#564

INICIACION AL ESTUDIO DE FORMAS CUADRATICAS

Por: *Luis de Greiff Bravo*
Profesor de la Facultad

La teoría de las formas cuadráticas de dos y tres variables es de fundamental importancia en Geometría Analítica. El siguiente estudio al respecto, de carácter elemental, estará precedido por algunos conceptos relativos a la teoria de determinantes.

Determinante adjunto. - Definición. Dado un determinante que, para facilitar la exposición, suponemos de tercer orden, a saber,

$$(1) \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

recibe el nombre de *adjunto* de a, el determinante A cuyos elementos son los cofactores correspondientes a los términos de igual posición en el determinante original. Es decir que se tiene,

$$(2) \qquad A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

en el cual valen,

$$(3) \qquad A_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

etc.

Una propiedad fundamental del adjunto es la siguiente:

dado un determinante a *de orden* m, *su adjunto* A *tiene por valor, la potencia, índice* (m—1) *de* a. En símbolos,

$$(4) \qquad A = a^{m-1}$$

Para demostrar esta propiedad basta multiplicar los determinantes escritos en (1) y (2), para tener,

$$
(5) \qquad aA = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}
$$

determinante cuyos elementos se obtienen con la siguiente relación:

$$
(6) \qquad c_{ij} = a_{i1}\ A_{j1} + a_{i2}\ A_{j2} + a_{i3}\ A_{j3}
$$

Ahora bien, los c_{ij}, cuando los índices de línea y de columna son iguales, se reducen al desarrollo del determinante a, teniéndose por otra parte valores *cero* para índices diferentes. La relación (5) se reduce en consecuencia a lo siguiente,

$$
(7) \qquad aA = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3
$$

de donde,

$$
(8) \qquad A = a^2
$$

De la misma manera, con solo cambiar la escritura, se demuestra el caso general.

Consideremos ahora el adjunto de A, a saber,

$$
(9) \qquad \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}
$$

para este determinante, según la propiedad ya demostrada, se tiene,

$$
(10) \qquad \alpha = A^2 = a^4
$$

Vamos a hacer ver cómo, entre los elementos de α y los de a, existen relaciones del tipo siguiente,

$$
(11) \qquad \alpha_{11} = a_{11}\ .\ a
$$

En general,

$$
(12) \qquad \alpha_{ij} = a_{ij}\ .\ a
$$

Con tal fin dispongamos las siguientes relaciones entre las matrices de cuyos determinantes nos hemos ocupado,

(13) $$(a)\ (A') = (I)\ .\ a$$

o sea, de manera detallada,

(14) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = (I)\ .\ a$$

De modo análogo se obtiene,

(15) $$(\alpha)\ .\ (A') = (I)\ A = (I)\ a^2$$

Multiplicando los dos lados de (13) por a (un escalar, como es obvio), y al comparar el resultado con (15), se obtiene,

(16) $$(\alpha)\ .\ (A') = a\ (a)\ .\ (A')$$

de donde se concluye si es $A' \neq 0$, por ende $a \neq 0$:

(17) $$(\alpha) = a\ .\ (a)$$

Esta última igualdad demuestra la relación (12).

LA FORMA CUADRATICA TERNARIA

En Geometría Analítica el estudio de las cuádricas se hace depender en gran parte de las propiedades de la forma,

(18) $$F(x, y, z) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy$$

En todo lo que sigue se supone que, por lo menos uno de los números A, A′, A″, es diferente de cero.

Al derivar F según las distintas variables de que depende, se tiene,

(19) $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ F'_x &= Ax + B''y + B'z \\ \tfrac{1}{2}\ F'_y &= B''x + A'y + Bz \\ \tfrac{1}{2}\ F'_z &= B'x + By + A''z \end{aligned}$$

formas lineales cuyos coeficientes dan lugar a la matriz

$$(20) \qquad (M) = \begin{bmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{bmatrix}$$

Al determinante M correspondiente, a saber,

$$(21) \qquad M = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

se da el nombre de *discriminante* de la forma $F(x, y, z)$.

A la matriz (M), simétrica, se le concede grande importancia, pues de su característica depende que la forma F sea equivalente a la suma de tres, dos, o una forma lineal, elevadas al cuadrado.

