b$
" " " " el cono, el plano trazado por B perpendicular a OA cortará a OM en N tal que $ON = OB = a$. Este mismo plano corta a OM′ en N′ y a la circunferencia en B′ (se sigue que NN′ es perpendicular al plano P).

En la circunferencia BNB′ : $NN' = BN' . N'B$
pero en la circunferencia OBA : $B'N' . N'B = ON' . N'M'$

$\therefore$ $NN' = ON' . N'M'$ y por tanto el ángulo ONM′ es recto.

En los triángulos rectángulos semejantes ONM′ , OMM′ , OMA′ :

$$\frac{ON}{OM'} = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM}{OA'} \quad \therefore \quad \frac{a}{OM'} = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM}{b}$$

Menecmo que conocía las secciones cónicas y sus propiedades (que expresamos hoy por medio de sus coordenadas cartesianas), halló la solución por medio de la intersección de dos parábolas o una parábola y una hipérbola.

En efecto si (Fig. 7): $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

se tendrá: $x^2 = ay$; $y^2 = bx$; $xy = ab$

Dibujadas estas tres curvas, deben tener un punto común cuya abcisa x es la solución buscada.

Muchos años más tarde, en el siglo XVII, Descartes observó que la solución puede también obtenerse mediante una sola de las anteriores curvas y un círculo cuya ecuación resulta de sumar las de las dos parábolas;

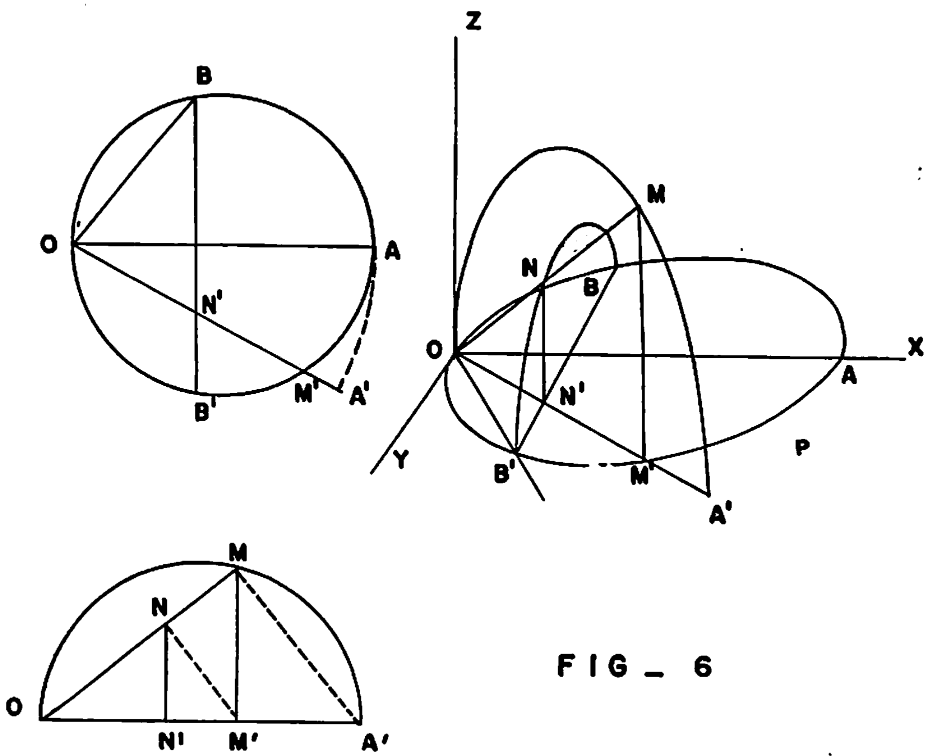
$$x^2 + y^2 = ay + bx$$

La siguiente solución mecánica se atribuye a Platón (Fig. 8):

