566

LAS HELICES CONICAS DE REVOLUCION

Gabriel García Moreno
Profesor de la Facultad

Las hélices, en general, son curvas alabeadas, o espaciales, que se definen por la propiedad que tiene su tangente, de formar un ángulo constante con una recta fija del espacio, la cual constituye su eje.

Veamos cómo esta definición conduce al teorema más importante, teorema que caracteriza a las hélices, y que nos proporciona la forma de conocer cuándo una curva es una hélice.

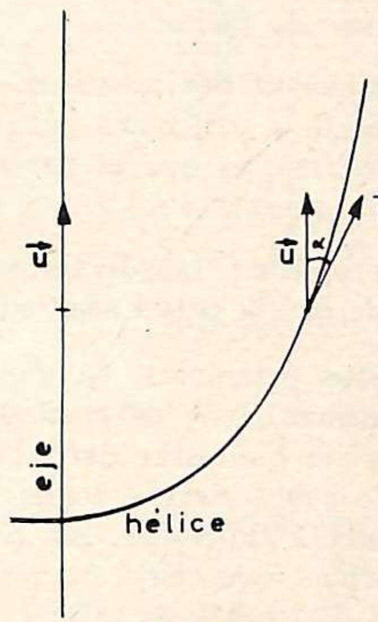

fig 1

Sea $\vec{u}$ el versor del eje de la hélice, y $\vec{t}$ como de costumbre el versor tangente a la curva. Expresemos la definición:

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = \cos \alpha = \text{constante} \qquad \text{(a)}$$

derivando la (a) y utilizando el teorema de Serret-Frenet:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Ecuación que nos dice que el versor $\vec{u}$ es paralelo al plano rectificante de la hélice y que por consiguiente ponemos en la forma:

$$\vec{u} = \vec{t}\cos\alpha + \vec{b}\,\mathrm{sen}\,\alpha. \qquad \text{(c)}$$

donde $\vec{b}$ = versor binormal.

Si derivamos la (c), obtenemos:

$$0 = \kappa\vec{\eta}\cos\alpha - \theta\vec{\eta}\,\mathrm{sen}\,\alpha = (\kappa\cos\alpha - \theta\,\mathrm{sen}\,\alpha)\vec{\eta} \qquad \text{(d)}$$

donde:

κ = curvatura principal, o normal, de la hélice.

θ = curvatura de torsión.

De la (d): $$\frac{\kappa}{\theta} = \mathrm{tg}\,\alpha = \text{constante}. \qquad \text{(e)}$$

La ecuación (e), es la propiedad que queríamos obtener. Es general para todas las hélices, y se puede demostrar que si una curva cumple la condición (e), es una hélice.

La propiedad definida por la (e) constituye el teorema de Lancret: "La condición necesaria y suficiente para que una curva sea de pendiente constante (hélice), es que la razón de la curvatura a la torsión sea constante" (Lancret 1802).

Naturalmente, esta propiedad, la supondremos cumplida paralelamente a la condición de que la curva sea regular.

Una vez sentados estos principios, se puede comprender que sobre toda superficie, continua, real, es posible trazar hélices, que necesariamente, no tienen por qué estar definidas sobre toda la superficie, si no únicamente sobre ciertas zonas de éstas, y siempre que se cumplan determinadas condiciones. Así por ejemplo, son muy conocidas las hélices esféricas, que como su nombre lo indica están trazadas sobre una esfera. Estas hélices esféricas no están definidas sobre toda la esfera, sino únicamente sobre una zona de ésta.

Nuestro propósito es estudiar las hélices cónicas de revolución, es decir las hélices trazadas sobre conos de revolución.

Empecemos con las ecuaciones del cono de revolución: Fig. (2)

$$\vec{OP} = \vec{r} = \text{radio vector}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} x &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\phi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z &= r\cos\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

Las ecuaciones (1) son las ecuaciones paramétricas del cono de revolución, con semiángulo en el vértice, de valor $\hat{\alpha}$, y el vértice en coincidencia con el origen.

