FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VI, PÁGINAS 253-275
ISSN: 1885-2912

RESPUESTAS DEL ALUMNADO DE MAGISTERIO A UN CUESTIONARIO SOBRE NÚMEROS DECIMALES

María Dolores Moreno Martel
Víctor M. Hernández Suárez
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Martín M. Socas Robayna
Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presentan algunos de los elementos que componen el estudio de un problema de investigación sobre números decimales. El problema se centra, por una parte, en el análisis del concepto de número decimal que poseen nuestros alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de la ULPGC y de las relaciones que éstos establecen entre los conjuntos numéricos estudiados y, por otra parte, en el estudio de un programa de Formación. En la elaboración de este programa se formulará como objetivo básico la construcción clara del conjunto de los números decimales, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas numéricos.

En este artículo se tratan solamente los aspectos que corresponden a la elaboración de un cuestionario inicial, su aplicación y la descripción básica de los resultados.

Abstract

In this work we present some elements of an investigation of decimal numbers. On the one hand the problem is focused on the analysis that our pupils from the Teaching Training Faculty of ULPGC have of the concept of decimal numbers and of the relationships that they establish between the studied numerical sets. On the other hand, on the study of a Teachers Training Program. In the elaboration of this Program, the clear construction of the set of decimal numbers in the process of teaching and learning of numerical systems will be formulated as a basic objective.

This article only refers to the aspects that correspond to the elaboration of an initial questionnaire, its application and the basic description of the obtained results.

Consideraciones generales

El estudio de los números decimales se inicia desde los primeros años de escolaridad. Se comienza por el conjunto de los números naturales y éste se va ampliando hasta incorporar el conjunto de los números racionales decimales.

A lo largo de este proceso de enseñanza y aprendizaje, el papel de las representaciones externas es clave para la formación del concepto de número decimal. Es sabido que la interiorización de estas representaciones contribuye al desarrollo de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos. Por lo general, las ideas vienen expresadas mediante varios sistemas de representación. Cada uno de ellos le proporciona una caracterización distinta, es decir, destaca algunas propiedades de la noción representada y dificulta la comprensión de otras. En este orden de cosas, Duval indica que la comprensión de un concepto matemático está relacionada con el dominio de la coordinación entre sus sistemas de representación. Asimismo, algunas veces se identifica el concepto con una de sus representaciones. Este hecho se pone de manifiesto en la siguiente definición de número decimal:

El número 423,587 es un número decimal. Se compone de dos partes: la entera, a la izquierda de la coma, y la decimal, a la derecha de la coma (Vizmanos, J. y otros, 2000, p.85).

Por otro lado, el análisis de los libros de textos de la Educación Secundaria Obligatoria pone de manifiesto que en la mayor parte de ellos se iguala el conjunto de los números decimales con el de los números reales:

Hay tres tipos de números decimales.

Exactos: tienen un número finito de cifras decimales.

Periódicos. Tienen infinitas cifras decimales periódicas.

Un arco encima de algunas cifras indica que éstas se repiten periódicamente. $0{,}8\widehat{2} = 0{,}82222.....$

No exactos y no periódicos: tienen infinitas cifras decimales no periódicas (Colera, J. y otros, 1996, p. 76).

Por todo ello, tal y como señala Socas (2002): *la enseñanza –aprendizaje en torno a los diferentes sistemas numéricos tiene en el conjunto D de los números decimales (fracciones decimales), un conjunto que emerge de manera confusa dentro de los sistemas numéricos.*

El aprendizaje de los números decimales constituye un problema didáctico de gran interés. Sabemos que muchos alumnos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)], y, éstas no se subsanan correctamente en los estudios universitarios.

Especial interés para la Didáctica de la Matemática tiene la imagen mental que el profesorado de Primaria y Secundaria adquiere sobre los Sistemas Numéricos en general y los números decimales en particular.

En el ámbito de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, (Socas, 2001) estudia a 67 alumnos de 5º curso de Ciencias Matemáticas, especialidad de Matemática Fundamental, durante los cursos 1993-97, mediante la realización de actividades en las que se pedían que señalaran qué números estaban representados por determinadas expresiones semióticas. Observa en estos alumnos dos tendencias en relación con los números decimales. La primera, se caracteriza por identificar el "número decimal como sinónimo de número real" (87%). La segunda, aunque minoritaria en este grupo de alumnos, es también significativa, y se caracteriza por identificar el "número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas" (15%).

Con la finalidad de analizar la problemática de los números decimales en los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado, nos planteamos este trabajo de investigación.