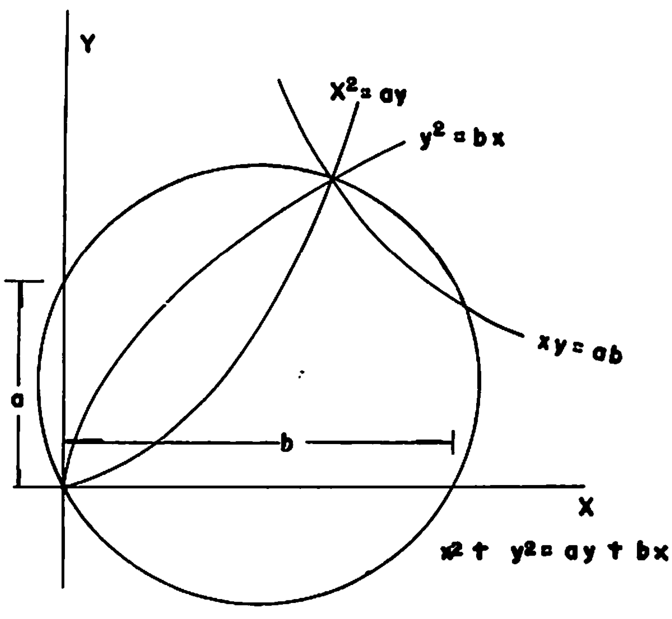
Sobre un ángulo recto colóquense los segmentos a y b y dispónganse dos escuadras como indica la figura.

En los tres triángulos rectángulos semejantes que se forman resulta·

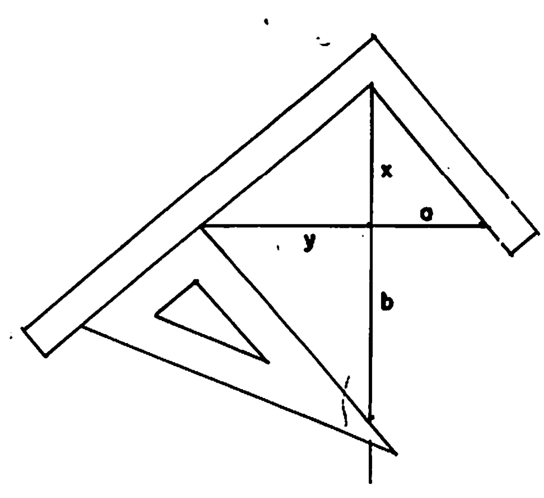
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$



F I G _ 6



F I G _ 7



F I G . 8

Eratóstenes inventó el aparato que Pappus llamó *mesolabio,* y que permite resolver el problema de las dos medias (Fig. 9):

Son tres marcos rectangulares iguales que deslizan, el primero sobre el segundo y éste sobre el tercero.

Disponiendo el aparato de tal manera que los extremos visibles de las diagonales queden en línea recta, se tiene en la doble serie de triángulos semejantes:

$$\frac{a}{h} = \frac{x}{j} = \frac{y}{k} \qquad \frac{x}{h} = \frac{y}{j} = \frac{b}{k}$$

y dividiendo: $$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Solución por medio de una regla graduada

Si se permite el uso de una regla graduada (por ejemplo una escala ordinaria de dibujo) la solución puede obtenerse en la siguiente forma (Fig. 10):

Sea el triángulo rectángulo POA cuya hipotenusa AP y cateto OA, valen respectivamente b/2 y a/2 (siendo a y b los dos segmentos entre los cuales van a insertarse las dos medias proporcionales.

Se toma $AA' = 2a$ y $AR \,/\!/\, A'P$

Haciendo girar la regla alrededor de P, hasta que se observe que el segmento RM, interceptado entre la recta AR y la prolongación de OA sea igual a AP, se obtendrán las dos medias, que serán los segmentos PR y AM.