Los dos parámetros independientes de la superficie son entonces (r) y (ϕ), y como nos enseña la Geometría diferencial, establecer una relación entre (r) y (ϕ) equivale a trazar una curva contenida en la superficie.

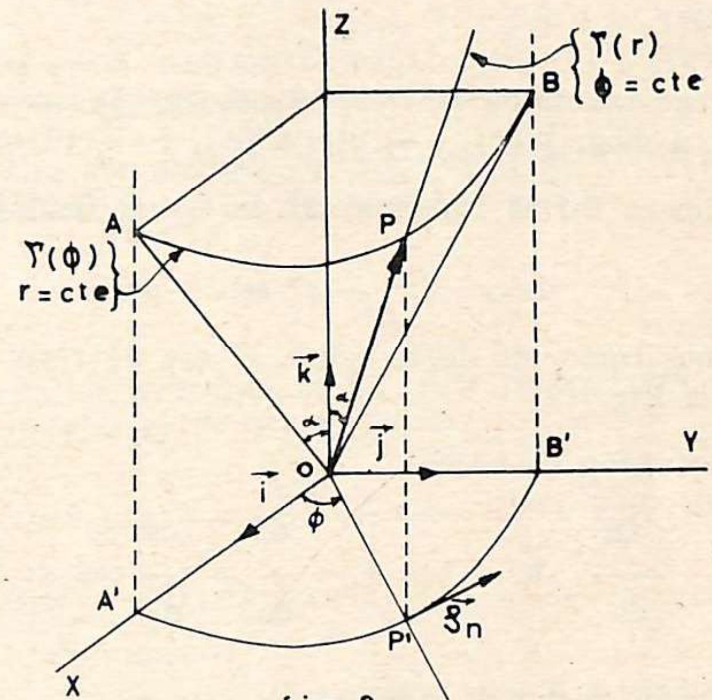

fig 2

Busquemos pues la relación entre (r) y (ϕ) para que la curva sea una hélice.

La ecuación vectorial de la superficie será entonces, de acuerdo con las (1):

$$\vec{r} = r\,(\operatorname{sen}\alpha \cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}) \qquad \text{(f)}$$

Los coeficientes de Gauss de primer orden son:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \operatorname{sen}\alpha \cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\therefore E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \, (-\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\phi \, \vec{i} + \operatorname{sen}\alpha \cos\phi \, \vec{j})$$

$$\therefore \quad G = \left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = 0$$

La circunstancia de ser $F = 0$ nos enseña que las curvas paramétricas, a saber $\Gamma(r)$, $\phi = \text{cte}$; $\Gamma(\phi)$, $r = \text{cte}$, son ortogonales.

La primera forma fundamental de Gauss tendrá entonces por expresión:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \, d\phi^2 \tag{2}$$

Tomemos como eje de la hélice, el eje de revolución del cono (Eje z de la Fig. (2)).

Por definición de hélice:

$$\frac{\overrightarrow{dR}}{ds} \cdot \vec{k} = \cos\beta = \frac{dz}{ds} = \frac{dr}{ds} \cos\alpha \tag{3}$$

para $\vec{R}$ = radio vector de la hélice y $z = r \cos\alpha$

De (3): $$ds = dr \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{4}$$

igualando el cuadrado de la (4) con la (2):

$$dr^2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, d\phi^2 \tag{5}$$

Separando variables en la (5):

$$\frac{dr}{r} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha \quad \cos^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}} \, d\phi \tag{6}$$

Esta es la ecuación diferencial de las hélices cónicas. El doble signo indica que hay dos hélices: la dextrógira y la levógira. La (6) tiene solución real para la condición $90^\circ \geqq \beta > \alpha$ y para la condición

$\beta = \alpha$, la hélice se convierte en la curva $[\Gamma(r) ; \phi = cte]$, o sea, en una de las generatrices rectilíneas del cono.

$$\text{Llamando: } \lambda = \sqrt{\frac{sen^2 \alpha \quad cos^2 \beta}{cos^2\alpha - cos^2 \beta}} \tag{7}$$

podemos escribir la (6) así:

$$\frac{dr}{r} = \pm \lambda \, d \phi \quad \therefore \quad r = r_0 \, e^{\pm\lambda\phi} \tag{8}$$

La (8) es la relación buscada entre (r) y (ϕ) que define la ecuación de las hélices cónicas de revolución.

