√65

Complemento del Cursillo sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Jorge Mejía Ramírez
Profesor Interno
Facultad de Minas

I. — DETERMINACION DE LA INTEGRAL PARTICULAR DE LA ECUACION LINEAL NO HOMOGENEA POR EL METODO DE VARIACION DE LAS CONSTANTES.

Supongamos que

$$y = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \tag{1-1}$$

sea la solución general de la ecuación lineal homogénea o incompleta, de coeficientes constantes,

$$\phi(D)\ y = 0 \tag{1-2}$$

solución que como es sabido contiene tantas constantes arbitrarias como sea el orden de (1-2) y en la cual las X_i $\quad i = 1, 2, 3, \ldots n$, son funciones definidas de x y linealmente independientes.

El método, desarrollado por Lagrange, consiste en substituír las constantes C_i de (1-1) por funciones U_i de x, que denominaremos respectivamente U_1, U_2, $\ldots U_n$, tales que

$$y = U_1X_1 + U_2X_2 + \ldots + U_nX_n \tag{1-3}$$

y sus derivadas hasta la de orden n, satisfagan a la ecuación

$$\phi(D)y = D^ny + A_1D^{n-1}y + A_2D^{n-2}y + \ldots + A_{n-1}Dy + A_ny$$
$$= f(x) \tag{1-4}$$

lo que dicho en otros términos equivale a que la función (1-3), carente de constantes, sea la integral particular de (1-4).

Tal como se ha enunciado el problema hay n funciones incógnitas $U_i(x)$ y como condición única que satisfagan a (1-4), pero las n—1 derivadas de (1—3) permiten establecer otras tantas condiciones, si a cada derivación y antes de obtener la de orden inmediatamente superior, imponemos a las funciones U_i una restricción como se indica en la tabulación que sigue:

FORMA SIMPLIFICADA DE LAS DERIVADAS DE (1—3)

$$y' = U_1X_1' + U_2X_2' + \ldots + U_nX_n' \qquad (1\text{-}5_1)$$
$$y'' = U_1X_1'' + U_2X_2'' + \ldots + U_nX_n'' \qquad (1\text{-}5_2)$$
$$y''' = U_1X_1''' + U_2X_2''' + \ldots + U_nX_n''' \qquad (1\text{-}5_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{n-1} = U_1X_1^{n-1} + U_2X_2^{n-1} + \ldots + U_nX_n^{n-1} \qquad (1\text{-}5_{n-1})$$

Si igualamos a cero aquella parte de las derivadas anteriores que aparece en la siguiente ordenación.

$$U_1'X_1 + U_2'X_2 + \ldots + U_n'X_n = 0 \qquad (1\text{-}6_1)$$
$$U_1'X_1' + U_2'X_2' + \ldots + U_n'X_n' = 0 \qquad (1\text{-}6_2)$$
$$U_1'X_1'' + U_2'X_2'' + \ldots + U_n'X_n'' = 0 \qquad (1\text{-}6_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_1'X_n^{n-2} + U_2'X_2^{n-2} + \ldots + U_n'X_n^{n-2} = 0 \qquad (1\text{-}6_{n-1})$$

con lo cual la derivada de orden n de (1—3) es

$$y^n = U_1X_1^n + U_2X_2^n + \ldots + U_nX^n + U_1'X^{n-1} + U_2'X_2^{n-1} + \ldots + U_nX_n^{n-1} \qquad (1\text{—}5_n)$$

Ahora, si a la función (1—3) y sus derivadas, según la ordenación $(1\text{—}5_i)$, las multiplicamos respectivamente por A_n, $A_{n1}, \ldots$ A_1 y sumamos por columnas, se obtiene:

$$\phi(D)y = U_1\phi(D)X_1 + U_2\phi(D)X_2 + \ldots + U_n\phi(D)X_n + U_1'X_1^{n-1} + \ldots U'_nX_n^{n-1} = f(x)$$

ecuación que se reduce a

$$U'_1X_1^{n-1} + U'_2X_2^{n-1} + \ldots + U'_nX_n^{n-1} = f(x) \qquad (1\text{—}6_n)$$

ya que por hipótesis cada X_i es una solución de (1—2) lo que implica que para toda X_i, $\phi(D)X_i = 0$.

Como todas las X_i nos son conocidas, podemos calcular sus derivadas hasta la de orden n, con lo cual podremos resolver el sistema de ecuaciones $(1\text{—}6_i)$ obteniendo así las derivadas de las funciones U_i

$$U'_1 = \psi_1(x),\ U'_2 = \psi_2(x), \ldots\ U'_n = \psi_n(x)$$

que integradas y substituídas en (1—3) dan como solución general de (1—4).

$$y = X_1[C_1 + \int\psi_1(x)dx] + X_2[C_2 + \int\psi_2(x)dx] + \ldots + X_n[C_n + \int\psi_n(x)dx]$$

pero evidentemente en el resultado anterior puede prescindirse de las constantes de integración C_i, ya que partimos del supuesto de que la función complementaria (1—1) nos era conocida.

