567

METODOS DE RELAJACION

ALFONSO RAMIREZ RIVERA
Profesor Asociado
Facultad de Minas.

Con el progreso de la Ciencia y de la Técnica, se presentan a la consideración del Científico y del Ingeniero problemas cada vez más complejos, cuya solución numérica requiere el empleo de métodos especiales de computación.

Entre los nuevos métodos numéricos se destaca el de Relajación, empleado inicialmente por Southwell en Inglaterra (1953). Es esencialmente un procedimiento de aproximaciones sucesivas aplicable a problemas que se dejan reducir a un sistema de ecuaciones simultáneas.

En un sistema de n funciones con n variables, el grupo de valores de las variables que anulan simultáneamente las funciones es la solución del sistema. Así, en:

$$F_1 = 7x - 2y - 29$$
$$F_2 = -x + 8y + 35$$

Los valores $x = 3$, $y = -4$, que hacen $F_1 = F_2 = 0$ son la solución.

Si se toman valores de las variables distintos de los de la solución, F_1 y F_2 serán diferentes de cero y su valor mide el grado de aproximación de los números escogidos con respecto a la solución.

En el método de relajamiento se parte de un grupo arbitrario de valores de las variables, y mediante incrementos apropiados de dichos valores se van reduciendo los de las funciones hasta llegar al grado deseado de aproximación; para esto es necesario conocer la influencia de un incremento unitario de cada variable en los valores de las funciones (operaciones unitarias).

Se puede aplicar directamente el método a la solución del problema sin reducirlo explícitamente al sistema de ecuaciones simultáneas; un buen ejemplo de lo anterior es el Método de Distribución de Momentos, desarrollado independientemente por H. Cross.

La aplicación del método se ilustrará con el siguiente ejemplo:

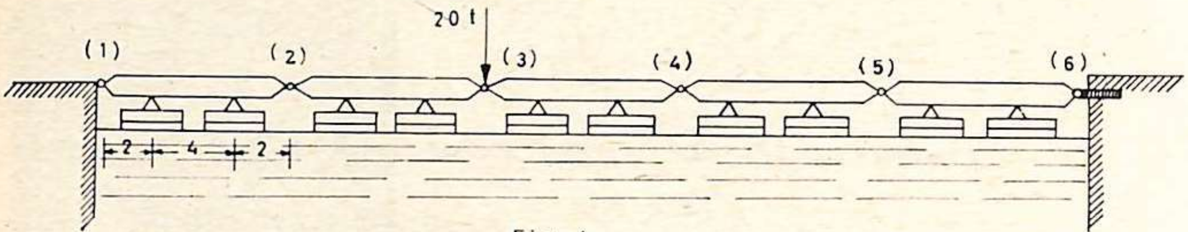

Fig 1

Se trata de analizar un puente provisional, construído con 5 plataformas articuladas de 8 m., cada una de ellas soportada por 2 balsas. Cada balsa tiene una relación boyante de 1 ton/cm.

Se va a determinar en qué forma es soportada una carga cualquiera, y el correspondiente desplazamiento vertical de las balsas. Por ejemplo, estudiemos el caso de una carga de 20 t., en el nudo 3.

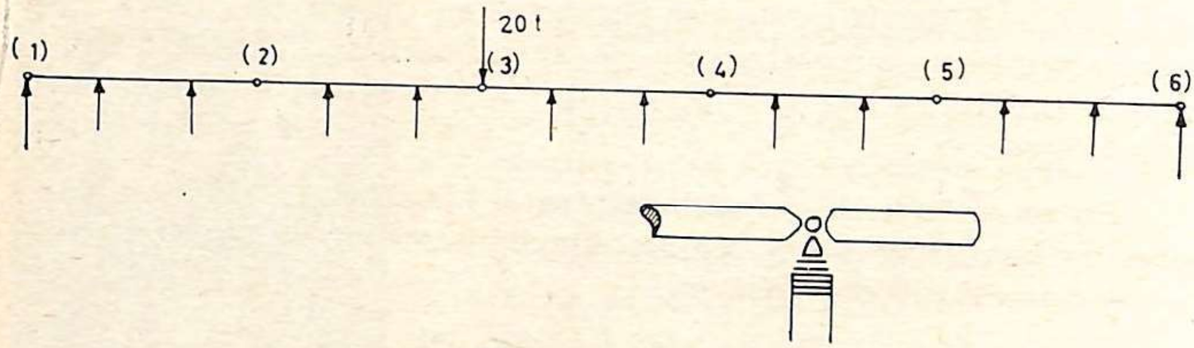

Fig 2

Las balsas y los estribos ejercen reacciones verticales que equilibran la carga y por cada articulación se transmite como cizalladura una parte de esta; la relación entre estas dos fuerzas podría tomarse como una de las ecuaciones simultáneas del problema.