En efecto: $$\frac{AA'}{PR} = \frac{AM}{RM} \quad \therefore \quad \frac{2a}{x} = \frac{2y}{b} \qquad (1)$$

En los triángulos rectángulos POA y POM :

$$AP^2 - OA^2 = MP^2 - OM^2 \quad \therefore \quad OM^2 - OA^2 = MP^2 - AP^2$$

$$\therefore \quad (OM - OA)\,(OM + OA) = (MP - AP)\,(MP + AP)$$

$$y(y + a) = x(x + b) \qquad \frac{x}{y} = \frac{y + a}{x + b} \qquad (2)$$

La (1) puede escribirse: $$\frac{y + a}{b + x} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

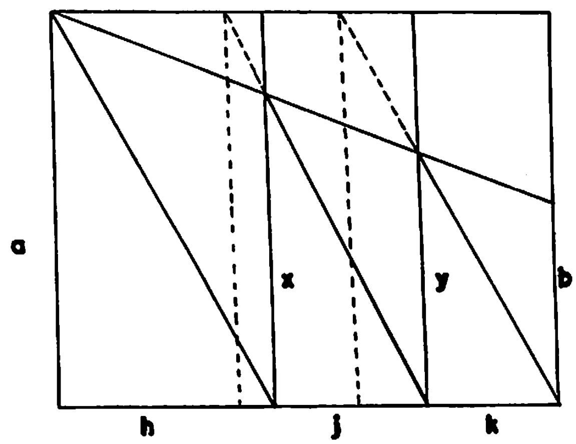


FIG. 9

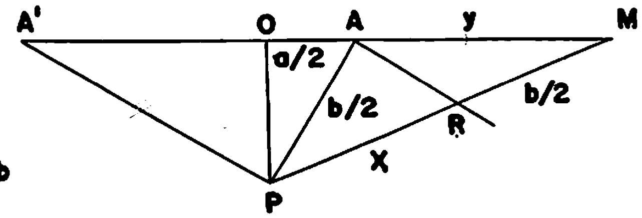


FIG. 10

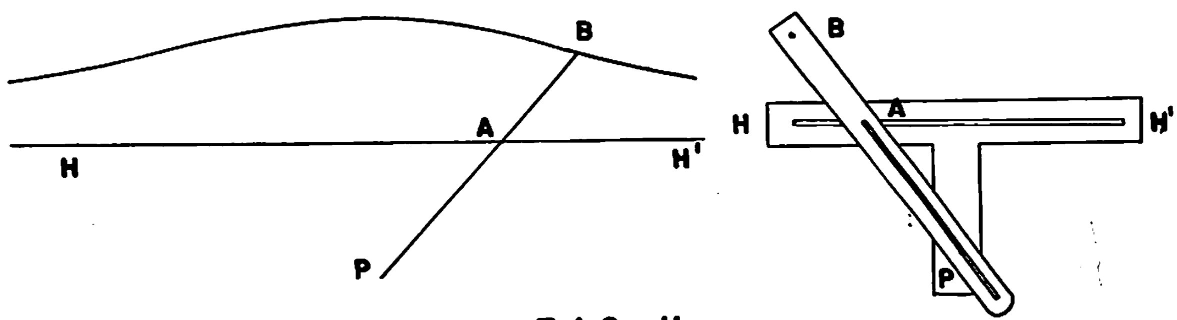


FIG. 11

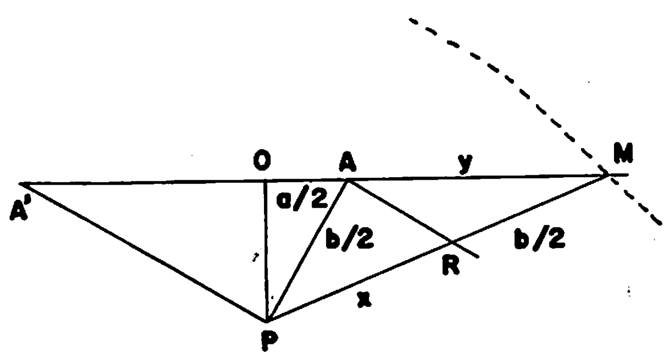


FIG. 10A

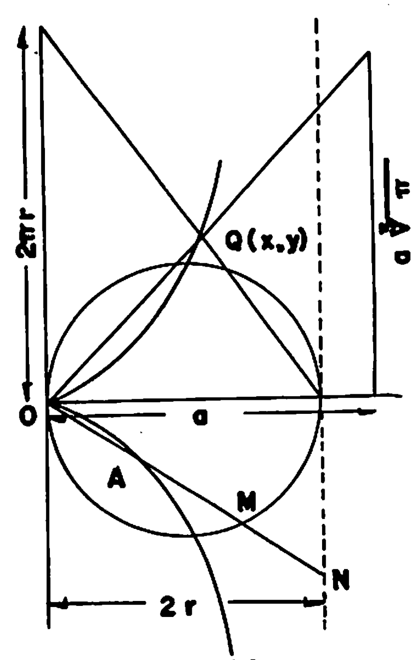


FIG. 12

que combinada con la (2) da: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