Inicialmente, nos hacemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué competencias tienen nuestros alumnos de la Facultad en relación con los números decimales?
- ¿Qué imagen mental tienen del número decimal?
- ¿Establecen correctamente las relaciones entre los diferentes Sistemas Numéricos: $N \subset Z \subset D \subset Q$; $Q \cup I = R$ y $Q \cap I = \Phi$?

La conjetura inicial es que en este grupo de alumnos el conjunto *D* de los números decimales (fracciones decimales) es caracterizado erróneamente dentro de los sistemas numéricos, y que la tendencia mayoritaria en los estudiantes de la Facultad de Formación del Profesorado, es identificar al número decimal con su escritura decimal, tendencia minoritaria, que se da en aquellos con una sólida formación matemática (5º curso de la Facultad de Matemáticas) (Socas, 2001).

En este trabajo nos centraremos en los dos objetivos siguientes:

- Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.

- Analizar qué significados conceptuales y procedimentales de número decimal tienen los alumnos y qué relaciones establecen entre los conjuntos numéricos estudiados.

Esto lo abordaremos previa construcción de un cuestionario como instrumento para la recogida de la información, de manera que en este artículo trataremos los aspectos que se corresponden con la elaboración del cuestionario, su aplicación y descripción básica de los resultados, en término de los dos objetivos anteriores.

Diseño y Administración del Cuestionario

Diseño

Para recoger información que nos permita encontrar respuestas a las preguntas formuladas hemos elaborado un cuestionario con 38 preguntas, la mayoría de respuesta múltiple. Este cuestionario se ha diseñado teniendo en cuenta tres aspectos de los números decimales: funcional, fenomenológico y conceptual, que organizan el modelo de competencia formal de los números decimales y describen el significado institucional que se atribuyen a los mismos en este nivel temático (Educación Secundaria).

En el aspecto funcional distinguiremos el uso y la utilidad de los números decimales en diferentes contextos. En el aspecto fenomenológico distinguiremos: el orden, la densidad, las representaciones, así como las relaciones con los otros números. En el aspecto conceptual consideramos los significados conceptual y procedimental de los números decimales.

A efectos prácticos se distribuyen en los siguientes ejes temáticos:

- Significado conceptual de número decimal.
- Significado procedimental: Operaciones con números decimales.
- Orden en los números decimales.
- Densidad de los números decimales.
- Representaciones
- Relaciones con otros conjuntos numéricos.
- Uso y utilidad de los números decimales.

Las cuestiones están diseñadas no sólo para que se puedan estimar los conocimientos y destrezas, sino para detectar habilidades, para aplicar procedimientos y resolver problemas.

Las preguntas tienen su origen en los siguientes trabajos, a saber: Brown en Hart (1981), Centeno (1988), Socas (2001), así como actividades tomadas de libros de texto y de elaboración propia.

Los objetivos que nos proponemos son:

- Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales.

- Analizar qué significados conceptuales y procedimentales de número decimal tienen los alumnos y qué relaciones establecen entre los conjuntos numéricos estudiados.

Administración y criterios de corrección

El cuestionario se aplicó a un grupo de 36 alumnos, correspondiente al primer curso de Maestros de la especialidad de Educación Infantil, de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Se realizó en dos sesiones, en días distintos, de una hora cada una, en la primera semana de clases después de las vacaciones de Navidad.

La corrección del cuestionario nos permitirá expresar el primer objetivo en términos de competencias específicas que tienen los alumnos encuestados. Se considerarán tres niveles de competencias: alta, más del 75 %, media entre el 25% y el 75 %, y baja menos del 25 %.

El segundo objetivo será analizado en términos de dificultades y errores que tienen los alumnos.

Análisis e interpretación de resultados

En relación con el primer objetivo observamos que la mayoría de los alumnos tiene competencias altas en las cuestiones siguientes (más del 75% es capaz de):

- Significado procedimental: Operaciones con números decimales:

• Realizar sumas y restas de números decimales expresados en escritura decimal.

- Multiplicar un número por una décima.
- Buscar el decimal que se aproxima más a 59 ÷ 190, entre varios.
- Redondear a centésimas y a milésimas el número 4,256197.

  - Orden en los números decimales:
- Ordenar números decimales positivos según su escritura decimal.
- Ordenar fracciones.
- Indicar entre que números enteros se encuentra un decimal positivo.
- Intercalar un decimal entre 1,23 y 1,24.

  - Representaciones:
- Pasar de la representación gráfica (contexto discreto) a la escritura decimal o a la fracción decimal de un número.
- Situar números decimales positivos en la recta numérica.
- Elegir como posibles formas de representar el 0,5: 0,500 (89 %); 1/2 (100%) y 50% (78%).
- Representar en la recta numérica un número racional.
- Elegir, entre varios, el decimal que se aproxima a $2^{1/2}$ representado en la recta numérica.