Para comparar este método con el que en párrafo siguiente desarrolla el autor de este opúsculo, vamos a resolver la ecuación:

$$\phi(D)y = (D-a)\ (D-b)\ (D-c)\ (D-d)y = f(x)$$

cuya función complementaria es:

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx} + C_3e^{cx} + C_4e^{dx}$$

resultado que nos permite escribir:

$$y = U_1e^{ax} + U_2e^{bx} + U_3e^{cx} + U_4e^{dx}$$

El sistema de ecuaciones ($1—6_i$) es para este caso,

$$\begin{aligned}
U'_1e^{ax} + \quad U'_2e^{bx} + \quad U'_3e^{cx} + \quad U'_4e^{dx} &= 0\\
aU'_1e^{ax} + bU'_2e^{bx} + cU'_3e^{cx} + dU'_4e^{dx} &= 0\\
a^2U'_1e^{ax} + b^2U'_2e^{bx} + c^2U'_3e^{cx} + d^2U'_4e^{dx} &= 0\\
a^3U'_1e^{ax} + b^3U'_2e^{bx} + c^3U'_3e^{cx} + d^3U'_4e^{dx} &= f(x)
\end{aligned}$$

$$U'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{bx} & e^{cx} & e^{dx} \\ 0 & b\,e^{bx} & c\,e^{cx} & d\,e^{dx} \\ 0 & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} & d^2e^{dx} \\ f(x) & b^3e^{bx} & c^3e^{cx} & d^3e^{dx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} & e^{dx} \\ a\,e^{ax} & b\,e^{bx} & c\,e^{cx} & d\,e^{dx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} & d^2e^{dx} \\ a^3e^{ax} & b^3e^{bx} & c^3e^{cx} & d^3e^{dx} \end{vmatrix}} = e^{-ax}\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b^2 & c^2 & d^2 \\ f(x) & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}} =$$

que después de simplificar los productos comunes a los determinantes del numerador, nos da:

$$U'_1 = \frac{e^{-ax}f(x)}{(a-b)\ (a-c)\ (a-d)} \therefore U_1 = C_1 + \frac{1}{(a-b)\ (a-c)\ (a-d)}\int e^{-ax}f(x)\,dx$$

y por permutación de a con las demás letras:

$$U'_2 = \frac{e^{-bx}f(x)}{(b-a)\ (b-c)\ (b-d)} \therefore U_2 = C_2 + \frac{1}{(b-a)\ (b-c)\ (b-d)}\int e^{-bx}f(x)\,dx$$

$$U'_3 = \frac{e^{-cx} f(x)}{(c-a)\ (c-b)\ (c-d)} \therefore U_3 = C_3 + \frac{1}{(c-a)\ (c-b)\ (c-d)} \int e^{-cx} f(x)\, dx$$

$$U'_4 = \frac{e^{-dx} f(x)}{(d-a)\ (d-b)\ (d-c)} \therefore U_3 = C_4 + \frac{1}{(d-a)\ (d-b)\ (d-c)} \int e^{-dx} f(x)\, dx$$

Como puede observarse no es aplicable cuando la ecuación tiene raíces repetidas, por ejemplo $a = b$, ya que en tal caso las X_i no serían, como fue supuesto, linealmente independientes.

II. — DETERMINACION DE LA INTEGRAL PARTICULAR DE LA ECUACION LINEAL NO HOMOGENEA MEDIANTE LA APLICACION DEL OPERADOR DIFERENCIAL A LA FUNCION QUE RESULTA AL SUBSTITUIR POR VARIABLES A LAS CONSTANTES DE LA ECUACION AUXILIAR.

1. *PRIMER CASO. Todas las raíces de la ecuación auxiliar son diferentes.*

Supongamos que la ecuación sea de cuarto orden y que sean a, b, c, d, las raíces de la ecuación auxiliar. La integral particular que buscamos es entonces la de la ecuación

$$(D-a)\ (D-b)\ (D-c)\ (D-d)y = f(x)$$

la cual como sabemos tiene por función complementaria a

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx} + C_3e^{cx} + C_4e^{dx}$$