Tomemos por ejemplo la hélice dextrógira $r = r_0 \, e^{\lambda\Phi}$; los intervalos de definición de las dos variables son:

$$-\infty \leqq \phi \leqq \infty$$
$$0 \leqq r \leqq \infty$$

La ecuación vectorial de la hélice cónica será entonces, reemplazando el valor de la (8) en la (f)

$$\vec{r} = r_0 e^{\lambda\Phi} \, (sen \, \alpha \, cos \, \phi \, \vec{i} + sen \, \alpha \, sen \, \phi \, \vec{j} + cos \, \alpha \, \vec{k}) \tag{9}$$

La ecuación (4), integrada:

$$S = r \frac{cos \, \alpha}{cos \, \beta} + C \text{ y si para } r = 0, \, s = 0, \text{ obtenemos:}$$

$$S = r_0 \, e^{\lambda\Phi} \frac{cos \, \alpha}{cos \, \beta} \text{ (10), que es la longitud de la curva.}$$

Busquemos a continuación, los versores del Triedro intrínseco y determinemos la curvatura y la torsión. De la (9):

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \text{ (11) de De la (9); así mismo:}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = r_0 \, e^{\lambda\Phi} \, [(\lambda \, sen \, \alpha \, cos \, \phi - sen \, \alpha \, sen \, \phi) \, \vec{i} + (\lambda \, sen \, \alpha \, sen \, \phi$$
$$+ sen \, \alpha \, cos \, \phi) \, \vec{j} + \lambda \, cos \, \alpha \, \vec{k}]$$

y de (10) $\dfrac{ds}{d\phi} = \lambda\ r_0\ e^{\lambda\Phi} \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ $\therefore$ $\dfrac{d\phi}{ds} = \dfrac{e^{-\lambda\Phi}}{\lambda\ r_0} \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

los cuales reemplazados en la (11):

$$(12) \quad \vec{t} = \frac{\cos\beta}{\lambda\cos\alpha}\left[\text{sen}\,(\lambda\cos\phi - \text{sen}\,\phi)\vec{i} + \text{sen}\,\alpha\,(\lambda\,\text{sen}\,\phi + \cos\phi)\vec{j} + \lambda\cos\alpha\,\vec{k}\right]$$

Utilizando el Teorema de Serret-Frenet:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{\eta} = \frac{d\vec{t}}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{ds} \quad \text{o sea, de la} \qquad (12)$$

$$(13) \quad k\vec{\eta} = \frac{e^{-\lambda\Phi}}{\lambda^2\ r_0}\ \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\left[-\text{sen}\,\alpha\,(\cos\phi + \lambda\,\text{sen}\,\phi)\,\vec{i} + \text{sen}\,\alpha\,(\lambda\cos\phi - \text{sen}\,\phi)\,\vec{j}\right]$$

$$\therefore\ k = \frac{e^{-\lambda\Phi}}{\lambda^2\ r_0}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{1 + \lambda^2\,\text{sen}\,\alpha} \qquad (14)$$

$$\text{y, } \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\left[-(\lambda\,\text{sen}\,\phi + \cos\phi)\,\vec{i} + (\lambda\cos\phi - \text{sen}\,\phi)\,\vec{j}\,\right] \qquad (15)$$

El versor binormal $\vec{b}$ lo obtenemos de la (12) y la (15), así:

$$\vec{b} = \vec{t}\ \Lambda\ \vec{\eta} \qquad (16)$$

Reemplazando, pues, las (12) y (15) en la (16) y efectuando las reducciones del caso:

$$(17) \quad \vec{b} = \frac{\cos\beta}{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}\cdot\left[-\lambda(\lambda\cos\phi - \text{sen}\,\phi)\vec{i} - \lambda(\lambda\,\text{sen}\,\phi + \cos\phi)\vec{j} + (\lambda^2+1)\,\text{tg}\,\alpha\,\vec{k}\right]$$