Solución por medio de la Concoide de Nicomedes

El geómetra griego Nicomedes resolvió el problema de la duplicación por medio de una curva ideada por él y definida como sigue (Fig. 11):

Dado un punto P (polo) y una recta fija (base) HH′ se traza una recta variable por P y a partir de su intersección con la base se toma un segmento AB de longitud constante. La curva es el lugar geométrico del punto B.

La concoide puede trazarse con un movimiento continuo por medio del aparato mostrado en la figura.

La solución se basa en la misma construcción indicada en la fig. 10. El punto M, (Fig. 10A), se encuentra en la intersección de la recta OA prolongada con la concoide de polo P, base AR y longitud constante $AP = b/2$.

Volveremos a encontrar esta curva más adelante al hablar de la trisección del ángulo. En efecto Viete (1540-1603) demostró que todos los problemas de tercer grado pueden resolverse con ayuda de la concoide.

Solución por medio de la Cisoide de Diocles

Esta curva se define así: dado un círculo de radio r (fig. 12), se traza por el punto O una secante variable ON, y se toma sobre ella a partir de O un segmento $OA = MN$.

La curva es el lugar geométrico del punto A.

Su ecuación puede obtenerse fácilmente en los ejes indicados y es:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

Consideremos el punto de intersección Q de la curva, con la recta que intercepta sobre los ejes distancias 2r y 2nr.

La ecuación de esta recta es: $\frac{x}{2r} + \frac{y}{2nr} = 1$

o sea: $\frac{y}{2nr} = \frac{2r - x}{2r}$

y multiplicando por la ecuación de la cisoide: $y^3 = nx^3$

Para ene-plicar el cubo de lado a bastará entonces construír una cuarta proporcional a X, Y, a (siendo X, Y las coordenadas del punto Q).

Solución aproximada con regla y compás

La construcción indicada en la figura 13 resuelve el problema de la duplicación con una notable aproximación.

Equivale a tomar $\sqrt[3]{2} = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1.2593$

(el valor exacto es 1.2599).

El error cometido es entonces menor de un medio por mil, y muy inferior a los errores de dibujo.

LA TRISECCION DEL ANGULO

El problema de la trisección o división de un ángulo en tres partes iguales, parece haber surgido como complemento de su división en dos, cuatro, ocho... partes (éstas sí posibles con regla y compás), y gozo de gran popularidad entre los griegos simultáneamente con la duplicación del cubo.

Hippias logró la trisección por medio de la misma cuadratriz (Fig. 14):

Por la misma definición de la curva los ángulos EAB son proporcionales a los segmentos BF, ya que para un mismo tiempo

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{BF}{v} = \frac{s}{v}$$

Si BAE es el ángulo que se ha de trisectar, bastará tomar BH = BF/3 y BAI será la solución.

Por el mismo procedimiento podría obtenerse la división en un número cualquiera n de partes iguales.

Obsérvese que el problema siempre puede reducirse a la trisección de un ángulo agudo, ya que si fuera obtuso se descompondría en uno recto (trisecable inmediatamente) y uno agudo.

Solución por medio de la concoide de Nicomedes

La concoide consta en realidad de dos ramas; la primera de ellas engendrada tal como se explicó atrás (fig. 11) y la segunda en forma semejante, pero tomando el segmento constante AB desde A hacia P (Fig. 15).