El problema se reduce a encontrar cuatro funciones de x, que llamaremos t, u, v, z, tales que

$$y = te^{ax} + ue^{bx} + ve^{cx} + ze^{dx} \qquad (2\text{–}1)$$

verifique la ecuación

$$\phi(D)y = f(x)$$

Recordemos el teorema mediante el cual se puede permutar el operador $\phi(D)$ con la exponencial e^{kx}, a saber,

$$\phi(D)Xe^{kx} = e^{kx}\,\phi(D + K)X$$

y apliquémosla después de operar con (D–d) sobre la (2–1), haciéndolo distributivamente sobre el miembro del lado derecho. Obtenemos así:

$$(D-d)y = (D-d)te^{ax} + (D-d)ue^{bx} + (D-d)ve^{cx} + (D-d)ze^{dx}$$

$$(D-d)y = e^{ax}(D+a-d)t + e^{bx}(D+b-d)u + e^{cx}(D+c-d)v + e^{dx}DZ$$

ecuación que simplificamos a

$$(D-d)y = (a-d)te^{ax} + (b-d)ue^{bx} + (c-d)ve^{cx}$$

si a las funciones t, u, v, z, les imponemos como primera condición que

$$e^{ax}Dt + e^{bx}Du + e^{cx}Dv + e^{dx}Dz = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

Procediendo en forma análoga al actuar sucesivamente con los operadores (D-c), (D-b), y (D-a), obtenemos:

$$(D-c)\ (D-d)y = (a-c)\ (a-d)e^{ax}t + (b-c)\ (b-d)e^{bx}u$$

si fijamos como segunda restricción que

$$(a-d)e^{ax}Dt + (b-d)e^{bx}Du + (c-d)e^{cx}Dv = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

y finalmente,

$$(D-b)\ (D-c)\ (D-d)y = (a-b)\ (a-c)\ (a-d)e^{ax}t$$

si como última condición que deba ser satisfecha por las variables exigimos que

$$(a-c)\ (a-d)e^{ax}Dt + (b-c)\ (b-d)e^{bx}Du = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

finalmente, según la hipótesis,

$$\phi(D)y = (D-a)\ (D-b)\ (D-c)\ (D-d)y = (a-b)\ (a-c)\ (a-d)$$
$$(D-a)e^{ax}t = f(x)$$

$$= (a-b)\ (a-c)\ (a-d)e^{ax}Dt = f(x) \qquad (2\text{-}5)$$

la que resuelta para t, teniendo en cuenta que el operador D^{-1} implica una integración, nos da

$$t = \frac{1}{(a-b)\ (a-c)\ (a-d)} \int e^{-ax} f(x)\,dx \qquad (2\text{-}5a)$$

Como los operadores gozan de la propiedad conmutativa, el proceso anterior hubiéramos podido efectuarlo siguiendo una cualquiera de las siguientes ordenaciones:

$$(D-a)\ (D-b)\ (D-c)\ (D-d)y = (D-b)\ (D-a)\ (D-c)\ (D-d)y =$$

$$(D-c)\ (D-a)\ (D-b)\ (D-d)y = (D-d)\ (D-a)\ (D-b)\ (D-c)y$$

bastará entonces permutar la letra a, con cada una de las demás b, c, d, para obtener respectivamente las soluciones de u, v y z.

$$u = \frac{1}{(b-a)\ (b-c)\ (b-d)} \int e^{-bx} f(x)\, dx \qquad (2\text{–}5b)$$

$$v = \frac{1}{(c-a)\ (c-b)\ (c-d)} \int e^{-cx} f(x)\, dx \qquad (2\text{–}5c)$$

$$z = \frac{1}{(d-a)\ (d-b)\ (d-c)} \int e^{-dx} f(x)\, dx \qquad (2\text{–}5d)$$

valores de t, u, v, z, que llevados a (1–1) nos dan la solución

$$y = \frac{e^{ax}}{(a-b)\ (a-c)\ (a-d)} \int e^{-ax} f(x)\, dx + \frac{e^{bx}}{(b-a)\ (b-c)\ (b-d)} \int e^{-bx} f(x)\, dx$$

$$+ \frac{e^{cx}}{(c-a)\ (c-b)\ (c-d)} \int e^{-cx} f(x)\, dx + \frac{e^{dx}}{(d-a)\ (d-b)\ (d-c)} \int e^{-dx} f(x)\, dx \qquad (2\text{–}6)$$

Como ha podido apreciarse, la diferencia entre el procedimiento seguido y el método tradicional de variación de las constantes, estriba en que con cada derivación se elimina una de las variables incógnitas sin tener que entrar a resolver el sistema de ecuaciones resultante de la ecuación condición $\phi(D)y = f(x)$ y de las n–1 condiciones supletorias impuestas a las variables.