$$\therefore -\theta\vec{\eta} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\cos^2\beta\ e^{-\lambda\Phi}}{\lambda\ r_0\ \cos\alpha\ \sqrt{\lambda^2+1}}\left[(\lambda\,\text{sen}\,\phi + \cos\phi)\,\vec{i} - (\lambda\cos\phi - \text{sen}\,\phi)\,\vec{j}\right]$$

$$\therefore\ \theta^2 = \frac{\cos^4\beta\, e^{-2\lambda\Phi}}{\cos^2\alpha\ r_0^2\lambda^2} \qquad \therefore\ \theta = \frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{e^{-\lambda\Phi}}{\lambda\ r_0} \qquad (18)$$

Las ecuaciones (12), (15) y (17) son las expresiones de los versores del triedro intrínseco de la curva $(\vec{t}, \vec{\eta}, \vec{b})$ o sean respectivamente: versor tangente, versor normal, y versor binormal. Así mismo las ecuaciones (14) y (18) definen la curvatura normal (κ) y la torsión (θ), con lo cual se completa el conocimiento intrínseco de la hélice cónica.

La comprobación final, consiste en hacer la relación (κ/θ) y ver si se cumple el Teorema de Lancret, así:

$$\frac{\kappa}{\theta} = \frac{e^{-\lambda\Phi}}{\lambda\ r_0} \cdot \frac{\lambda\ r_0}{e^{-\lambda\Phi}} \cdot \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \operatorname{sen}\alpha \sqrt{1+\lambda^2}$$

$\therefore\ \dfrac{\kappa}{\theta} = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{\dfrac{1+\lambda^2}{\lambda^2}}$ en donde reemplazado el valor de (λ) de la ecuación (7) se obtiene:

$$\frac{\kappa}{\theta} = \operatorname{tg}\beta$$

lo cual al verificar el Teorema de Lancret, nos dice no solamente que la curva obtenida es una hélice, sino que nos confirma sobre la corrección de las expresiones enumeradas en el transcurso de la exposición.

Las hélices cónicas se proyectan en el plano (x ó y) Fig. (2). (Proyección en un plano perpendicular al eje) en espirales logarítmicas. Este hecho se puede demostrar fácilmente así:

Fig. (2)

$$OP' = \vec{OP} - \vec{P'P} \quad y \quad \vec{P'P} = r\cos\alpha\,\vec{k} = r_0\, e^{\lambda\Phi}\cos\alpha\,\vec{k}$$

reemplazando el valor (r) de la (8).

$$\therefore\ \vec{OP'} = \vec{r} - r_0\, e^{\lambda\Phi}\cos\alpha\,\vec{k} = r_0\, e^{\lambda\Phi}\operatorname{sen}\alpha\,(\cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\,\vec{j}) \qquad (19)$$

después de reemplazar convenientemente el valor de $(\vec{r})$ dado por la (9).

La ecuación (19), es la ecuación vectorial de una espiral logarítmica.

Estas hélices, tienen además otra propiedad importante: son las loxodromas del cono de revolución.

Como sabemos, loxodromas son las curvas que cortan bajo un ángulo constante (δ) a un haz de planos. Por consiguiente, una demostración intuitiva de este hecho, la constituye la propiedad que tiene la espiral logarítmica de cortar bajo ángulo constante a los radios vectores, que en este caso son las proyecciones de las generatrices rectilíneas del cono de revolución. Pero se puede demostrar utilizando la condición que caracteriza a las loxodromas trazadas sobre las superficies de revolución:

$$d\phi = \operatorname{tg}\delta \sqrt{1 + [Z'(R)]^2}\, \frac{dR}{R} \tag{20}$$

donde $\hat{\delta}$ = constante, es el ángulo que hace la tangente de las loxodromas con el haz de planos. (En el caso de las superficies de revolución, el haz de planos lo constituyen los planos meridianos).

$$R = r \operatorname{sen}\alpha = r \,.\, e^{\lambda\Phi} \operatorname{sen}\alpha \tag{a}$$

$$Z(R) = r \cos\alpha = R \operatorname{cotg}\alpha \tag{b}$$

$$Z'(R) = \frac{dZ}{dR} = \operatorname{cotg}\alpha \tag{c}$$

$$dR = r_0\, \lambda\, e^{\lambda\Phi} \operatorname{sen}\alpha \; d\phi \tag{d}$$

$$\frac{dR}{R} = \lambda \; d\phi \tag{e}$$

Valores que reemplazados en la (2) nos dan:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\lambda} \tag{21}$$

condición que caracteriza a las loxodromas del cono de revolución.