Sea AOB el ángulo que se ha de trisecar. Tracemos un círculo de centro O y radio arbitrario. Si se encuentra un punto X, tal que CX = OC = OA quedará resuelto el problema ya que:

$$\text{áng. AOB} = \alpha = \beta + \phi \qquad \text{(en el triángulo AOX)}$$

$$\text{y} \qquad \beta = 2\phi \qquad \text{(en el triángulo OCX)}$$

$$\therefore \alpha = 3\phi$$

El punto X se encontrará en la intersección del círculo con la segunda rama de la concoide de polo A, base OB y distancia constante OA = r.

Obsérvese como la solución puede obtenerse con base en la anterior construcción, con ayuda de la regla graduada y sin necesidad de la concoide. Bastaría hacer girar la regla alrededor de A hasta que se observe que la longitud CX es igual al radio r.

Otra variación de la construcción con la concoide es como sigue (Fig. 16):

Sea OPR el ángulo a trisectar.

Sobre la normal a OR en R se determina el punto M tal que MT = 2 . PR. (M se encuentra sobre la concoide de polo P, base OR y distancia constante 2PR).

Siendo S el punto medio de MT:

$$SR = SM = ST = PR$$

$$\therefore \text{áng. RPS} = \text{áng. PSR} = 2 . \text{áng. SMR} \qquad \text{pero áng. OPT} = \text{áng. SMR}$$

$$\therefore \text{áng. OPT} = 1/3 \text{ . áng. OPR}$$

Solución por medio del caracol de Pascal

Si se tiene un círculo de radio r, y por un punto A sobre él se traza una secante variable, tomando sobre esta a partir del punto de intersección una distancia MP constante e igual a d , el lugar geométrico del punto P es la curva llamada *caracol de Pascal.*

Existen varios tipos según la magnitud de d. Una de estas curvas con d = r —radio del círculo— permite resolver el problema de la trisección.

Sea AOB el ángulo que se va a trisectar (Fig. 17); la prolongación de BO corta la curva en C; el ángulo ACB es la solución.

En efecto: DC = OD = r

$$\text{áng. ADO} = 2 . \text{áng. DCO} \qquad \therefore \qquad \text{áng. OAD} = 2 . \text{áng. DCO}$$

$$\text{pero áng. BOA} = \text{áng. DCO} + \text{áng. OAD} = 3 . \text{áng. OCD.}$$