El principio de inducción matemática nos permite escribir de inmediato la solución de la integral particular de una ecuación lineal homogénea, de cualquier orden, siempre que las raíces de su ecuación auxiliar sean diferentes. Así, para una ecuación de quinto orden cuya ecuación auxiliar tenga, además de las supuestas, a g como quinta raíz, bastará modificar los denominadores de cada uno de los términos del resultado (2–6) agregando un nuevo factor que contenga a la nueva raíz como sustraendo y adicionar a (2–6) un nuevo término cuyo denominador esté constituído por los productos de las diferencias entre la nueva raíz y las restantes. Para una ecuación de tercer orden se procederá a suprimir el último término de (2–6) y en los denominadores de los términos restantes se suprimirá el factor que contenga a la raíz d.

Finalmente, si las raíces a y b de la ecuación auxiliar son complejas, bastará efectuar las substituciones $a = \alpha + \beta i$; $b = \alpha - \beta i$, para obtener la solución en este caso.

Es interesante comprobar que el resultado obtenido satisface a las restricciones impuestas a las funciones t, u, v, z, según las ecuaciones (2–2), (2–3), (2–4), y (2–5).

$$\begin{aligned}
e^{ax}t' + e^{bx}u' + e^{cx}v' + e^{dx}z' &= 0\\
(a\text{–}d)\,e^{ax}t' + (b\text{–}d)\,e^{bx}u' + (c\text{–}d)\,e^{cx}v' &= 0\\
(a\text{–}c)\,(a\text{–}d)\,e^{ax}t' + (b\text{–}c)\,(b\text{–}d)\,e^{bx}u' &= 0\\
(a\text{–}b)\,(a\text{–}c)\,(a\text{–}d)\,e^{ax}t' &= f(x)
\end{aligned}$$

que resolviendo para $Dt = t'$ nos da:

$$Dt = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & 0 & 0 & 0\\ 0 & (b\text{–}c)\,(b\text{–}d)\,e^{bx} & 0 & 0\\ 0 & (b\text{–}d)\,e^{bx} & (c\text{–}d)\,e^{cx} & 0\\ 0 & e^{bx} & e^{cx} & e^{dx}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a\text{–}b)\,(a\text{–}c)\,(a\text{–}d)\,e^{ax} & 0 & 0 & 0\\ (a\text{–}c)\,(a\text{–}d)\,e^{ax} & (b\text{-}c)\,(b\text{-}d)\,e^{bx} & 0 & 0\\ (a\text{–}c)\,e^{ax} & (b\text{–}d)\,e^{bx} & (c\text{–}d)\,e^{cx} & 0\\ e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} & e^{ax}\end{vmatrix}} = \frac{e^{-ax}f(x)}{(a\text{-}b)\,(a\text{-}c)\,(a\text{-}d)}$$

resultado idéntico al obtenido anteriormente.

III. — SEGUNDO CASO. LA ECUACION AUXILIAR TIENE UNA RAIZ UNICA

Supongamos como antes una ecuación de cuarto orden cuya raíz única sea a. La ecuación diferencial para este caso es:

$$(D\text{–}a)^4\,y = f(x)$$

cuya función complementaria es como lo sabemos

$$y = e^{ax}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)$$

Operando cuatro veces consecutivas con (D–a) y fijando cada vez una condición que debe ser satisfecha por las variables t, u, v, z, obtenemos

$$y = e^{ax}(t + ux + vx^2 + zx^3) \qquad (3\text{–}1)$$

$$\phi(D)\,y = (D\text{–}a)^4y = f(x) \qquad (3\text{–}2)$$

$$(D-a)y = (D-a)e^{ax}(t+ux+vx^2+zx^3) = e^{ax}D(t+ux+vx^2+zx^3)$$
$$= e^{ax}(u+2xv+3x^2z)$$

si $$Dt + xDu + x^2Dv + x^3Dz = 0 \qquad (3\text{–}3)$$

$$(D-a)^2y = (D-a)e^{ax}(u+2xv+3x^2z) = e^{ax}D(u+2xv+3x^2z)$$
$$= e^{ax}(2v+6xz)$$

si $$Du + 2xDv + 3x^2Dz = 0 \qquad (3\text{–}4)$$

$$(D-a)^3y = (D-a)e^{ax}(2v+6xz) = e^{ax}D(2v+6xz)$$
$$= 6e^{ax}z$$

si $$2Dv + 6xDz = 0 \qquad (3\text{–}5)$$

$$(D-a)^4y = 6(D-a)e^{ax}z = 6e^{ax}Dz \qquad (3\text{–}6)$$

y según (3–2)

$$6e^{ax}Dz = f(x)$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{6}\int e^{-ax}f(x)\,dx$$

de (3–5)

$$Dv = -3xDz = -\frac{e^{-ax}xf(x)}{2}$$

$$\therefore \quad v = -\frac{1}{2}\int e^{-ax}xf(x)\,dx$$

de (3–4)

