529

Sección de Matemáticas

UNA NUEVA EXPRESION PARA EL TEOREMA DE CUATRO MOMENTOS

Por el *Dr. Luis de Greiff Bravo.*
Profesor de la Facultad.

Deducción: Haciendo referencia a la Figura 1, empezaremos por escribir las fórmulas que permiten calcular las deformaciones angulares en los extremos de una viga —o elemento sometido a flexión, en general—:

$$(1)\quad \begin{cases} \theta_1 = \displaystyle\int_0^l \frac{M'\,(l-x)\,dx}{E\,l\,I_x} + M_1 \int_0^l \frac{(l-x)^2\,dx}{E\,l^2\,I_x} + M_2 \int_0^l \frac{x\,(l-x)\,dx}{E\,l^2\,I_x} \\[2ex] -\theta_2 = \displaystyle\int_0^l \frac{M'\,x\,dx}{E\,l\,I_x} + M_1 \int_0^l \frac{x\,(l-x)\,dx}{E\,l^2\,I_x} + M_2 \int_0^l \frac{x^2\,dx}{E\,l^2\,I_x} \end{cases}$$

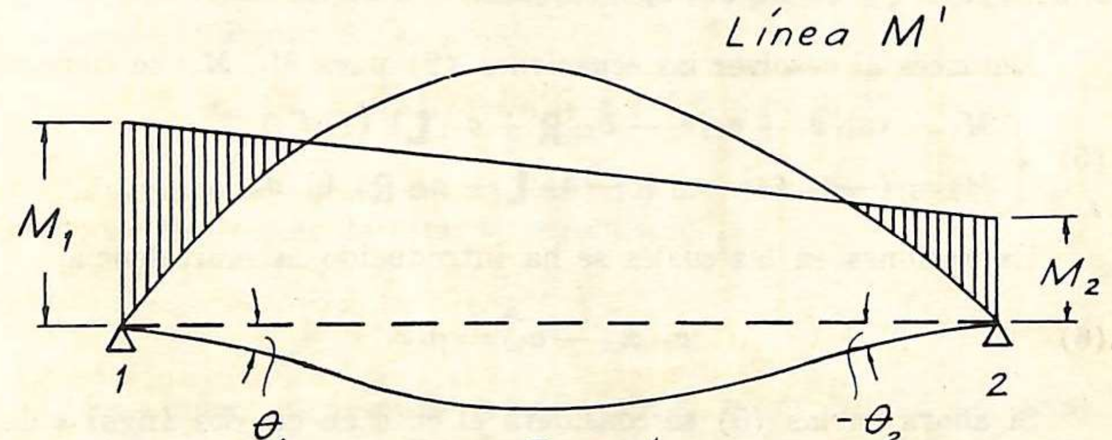

Fig. 1

Cuatro de las integrales escritas son coeficientes que dependen únicamente de la forma y del material de que están constituídas las piezas, *no de las cargas*. El sistema (1) puede escribirse, de manera abreviada, así:

$$(2)\quad \begin{cases} \theta_1 = \mathbf{R} + a_{22} M_1 + a_{12} M_2 \\ -\theta_2 = \mathbf{L} + a_{21} M_1 + a_{11} M_2 \end{cases}$$

Es conveniente hacer constar las expresiones de las constantes, a saber:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{22} = \dfrac{1}{E} \displaystyle\int_0^l \dfrac{(l-x)^2\, dx}{l^2 I_x}; \quad a_{11} = \dfrac{1}{E} \displaystyle\int_0^l \dfrac{x^2\, dx}{l^2 I_x} \\ a_{12} = a_{21} = \dfrac{1}{E} \displaystyle\int_0^l \dfrac{x\,(l-x)\, dx}{l^2 I_x} \end{cases}$$

Son ellas los momentos estáticos, de segundo orden, de los pesos elásticos, reducidos mediante división por la constante $E\, l^2$.

Recordemos que los pesos elásticos absolutos son las magnitudes,

$$(4)\quad dw = \frac{dx}{Ix}$$

En las fórmulas (3) aparecen los mencionados momentos estáticos, calculados respectivamente con relación a la vertical del apoyo 2, del apoyo 1 y de los dos apoyos (producto de inercia).

Entonces al resolver las ecuaciones (2) para M_1, M_2, se tiene:

$$(5)\quad \begin{cases} M_1 = (a_{11}\,\theta_1 + a_{12}\,\theta_2 - a_{11}\,\mathbf{R} + a_{12}\,\mathbf{L})\;(1/d_{12}) \\ M_2 = (-a_{22}\,\theta_2 - a_{21}\,\theta_1 - a_{22}\,\mathbf{L} + a_{21}\,\mathbf{R})\;(1/d_{12}) \end{cases}$$