Partimos de un estado inicial arbitrario de cizalladura nulas en todas las articulaciones; el estado anterior lo podríamos imaginar producido por pilotes de altura ajustable en cada uno, provistos de un aparato para medir fuerzas. Equivale a suponer todas las incógnitas iguales a cero, como primera aproximación en un sistema de ecuaciones y corresponde también al caso inicial de nudos rígidos y momentos de empotramiento en el método de Cross.

Debemos estudiar ahora el problema unitario, que en este caso es el de un desplazamiento unitario de una articulación y corresponde en el método de Cross al cálculo de los coeficientes de distribución en un nudo.

Problema unitario.

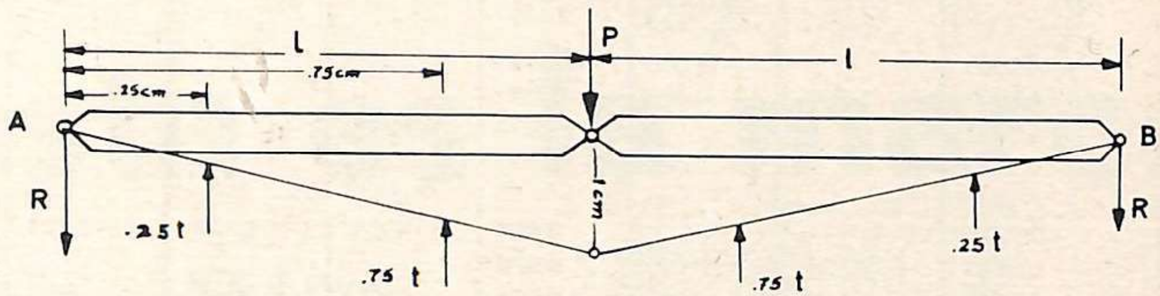

Fig. 3

Considerado el equilibrio del sistema, se pueden calcular fácilmente: P = 1.250t, R = 0.375t.

La carga en el nudo 3 está soportada inicialmente por el pilote; ahora podríamos imaginar un ajuste en la altura del pilote 3 hasta que su dinamómetro señale cero carga, así como en el proceso de distribución de momentos se suelta un nudo y este gira hasta que los momentos quedan equilibrados. La carga entonces pasa a ser soportada por las balsas de los miembros 3-2 y 3-4 y por los pilotes 2 y 4, de acuerdo con los resultados del problema unitario.

Los resultados de los problemas unitarios se tabulan en la llamada *tabla operativa*, que en este caso es:

TABLA OPERATIVA

Relajación del 1 cm. en el nudo n.

Nudos	n — 1	n	n + 1
Fuerzas residuales	—0.375	—1.250	—0.375

El proceso se continúa hasta que las fuerzas residuales (reacciones de los pilotes), sean tan pequeños como se quiera. El registro de las operaciones se llevan a la tabla de relajación.

TABLA DE RELAJACION

Fuerzas residuales

NUDO	1	2	3	4	5	6
Desplazamiento cm.			20.000			
$d_3 = +16.0000$		— 6.000	—20.000	— 6.000		
$d_2 = -\ 4.8000$	+ 1.800	+ 6.000	+ 1.800			
$d_4 = -\ 4.8000$			+ 1.800	+ 6.000	+ 1.800	
$d_3 = +\ 0.2880$		— 1.080	— 3.600	— 1.080		
$d_5 = +\ 0.1440$				— 0.540	— 1.800	
$d_4 = -\ 0.1296$			+ 0.486	+ 1.620	+ 0.486	— 0.540
$d_2 = -\ 0.8640$	+ 0.324	+ 1.080	+ 0.324			
$d_3 = +\ 0.0648$		— 0.243	— 0.810	— 0.243		
	2.124	— 0.243	0	— 0.243	+ 0.486	— 0.540

El proceso se puede suspender en cualquier momento según el grado de precisión deseado. Conociendo los desplazamientos de los nudos:

$$d_2 = -\ \ 5.6640 \text{ cm.}$$
$$d_3 = +\ 16.3528 \text{ cm.}$$
$$d_4 = -\ \ 4.9296 \text{ cm.}$$
$$d_5 = +\ \ 0.1440 \text{ cm.}$$

se pueden calcular de la tabla operativa, los valores de las cizalladuras en los nudos y en las reacciones de las balsas.

REFERENCIAS

1. "Relaxation Methods in Engineering Science"
   R. V. Southwell
   Oxford University Pren.

2. "Relaxation Methods in Engineering & Science".
   D. U. de G. Allen
   Mc Graw-Hill.

3. "Relaxation Methods"
   F. S. Shaw
   Dover Publications.