$$Du = -2xDv - 3x^2Dz = \frac{1}{2}e^{-ax}x^2f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{2}\int e^{-ax}x^2f(x)\,dx$$

finalmente de (3–3)

$$Dt = -xDu-x^2Dv-x^3Dz = -\frac{e^{-ax}}{6}x^3f(x)\,dx$$

$$\therefore \quad t = -\frac{1}{6}\int e^{-ax}x^3f(x)\,dx$$

llevamos a (3–1) los valores de t, u, v, z, obteniendo para la integral particular:

$$y = \frac{e^{ax}}{6} \int e^{-ax}x^3f(x)\,dx + \frac{xe^{ax}}{2} \int e^{-ax}x^2f(x)\,dx - \frac{x^2e^{ax}}{2} \int e^{-ax}xf(x)\,dx$$

$$+ \frac{x^3e^{ax}}{6} \int e^{-ax}f(x)\,dx \qquad (3\text{–}7)$$

El procedimiento anterior es posible abreviarlo, pues observamos que las ecuaciones que hacen referencia a las restricciones impuestas podemos escribirlas de inmediato.

$$\left.\begin{array}{llllll}
(3\text{–}3) & Dt + xDu + x^2Dv + x^3Dz = 0 \\
(3\text{–}4) & 0 + Du + 2xDv + 3x^2Dz = 0 \\
(3\text{–}5) & 0 + 0 + 2Dv + 6x\,Dz = 0 \\
(3\text{–}6) & 0 + 0 + 0 + 6Dz = e^{-ax}f(x)
\end{array}\right\} \quad (3\text{–}8)$$

si partiendo de la ecuación

$$t + ux + vx^2 + zx^3 \qquad (3\text{–}9)$$

substituímos en ella a las variables t, u, v, y z por sus derivadas y las acompañamos de un coeficiente que sean las potencias de x en la (3–9) para la (3–3), de las primeras derivadas de tales potencias para la (3–4), de las segundas y terceras derivadas de las mismas para la (3–5) y la (3–6) respectivamente, e igualamos los resultados a cero para las tres primeras y a $e^{-ax}f(x)$ para la última. Así, para una raíz doble nos bastarían los elementos de (3–8) comunes a las dos primeras columnas y a las dos primeras líneas, igualando a cero la primera línea y a $e^{-ax}f(x)$ la segunda; y para una raíz triple tomaríamos los elementos comunes a las tres primeras columnas y a las tres primeras líneas, e igualaríamos a cero las dos primeras líneas y a $e^{-ax}f(x)$ la última.

Los dos casos que hemos estudiado nos revelan que siempre podrá recurrirse a este método, bien sea que la ecuación auxiliar tenga o no raíces repetidas y cualquiera que sea su orden de multiplicidad.

Cuando f(x), el miembro del lado derecho de la ecuación $\phi(D)y = f(x)$, sea de la forma Ae^{kx} y k sea una raíz de la ecuación auxiliar, no podrá emplearse el método de los coeficientes indeterminados, ya que

$$\phi(D)\,Ae^{kx} = Ae^{kx}\phi(K) = 0$$

Análogamente, cuando $f(x) = A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x$ y una de las raíces de la ecuación auxiliar es βi, tampoco podrá apelarse al método de los coeficientes indeterminados, pues también en este caso se tiene que

$$\phi(D)(A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x) = 0$$

El método que acabamos de desarrollar, como fácilmente podemos apreciarlo en los resultados (2–6) y (3–7), nos revela el por qué en tales casos, la integral particular es de la forma

$$y = Axe^{kx} \qquad \text{ó} \qquad y = Ax \operatorname{sen} \beta x + Bx \operatorname{sen} \beta x$$

cuando K ó βi son raíces no repetidas de la ecuación, y que son de la forma

$$y = Ax^r e^{kx} \qquad \text{ó} \qquad y = Ax^r \operatorname{sen} \beta x + Bx^r \cos \beta x$$

cuando K ó βi sean raíces de la ecuación y r su grado de multiplicidad.

