Deducción Analítica de la Ecuación que Relaciona el Concepto de Temperatura con los Conceptos de la Mecánica

Por el *Dr. Jorge Mejía R.*,
Profesor de la Facultad.

Si N es el número total de moléculas contenido en una masa dada de gas, que a ciertas condiciones de temperatura y presión (P, T), ocupan un volumen V, la teoría cinética de los gases nos lleva al conocido resultado,

$$PV = Nmc^2/3 \qquad (1)$$

el cual nos permite calcular la velocidad media de las moléculas del gas puesto que Nm será su masa y Nm/V su densidad; entonces,

$$c = \sqrt{3P/d}$$

En los textos de Física, y aun en tratados de Termodinámica, se da como definición de temperatura, en la teoría cinética de los gases, a la expresión,

$$mc^2/2 = 3KT/2 \qquad (2)$$

resultado al que se llega al igualar a $n R T$ el lado derecho de la igualdad (1). La constante K, llamada constante de Boltzmann, tiene por valor,

$$K = R/A = 8.31 \times 10^7 \div (6.02 \times 10^{23}) = 1.37 \times 10^{-16} \textit{ ergios/mol. } {}^{o}K$$

en donde R es la constante universal de los gases y A el número de Avogadro.

Y bien, es cierto que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, pero desde el punto de vista físico el paso para llegar a (2) no es de evidencia inmediata; el objeto de este artículo es el de llegar al mismo resultado por medio de consideraciones más razonables.

Supongamos que el gas en las condiciones iniciales se dejara expandir, adiabáticamente, hasta agotar totalmente su energía interna;

es decir, hasta que su temperatura descienda hasta el cero absoluto. El trabajo que realizaría el gas valdría,

$$W = \int_{V}^{\infty} p\,dv = K \int_{V}^{\infty} v^{-\gamma} dv = K\, v^{1-\gamma}/\gamma-1$$

y como $PV^{\gamma} = K$,

$$\Delta\, W = PV/\gamma-1$$

recordando que $C_p/C_v = \gamma$ y que $C_p - C_v = R$, al resultado anterior podremos darle entonces la forma,

$$\Delta\, W = PVC_v/R \qquad (3)$$

Como según la primera ley de la termodinámica $AQ = AU + AW$ y en un proceso adiabático como el anterior, $AQ = O$, tendremos, como ya se había dicho,

$$\Delta\, W = -\Delta\, u \qquad (4)$$

Ahora, si volviéramos a las condiciones iniciales y fuéramos sustrayendo calor del gas, permaneciendo constante su volumen, hasta llevar su temperatura al cero absoluto, en el supuesto de que C_v permaneciera constante durante todo el proceso, la cantidad de calor que habría que sustraer valdría,

$$\Delta Q = nC_vT = NC_vT/A \qquad (5)$$

como en este nuevo proceso $AW = O$, la primera ley de la termodinámica nos daría para este caso,

$$-\Delta Q = \Delta u \qquad (6)$$

las igualdades (4) y (6) nos dan,

$$\Delta Q = \Delta W$$

relación que nos permite igualar los resultados (3) y (5),

$$PVC_v/R = NC_vT/\mathrm{A} \qquad (7)$$

combinando las ecuaciones (1) y (7) obtenemos finalmente,

$$Nmc^2C_v/3R = NC_vT/A$$

y por lo tanto,

$$mc^2/2 = 3\,RT/2A = 3\,KT/2$$

que es el resultado al cual deseábamos llegar.

Otro razonamiento que nos permite llegar al mismo resultado sería el siguiente: supongamos que mediante una expansión adiabática llevamos el gas de las condiciones iniciales, (P_1, V_1, T_1), a las condiciones finales, (P_2, V_2, T_2). La ecuación (1) nos permite escribir,

$$P_1V_1 = Nmc_1^2/3$$

$$P_2V_2 = Nmc_2^2/3$$

valores que restados dan, quitando denominadores,

$$3(P_1V_1 — P_2V_2) = N(mc^2{}_1 — mc^2{}_2) \qquad (8)$$

el lado derecho de la igualdad anterior nos representa el doble de la pérdida de energía cinética de las moléculas que componen la masa gaseosa dada.

Ahora, si al miembro del lado izquierdo lo multiplicamos y dividimos por el factor $(\gamma — 1)$ encontramos en él el valor conocido para el trabajo efectuado al pasar de uno a otro estado, expresión que transformamos en su equivalente,

$$3[(P_1V_1 — P_2V_2)/(\gamma — 1)]\ (\gamma — 1)/2 =$$
$$3[nR(T_1 — T_2)/(\gamma — 1)]\ (\gamma — 1)/2 \qquad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9), una vez cancelado el factor común, que habíamos introducido nos dan,

$$3nR(T_1 — T_2) = N(mc_1^2/2 — mc_2^2/2)$$

resultado del cual obtenemos finalmente,

$$3nR(T_1 — T_2)/N = mc_1^2/2 — mc_2^2/2$$

y recordando que $n = N/A$ y que $R/A = K$,

$$3K(T_1 — T_2) = mc_1^2/2 — mc_2^2/2$$

y por las propiedades de las proporciones,

$$(mc_1^2/2 — mc_2^2/2)/(T_1 — T_2) = (mc_1^2/2)/T_1 = (mc_2^2/2)/T_2 = 3K$$

Indudablemente, en esencia, no hemos hecho otra cosa que substituír al producto PV por su equivalente $n\,R\,T$ pero hemos llegado al resultado final igualando el trabajo realizado por el gas con la pérdida de energía cinética de sus moléculas, que sí son conceptos físicos equivalentes.