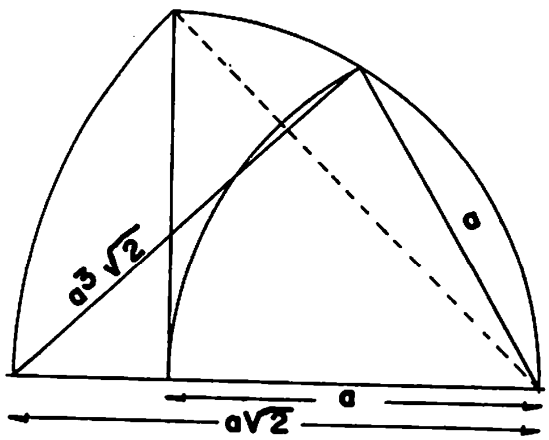


FIG. 13

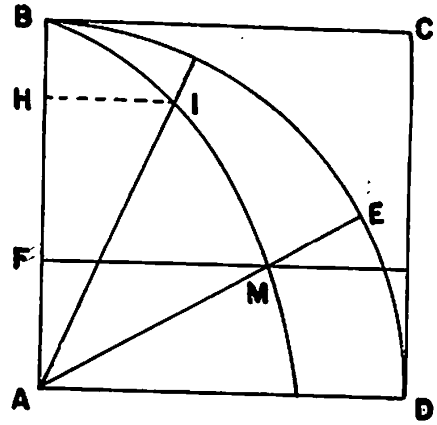


FIG. 14

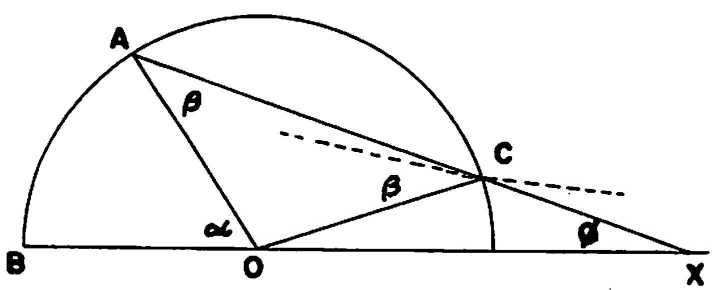


FIG. 15

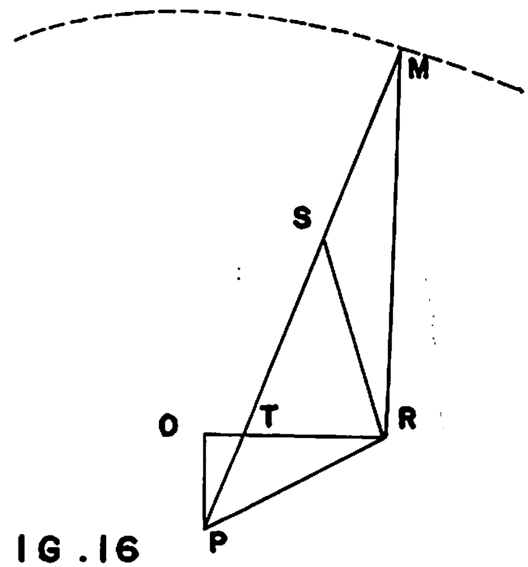


FIG. 16

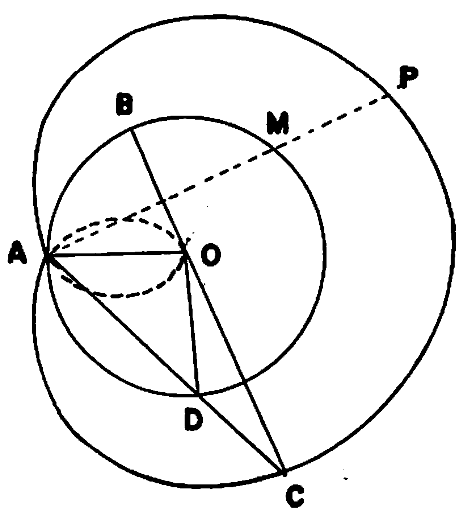


FIG. 17

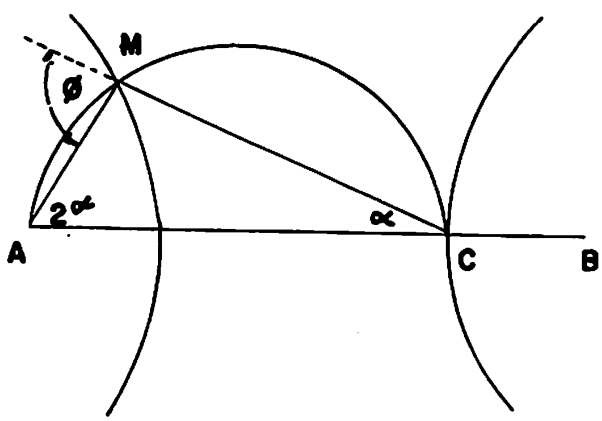


FIG. 18

Esta construcción tiene la ventaja de que basta una sola curva para trisectar cualquier ángulo, mientras que con la concoide es necesario construír una curva diferente para cada ángulo.

Solución por medio de una hipérbola equilátera

Ya desde el siglo IV A.C. Pappus había anotado la posibilidad de resolver el problema de la trisección por medio de una hipérbola equilátera (Fig. 18).

En efecto, dado el segmento $AC = 3l$, puede demostrarse que el lugar de los puntos M, tales que MA y MC hagan con la base AC ángulos 2α y α es una hipérbola equilátera de focos A y B.

($CB = l$). Trazada esta curva bastará construír sobre AC el arco capaz del ángulo $\pi - \phi$. Si M es la intersección se tendrá: áng. $ACM = \phi/3$.