IV. — METODO ALTERNATIVO PARA EL CASO DE UNA RAIZ UNICA DE LA ECUACION AUXILIAR.

Sea la ecuación
$$(D-a)^n y = f(x) \tag{4–1}$$

Como evidentemente $y = C_1 e^{ax}$ es la más simple de las soluciones de la ecuación homogénea $\phi(D)y = 0$, busquemos una solución de la forma $y = te^{xa}$ que verifique la (4-1). Mediante una sola aplicación del teorema que hemos venido utilizando.

$$(D-a)^n te^{ax} = f(x)$$

$$e^{ax}(D + a - a)^n t = e^{xa} D^n t = f(x) \tag{4–2}$$

$$\therefore\ t = D^{-n} e^{-ax} f(x) = \underbrace{\int dx \int dx \int \dots \int}_{\text{n integrales}} e^{-ax} f(x)\, dx \tag{4–3}$$

El procedimiento seguido nos muestra que podemos aplicarlo a la solución de la ecuación $(D-a)^n y = 0$, pues en este caso (4–2) se reduce a

$$e^{ax} D^n t = 0$$

y siendo $e^{ax} \neq 0$ para todo valor finito de x, la solución trivial de

$$D^n t = 0$$

es que t sea un polinomio en x de grado n–1

$$\therefore\ t = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}$$

Finalmente es posible combinar los métodos uno y tres, como lo explicamos con el ejemplo siguiente

$$(D-a)^3(D-b)(D-c)(D-d)y = f(x) \tag{4-4}$$

hacemos

$$(D-a)(D-b)(D-c)(D-d)y = w \tag{4-5}$$

con lo cual (4–4) queda

$$(D-a)^2 w = f(x)$$

según (4–3) $w = \int dx \int e^{-ax} f(x)\,dx = F(x)$

valor que llevado a (4–5) nos da

$$(D-a)(D-b)(D-c)(D-d)w = F(x)$$

ecuación cuya integral particular obtenemos de (2–6) substituyendo a $f(x)$ por $F(x)$.

También podrá apelarse al artificio que acabamos de explicar, cuando vaya a recurrirse al método de la variación de las constantes.

V. — ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES REDUCIBLES A OTRA DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Pertenecen a este tipo las ecuaciones lineales de Legendre y la de Cauchy, conocida también como ecuación lineal de Euler. Se da el primer nombre a la ecuación

$$[A_0(ax + b)^n D^n + A_1(ax + b)^{n-1} D^{n-1} + \dots$$
$$+ A_{n-1}(ax + b)D + A_n]y = f(x)$$

y al caso particular para el cual $a = 1$, $b = 0$, con la segunda denominación.

Estas ecuaciones se transforman a otra lineal, con coeficientes constantes, mediante un cambio de variable.

Sea $ax+b = e^z$ ó $z = \ln(ax+b)$ y por lo tanto $dz/dx = a/(ax+b)$

Empleando Dy en lugar de dy/dx y $\mathcal{D}y$ en lugar de dy/dz, $D \neq \mathcal{D}$, se tiene:

$$Dy = dy/dx = (dy/dz)(dz/dx) = [a/(ax + b)]dy/dz = a\mathcal{D}y/(ax + b) \tag{5-2}$$

$$\therefore\ (ax + b)Dy = a\mathcal{D}y \tag{5-3}$$

derivando a (5–2) con respecto a x

$$D^2y = \frac{a}{(ax+b)} \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{a^2}{(ax+b)^2} \frac{dy}{dz}$$

$$= \frac{a^2}{(ax+b)^2} \left(\frac{dz^2}{d^2y} - \frac{dz}{dy} \right) \qquad (5\text{–}4)$$

$$\therefore\ (ax + b)^2 D^2 y = a^2 D(D-1)\,y \qquad (5\text{–}5)$$

y por derivación de (5–4) con respecto a x

$$D^3y = \frac{a^2}{(ax+b)^2} \left(\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2} \right) \frac{dz}{dx} - \frac{2a^3}{(ax+b)^3} \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

$$= \frac{a^3}{(ax+b)^3} \left| \frac{d^3y}{dz^3} - \frac{3d^2y}{dz^2} + \frac{2dy}{dz} \right| \qquad (5\text{–}6)$$

$$\therefore\ (ax + b)^3 D^3 y = a^3 D(D-1)(D-2) \qquad (5\text{–}7)$$

de los resultados (5–3), (5–5) y (5–7) podemos deducir la ley de formación:

$$(ax + b)^n D^n y = a^n D(D-1)\ (D-2) \ldots . (D-n+1)\,y \qquad (5\text{–}8)$$

Si llevamos a (5–1) los resultados anteriores obtenemos la ecuación con coeficientes constantes,

$$[A_0\, a^n D(D-1)\ (D-2) \ldots . (D-n+1) + A_1 a^{n-1} D(D-1)\ (D-2) \ldots \ldots$$
$$(D-n+2) + \ldots . + A_{n-3}\, a^3 D(D-1)\ (D-2) + A_{n-2}\, a^2 D(D-1) +$$
$$A_{n-1} D + A_n]\,y = f\left(\frac{e^z - b}{a} \right) \qquad (5\text{–}9)$$