Veamos si las hélices cónicas cumplen esa condición. Llamemos $(\vec{\rho_n})$ al versor normal a los planos meridianos. Busquemos el ángulo que hace la tangente a la hélice, definida por su versor $(\vec{t})$, con la normal al plano meridiano:

$$\operatorname{sen}\delta' = \vec{\rho_n} \,.\, \vec{t} \tag{22}$$

el versor $\vec{\rho_n} = \text{sen}\,\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$ (Fig. (2)

el versor $\vec{(t)}$ lo tenemos en la ecuación (12)

Reemplazando en la (22)

$$\text{sen}\,\delta' = \rho_A \, . \, t \tag{22}$$

$$\text{sen}\,\delta' = \frac{\cos\beta \;\; \text{sen}\,\alpha}{\lambda \;\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\lambda}\,\text{tg}\,\alpha \quad \therefore \quad \text{tg}\,\delta' = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\lambda} \tag{23}$$

resultando la (23) = (22) $\therefore\ \hat{\delta}' = \hat{\delta}$

También es posible encontrar las expresiones de las ecuaciones intrínsecas, de estas curvas sin necesidad de acudir al sistema de las nueve ecuaciones diferenciales dadas por el teorema de Serret-Frenet, ni al método de Darboux, por reducción a una ecuación de Riccati, simplemente tomando el inverso de las ecuaciones (14) y (18), que expresan respectivamente, el radio normal de curvatura, y el radio de torsión, así:

$$\rho = \frac{\lambda^2 \; r_0 \; e^{\lambda\Phi}}{\text{sen}\,\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{\text{cotg}\,\alpha}{\cos\beta}\right) S = aS \tag{24}$$

$$\tau = \lambda \; r_0 \; e^{\lambda\Phi} \frac{\cos\alpha}{\cos^2\beta} = \left(\frac{\lambda}{\cos\beta}\right) S = b\;S \tag{25}$$

obtenidas después de transformarlas convenientemente por medio de la ecuación (10) y donde (a) y (b) son constantes.

No queremos finalizar, sin llamar la atención sobre el hecho importante, de que estas hélices no son las geodésicas del cono de revolución, como podría muy fácil inferirse, dado que las hélices cilíndricas, son las geodésicas de los cilindros rectos correspondientes.

La demostración matemática no es complicada, pero necesita apelar a los símbolos de Christoffel de segunda especie, por lo tanto lo efectuaremos de una manera indirecta, e intuitiva, expresando el versor normal a la superficie (N), y demostrando que no coincide con el normal a la curva (η) dado por la (15), lo cual hace imposible que la curvatura geodésica de la curva sea nula, como lo exige la definición de geodésica.

Efectivamente teníamos para el cono:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \text{sen}\,\alpha \cos\phi\, \vec{i} + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\phi\, \vec{j} + \cos\alpha\, \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r\,(-\text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\phi\, \vec{i} + \text{sen}\,\alpha \cos\phi\, \vec{j})$$

$$E = 1$$

$$G = r^2\, \text{sen}^2\,\alpha \qquad \therefore \sqrt{EG - F^2} = r\, \text{sen}\,\alpha$$

$$F = 0$$

$$\vec{N} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} \wedge \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\sqrt{EG - F^2}} = -\cos\alpha \cos\phi\, \vec{i} - \cos\alpha\, \text{sen}\,\phi\, \vec{j} + \text{sen}\,\alpha\, \vec{k} \quad (26)$$

expresión que está lejos de coincidir con la (15).

Por lo tanto, el plano osculador de la curva no contiene a $\vec{N}$ y la hélice cónica de revolución no es geodésica.

△ ⊙ △