Demostremos que efectivamente el lugar de M es la hipérbola descrita:

En Fig. 19 prolonguemos $CB = l$; tracemos MN tal que áng. $CMN = \alpha$ y bajemos la perpendicular MH.

se tiene: $MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos 2\alpha$

por otra parte: $AC = 3l = 2AH + NC$

$$= 2AM \cos 2\alpha + AM$$

$$\therefore \quad 2 \cdot AM \cos 2\alpha = 3l - AM$$

por tanto: $MB^2 = (4l)^2 - 4l\,(3l - AM) + AM^2 = 4l^2 - 4lAM + AM^2$

$$\therefore \quad MB^2 = (2l - AM)^2$$

$$\therefore \quad MB - MA = 2l$$

y el punto M estará sobre una hipérbola de focos A y B y eje mayor $2l$.

Solución por medio de la trisectriz

Damos por último la solución mediante esta curva inventada al parecer simultáneamente por MacLaurin y por el profesor suramericano Mariano Beraun, en el siglo pasado, curva que sus autores llaman *trisectriz* (Fig. 20).

Sea un círculo de radio r y centro A; tracemos por O una secante variable que haga un ángulo α con el eje x (que tomamos sobre la línea OA) y por A el radio AD que haga un ángulo $BAD = 3\alpha$.

El lugar del punto de intersección P cuando α varía de 0 a 60° genera la curva.

Si suponemos ésta trazada, bastará construír el ángulo BAD que se desea trisectar y unir con O el punto de intersección P.

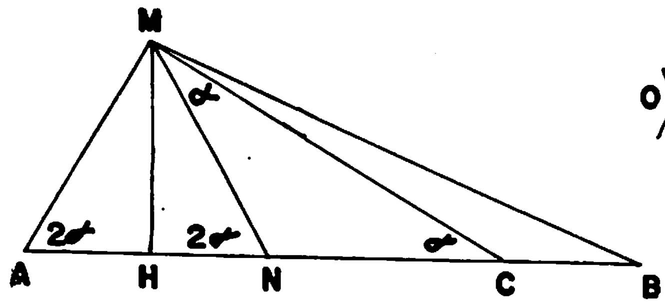


FIG_19

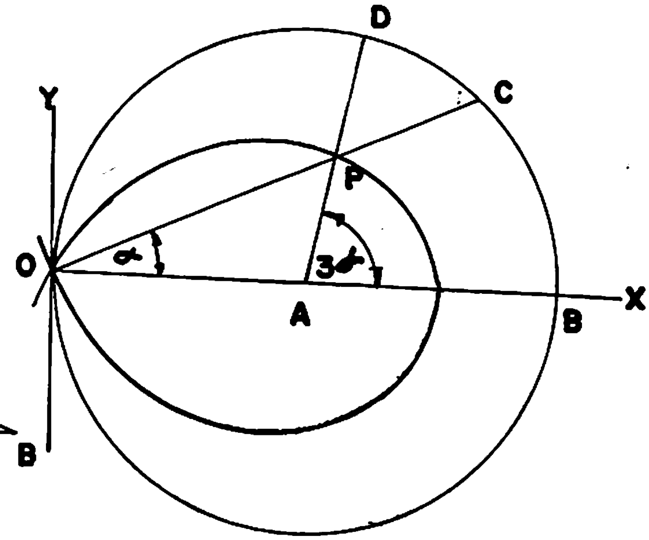


FIG_20

La ecuación cartesiana de la curva en los ejes indicados se obtiene eliminando α entre las ecuaciones: $y = x \operatorname{tg}\alpha$; $y = (x - r) \operatorname{tg} 3\alpha$

$$\text{Puesto que: } \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{se tendrá: } \frac{y}{x - r} = \frac{\left(\frac{y}{x}\, 3 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{1 - \frac{3y^2}{x^2}}$$

$$\text{que simplificada queda: } y^2 = \frac{x^2(3r - 2x)}{r + 2x}$$

Conclusión

Ya escrito este trabajo, he conocido otras soluciones exactas o aproximadas, de los tres problemas. Sinembargo las aquí consignadas son una buena muestra de las más interesantes, sin pretender por supuesto agotar el tema, empeño en el cual me haría interminable.