Expresiones en las cuales se ha introducido la equivalencia,

$$(6)\quad a_{11}\, a_{22} - \overline{a_{12}}^{\,2} = d_{12}$$

Si ahora en las (5) se considera el caso en que los ángulos de deformación en los apoyos son nulos, o sea:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

se obtendrán los correspondientes *momentos de empotramiento*, los cuales se indican aquí con asteriscos:

$$(7) \quad \begin{cases} M_1^* = (-a_{11}\,\mathbf{R} + a_{12}\,\mathbf{L})\ (1/d_{12}) \\ M_2^* = (-a_{22}\,\mathbf{L} + a_{21}\,\mathbf{R})\ (1/d_{12}) \end{cases}$$

Entonces las (5) se pueden escribir como sigue:

$$(8) \quad \begin{cases} M_1 = (a_{11}\,\theta_1 + a_{12}\,\theta_2)\ (1/d_{12}) + M_1^* \\ M_2 = (-a_{22}\,\theta_2 - a_{21}\,\theta_1)\ (1/d_{12}) + M_2^* \end{cases}$$

Si ahora en las ecuaciones (8) eliminamos θ_1, se obtiene,

$$(9) \qquad a_{21}\,M_1 + a_{11}\,M_2 = -\,\theta_2 + a_{21}\,M_1^* + a_{11}\,M_2^*$$

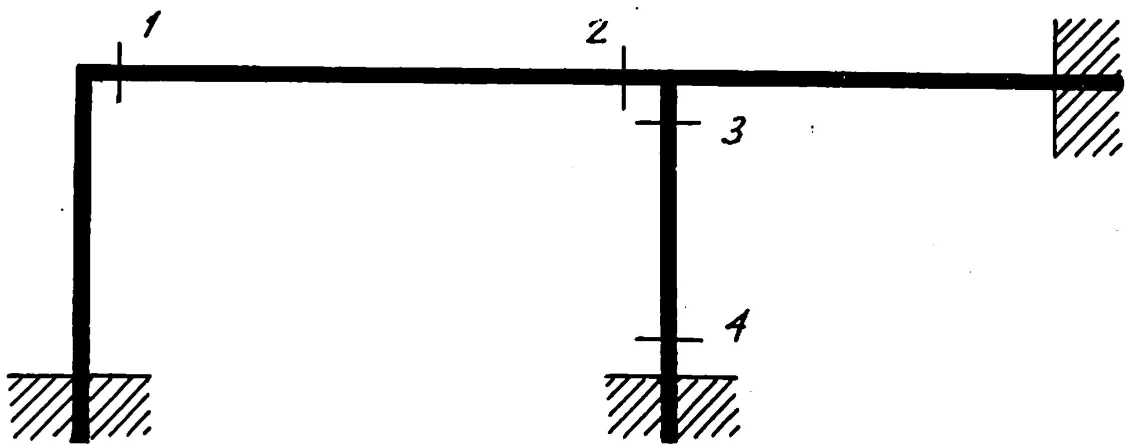

Fig. 2

Aplicando las ecuaciones (8) a la pieza siguiente de una estructura continua (sírvanos de ejemplo la columna 3-4 de la figura 2), para lo cual basta aumentar dos unidades a los índices, y eliminando después el ángulo θ_4, se tiene,

$$(10) \qquad a_{44}\,M_3 + a_{34}\,M_4 = \theta_3 + a_{44}\,M_3^* + a_{34}\,M_4^*$$

Advertimos de paso que la (10) puede obtenerse de (9) efectuando en los índices de ésta, la permutación,

$$\begin{pmatrix} 1\,,2 \\ 4\,,3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, los ángulos de inflexión θ_2, θ_3, en virtud del principio de continuidad son iguales en valor absoluto, con lo que sumando la (9) y la (10) teniendo en cuenta que según lo explicado es,

$$(11) \qquad -\,\theta_2 + \theta_3 = 0$$

se llega a la relación final,

$$(12) \qquad a_{21} M_1 + a_{11} M_2 + a_{44} M_3 + a_{34} M_4$$
$$= a_{21} M_1^* + a_{11} M_2^* + a_{44} M_3^* + a_{34} M_4^*$$

forma interesante de la *ecuación de cuatro momentos* que nos hace ver cómo el primer miembro de la ecuación permanece *invariante* cuando se sustituyen los momentos extremos de las piezas, por los momentos de empotramiento correspondientes.

La ecuación de tres momentos, utilizada en vigas continuas, se obtiene de la anterior con solo escribir,

$$(13) \qquad M_2 = M_3$$

La homogeneidad de las (12) hace desaparecer el módulo de elasticidad, E, convirtiéndose las constantes "a" en simples constantes geométricas.

Las designaciones empleadas en este artículo son de uso frecuente, no obstante lo cual pormenorizamos las principales:

M', momento de flexión isostático o de viga simple, en la abscisa x, medida a partir de la extremidad izquierda;

M_1, momento de flexión debido a la continuidad, en la sección de la izquierda, (1);

M_2, momento de flexión debido a la continuidad, en la sección de la derecha, (2);

I_x, momento de inercia de flexión en la abscisa x;

θ_1, θ_2, deformaciones angulares en las extremidades izquierda y derecha de la viga o, lo que es lo mismo, pendientes de la curva elástica en (1) y (2) respectivamente.