El problema de la descomposición de una forma cuadrática de n variables en sumas de cuadros de formas lineales independientes, ocupó el siglo pasado a matemáticos tan eminentes como Kronecker y Hermite. Remitimos al lector que desee profundizar este tema, a tratados extensos de Algebra.

Considerada la adjunta de (M), a saber,

$$(22) \qquad (m) = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$$

tiene mucha importancia el siguiente,

Teorema. Si en una forma cuadrática son $M = 0$; $a = a' = a'' = 0$, resulta en consecuencia que también son $b = b' = b'' = 0$. En otras palabras: si la matriz de coeficientes es singular y los cofactores de la diagonal principal son nulos, serán nulos también los otros cofactores y en consecuencia la matriz (M) tendrá 1 por característica.

Para demostrar este teorema consideremos el determinante $\alpha = \text{adj. m}$. Este nuevo determinante tendrá los siguientes elementos en la diagonal principal:

$$(23) \qquad \alpha_{11} = -b^2; \quad \alpha_{22} = -b'^2; \quad \alpha_{33} = -b''^2$$

Ahora bien, en virtud de las relaciones (11) deberá tenerse,

$$(24) \qquad -b^2 = AM = 0; \quad -b'^2 = A'M = 0; \quad -b''^2 = A''M = 0$$

lo que exige se tenga,

(25) $$b = b' = b'' = 0.$$

lo que demuestra el teorema.

Pasamos ahora a hacer ver cómo la forma $F(x, y, z)$ es descomponible en sumas de cuadrados de tres, dos o una formas lineales, según que la característica de (M) sea 3, 2, 1 respectivamente.

Para demostrar esta propiedad, veamos en primer lugar cómo la diferencia,

(26) $$\Phi(y, z) = F(x, y, z) - (F'_x)^2 \div 4A$$

es una función de y, z, ya no de x, como lo hacemos constar en la designación.

Estamos suponiendo $A \neq 0$; $M \neq 0$; $a'' \neq 0$. Se tiene,

(27) $$A\Phi(y, z) = a''y^2 + a'z^2 - 2byz$$

Procediendo ahora en forma análoga se obtiene,

(28) $$\begin{aligned} A\Phi(y, z) &= (1/a'')\ (a''y - bz)^2 + (1/a'')\ (a'a'' - b^2)z^2 \\ &= (1/a'')\ (a''y - bz)^2 + (1/a'')\,AMz^2 \end{aligned}$$

Con estos resultados se llega a la siguiente descomposición en cuadrados:

(29) $$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (1/A)\ (Ax + B''y + B'z)^2 \\ &\quad - (1/Aa'')\ (a''y - bz)^2 + (1/a'')\,Mz^2 \end{aligned}$$

donde se tiene los cuadrados de tres formas lineales.

Se reducen a dos si es $M = 0$.

Se reducen a una si además de ser $M = 0$, son,

$$a = a' = a'' = 0; \quad (m) = (0).$$

En efecto, en el último caso, según la fórmula (27) se tiene:

$$\Phi(y, z) = 0$$

y si se atiende a la fórmula (26) resulta,

$$0 = F(x, y, z) - (1/4A)\ (F'_x)^2, \text{ de donde,}$$

$$F(x, y, z) = (Ax + B''y + B'z)^2/A.$$

En caso de tenerse $A = 0$, la reducción deberá llevarse a cabo según otra variable cuyo cuadrado aparezca en la forma dada.

Ejercicios numéricos. - Se debe descomponer en cuadrados las siguientes formas:

1º $3x^2 + 5y^2 - 7z^2 + 6yz - 10xz + 4xy$

Resp.: $33F = 11(3x + 2y - 5z)^2 + (11y + 19z)^2 - 867z^2$

2º $F = 2y^2 - 3z^2 + 5yz - 2xz + 3xy$

Resp.: $72F = 9(3x + 4y + 5z)^2 - (9x + 23z)^2 + 867z^2$

3º $F = x^2 - 12yz + 8xy - 5xz$

Resp.: $4F = (2x + 8y - 5z)^2 - 4(4y - z)^2 - 21z^2$

△ ⊙ △