Otro cambio de variable que da de una manera fácil y rápida, a la ecuación auxiliar de la transformada de la ecuación de Legendre, y por consiguiente de la ecuación de Euler y de Cauchy, se obtiene haciendo

$$y = (ax+b)^r$$

de la cual se obtiene por derivaciones sucesivas:

$$Dy = ar\ (ax+b)^{r-1}$$
$$D^2y = a^2 r\ (r-1)\ (ax+b)^{r-2}$$
$$D^3y = a^3 r\ (r-1)\ (r-2)\ (ax+b)^{r-3}$$
$$— — — — — — — — — — —$$
$$D^n y = a^n r\ (r-1)\ (r-2) \ldots \ldots (r-n+1)\ (ax+b)^{r-n}$$

valores que llevados a (5–1) nos dan como ecuación auxiliar para la ecuación con segundo miembro igual a cero.

$$(ax+b)^r \left[A_0 a^n r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)+A_1 a^{n-1} r(r-1)(r-2)\ldots \right.$$
$$\ldots(r-n+2)+\ldots+A_{n-3}a^3 r(r-1)(r-2)+A_{n-2}a^2 r(r-1)+$$
$$\left. A_{n-1}ar+A_n\right] = 0 \qquad (5\text{–}10)$$

Resultado que habría sido el que hubiéramos obtenido si para (5–9) ensayamos una solución de la forma $y = e^{rz}$, pues según el teorema

$$\phi(D)e^{rz} = e^{zr}\phi(r)$$

con lo cual bastaría cambiar a *D* por r. Además si r_1 es una de las raíces del polinomio (5–10) tenemos:

$$y = C_1 e^{r_1 z} = C_1 e^{r_1 \ln(ax+b)} = C_1(ax+b)^{r_1} \qquad (5\text{–}11)$$

relación que nos muestra que ambas substituciones conducen a soluciones idénticas.

Ejemplo: Resolver:

$$[(x+1)^2D^2+(x+1)D-1]\ y = 2\ln(x+1)+x-1 \qquad (a)$$

para resolver la ecuación incompleta

$$[(x+1)^2D^2+(x+1)D-1]y = 0 \qquad (b)$$

hacemos $y = (x+1)^r$ de la cual por derivaciones sucesivas obtenemos,

$$Dy = r(x+1)^{r-1} \qquad (c)$$

$$D^2y = r(r-1)^{r-2} \qquad (d)$$

resultados que llebados a (b) dan:

$$(x+1)^r[r(r-1)+r-1] = (x-1)(r^2-1)$$

$$\therefore\ r_1 = 1 \qquad r_2 = -1$$

raíces que según (5–11) nos dan para la función complementaria de (a)

$$y = C_1(x+1)+C_2(x+1)^{-1}$$

si hubiéramos empleado el cambio de variable $x+1 = e^z$, la ecuación transformada de (a) sería

$$(D^2-1)y = 2z+e^z-2$$

cuya integral particular la obtenemos según (2–6)

$$y = \frac{e^{z}}{2} \int e^{-z}(2z+e^{z}-2)\,dz - \frac{e^{-z}}{2} \int e^{z}(2z+e^{z}-2)\,dz = \frac{ze^{z}}{2} + \frac{e^{z}}{2} + 2-2z$$

En cambio, si para la determinación de la integral particular empleamos el método de la variación de las constantes se tiene:

$$y = u\,(x+1) + v\,((x+1)^{-1} \qquad \text{(e)}$$

$$Dy = u - v(x+1)^{-2} \quad \text{(f)} \quad \text{si} \begin{cases} (x+1)\,u' + (x+1)^{-1}v' = 0 \\ (x+1)^{2}u' + v' = 0 \end{cases} \qquad \text{(g)}$$

$$D^{2}y = u' + 2v\,(x+1)^{-3} - v'\,(x+1)^{-2} \qquad \text{(h)}$$

y por substitución de (f) y (h) en (a)

$$(x+1)^{2}u' - v' = 2\ln(x+1) + x-1 \qquad \text{(i)}$$

(g) e (i) nos dan el sistema

$$(x+1)^{2}-v' = 2\ln(x+1) + (x-1)$$

$$(x+1)^{2}+v' = 0$$

que resuelto da:

$$u' = \frac{1}{(x+1)^{2}} \ln\,(x+1) + \frac{x-1}{2(x+1)^{2}} \quad v' = -\left[\ln(x+1) + \frac{x-1}{2}\right]$$

que integradas y llevados sus valores a (e) dan la solución

$$y = (x+1) \int \left[\frac{1}{(x+1)^{2}} \ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^{2}}\right] dx$$

$$- \frac{1}{(x+1)} \int \left[\ln(x+1) + \frac{x-1}{2}\right] dx$$

$$= \frac{x+1}{2} \ln(x+1) + \frac{(x+1)}{2} + 2-2\ln(x+1)$$

VI. — ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTANEAS.

En muchas aplicaciones es común el caso de tener que resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales con n+1 variables con sólo una de ellas como variable independiente. Como el número de variables es mayor en uno que el número de ecuaciones, es posible por los métodos corrientes del álgebra eliminar entre ellas n–1 de las variables dependientes y las derivadas de tales variables, y llegar a una ecuación diferencial lineal para la enésima variable dependiente. A continuación resolveremos un mismo ejemplo de tres maneras diferentes.

1ª Solución. Sean las ecuaciones

$$Dx + 2x + 3y = 0 \qquad (1)$$

$$Dy + 2y + 3x = 2e^{2t} \qquad (2)$$

en las cuales se entiende que las derivadas que en ella figuran son con respecto al tiempo. Si entre (1) y (2) eliminamos a y

$$3x(2) - 2x(1) \qquad 3Dy - 2Dx + 5x = 6e^{2t} \qquad (3)$$

y si de la derivada de (1) con respecto a t restamos la (3), obtenemos

$$D^2x + 4Dx - 5x = - 6e^{2t}$$

$$(D+5)\ (D-1)x = - 6e^{2t} \qquad (4)$$

ecuación que nos da la solución

$$x = C_1e^t + C_2e^{-5t} - \frac{6e^t}{1+5} \int e^{-t}e^{2t}dt - \frac{6e^{-5t}}{-5-1} \int e^{5t}e^{2t}dt$$

$$= C_1e^t + C_2e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t} \qquad (5)$$

resultado que llevado a (1) da para la variable y

$$y = - \frac{Dx+2x}{3} = - C_1e^t + C_2e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t} \qquad (6)$$

haciendo notar que la función (y) se obtuvo sin que mediara una integración.

2ª *Solución.* La eliminación se hace más simple si empleamos la notación operatorial. Así, las ecuaciones para resolver podemos escribirlas,

$$(D+2)x + 3y = 0 \qquad (1)$$

$$3x + (D+2)y = 2e^{2t} \qquad (2)$$

y después de operar con D +2 sobre la (1) se tiene,

$$(D+2)^2x + 3(D+2)y = 0 \qquad (3)$$

Si multiplicamos a la (2) por tres y restamos de (3) el resultado obtenido, se tiene,

$$(D+2)^2x - 9x = -6et^{-2t}$$

$$(D^2+4D-5)x = -6e^{-2t}$$

ecuación diferencial que nos da los resultados hallados anteriormente.

3ª *Solución.* Tratando como coeficientes a los operadores que figuran en (1) y (2) de la solución anterior, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ 3 & D+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2e^{2t} & D+2 \end{vmatrix} = -6e^{-2t}$$

$$(D+2)^2x-9x = (D+5)(D-1)x = -6e^{2t}$$

que daría para x la solución encontrada antes.

$$\begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ 3 & D+2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+2 & 0 \\ 3 & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2(D+2)e^{2t} = 8e^{2t}$$

$$[(D+2)^2-9]y = 8e^{2t} \qquad \text{(a)}$$

ecuación que resulta para y nos da

$$y = C_3e^t + C_4e^{-5t} + 8\frac{e^t}{1+5}\int e^{-t}e^{2t}dt - \frac{8e^{-5t}}{5+1}\int et^{5t}e^{2t}dt \quad e$$

$$= C_3{}^t + C_4e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

pues no hay razón que justifique que las constantes de integración de la ecuación (a) sean las mismas que se obtuvieron en la (6) de la primera solución. Solamente si las soluciones

$$x = C_1e^t + C_2e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$$

$$y = C_3e^t + C_4e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

las llevamos a la ecuación (1) del sistema que teníamos para resolver, encontramos que para que tal ecuación se verifique es preciso que $C_3 = -C_1$ y que $C_4 = C_2$.

Para evitar dificultades como la anterior debe procurarse, en cuanto sea posible que sólo una de las variables se obtenga por integración y las restantes por substitución de la función encontrada para tal variable en las ecuaciones dadas para resolver.

En general, el número de constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas

$$f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(x)$$

$$f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(x)$$

está dado por el grado de D en el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS. Resolver los ejercicios siguientes para todos los cuales la variable independiente es t.

1. $mD^2x + He\,Dy = Ee$

   $mD^2y - He\,Dx = 0$

determinando las constantes de integración si para $t = 0$ se tiene

$x = y = Dy = Dx = 0$.

2. $(D^2 - 3)x - 4y + 3 = 0$

   $(D^2 + 1)y + x + 5 = 0$

y las mismas condiciones iniciales que para el ejercicio anterior.

3. $(D^2 - 1)x + 8Dy = 16e^t$

   $Dx + 3(D^2 + 1)y = 0$

△ ⊙ △