  - Relaciones con otros conjuntos numéricos:
- Relacionar la expresión decimal con la fracción correspondiente.
- Obtener la expresión decimal de una fracción cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.

  - Uso y utilidad de los números decimales:
- Usar la ampliación del Sistema de Numeración Decimal para representar los números decimales.
- Elegir la operación correcta para resolver un problema.
- Interpretar una expresión numérica en la que se hace uso de la notación

científica.

- Elegir como solución de la división 251 ÷ 99, en una situación contextualizada, una aproximación decimal.
- Averiguar si dos fracciones son equivalentes en una situación contextualizada.

La mayoría de los alumnos tiene Competencias medias en las cuestiones siguientes (entre el 25% y el 75% es capaz de):

- Significado procedimental: Operaciones con números decimales:

- Multiplicar dos números decimales expresados en escritura decimal.
- Operar números racionales en escritura decimal periódica.
- Dividir un número por una centésima.
- Redondear a unidades y a cienmilésimas.
- Redondear a centésimas 13/17, 127/438 y 11/3.
- Obtener la expresión decimal de una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.
- Encontrar una fracción decimal equivalente a 87/5.
- Elegir la fracción generatriz de $0{,}512\overset{\frown}{4}$.

- Orden en los números decimales:

- Ordenar números decimales, positivos y negativos.

- Densidad de los números decimales.

- Reconocer la densidad del conjunto de los decimales.

- Representaciones:

- Pasar de la representación gráfica de un número decimal, en un contexto continuo, a su escritura decimal.
- Situar números decimales negativos en la recta numérica.

- Representar en la recta numérica un número irracional.

  - Uso y utilidad de los números decimales:

- Inventar una historia para la suma: 6,4 + 2,3 = 8,7.

La mayoría de los alumnos tiene Competencias bajas en las cuestiones siguientes (menos del 25% es capaz de):

- Significado conceptual de número decimal:

- Identificar números decimales entre diferentes números reales: naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales.
- Igualar 0,5 con 0,49999…

  - Significado procedimental: Operaciones con números decimales:

- Encontrar una fracción decimal equivalente a cada una de las siguientes: 5/4, 7/2, 23/20.
- Redondear a centésimas 1/13.
- Reconocer que la división de decimales no es siempre un decimal.
- Dividir decimales expresados en escritura decimal.
- Efectuar mediante fracciones una operación de números decimales expresados en escritura decimal.

  - Orden en los números decimales:

- Indicar entre que números enteros se encuentra un decimal negativo.

  - Densidad de los números decimales.

- Indicar cuántos números decimales pueden escribirse entre dos dados.

  - Representaciones:

- Recodificar un número entero, es decir, expresar un número entero mediante un número decimal cuando tomamos como unidad un orden mayor, por ejemplo: la unidad de millar.

  - Relaciones con otros conjuntos numéricos:

- Identificar y relacionar números entre los distintos conjuntos numéricos.
  - Uso y utilidad de los números decimales.
- Inventar una historia para la división: 1,5 ÷ 0,6 = 2,5.

Si ahora tomamos en consideración las tres capacidades generales asociadas a cualquier objeto matemático: reconocer y diferenciar el objeto, formular y manipular el objeto, de los resultados anteriores relativos a las capacidades específicas analizadas, podemos observar que estos alumnos, tienen dificultades para reconocer y diferenciar y para formular los números decimales, no tanto para operar con ellos, salvo en operaciones relacionadas con la división.

En relación con el orden entre los números decimales, éste es reconocido, formulado y manipulado en contextos positivos, no así cuando los números son negativos. Igualmente sucede con la densidad, ésta es reconocida, formulada y manipulada en procesos finitos, no así en procesos infinitos.

También las representaciones consideradas en este nivel temático son reconocidas, formuladas y manipuladas en un nivel aceptable.

No ocurre así con el reconocimiento y la diferenciación entre los números en los diferentes conjuntos numéricos. Hay verdaderas dificultades para relacionar los diferentes números.

Dificultades y errores

Como ya hemos indicado con anterioridad, el segundo objetivo será analizado en términos de dificultades y errores que tienen los alumnos. Dada la amplitud del cuestionario y el amplio número de errores obtenidos hemos seleccionado, a título de ejemplo, para mostrar y analizar estas dificultades, así como los errores que cometen, las preguntas 24, 27 y 29 del cuestionario, que tienen que ver con las dificultades conceptuales, con los problemas asociados a la densidad y con el reconocimiento y la relación entre los diferentes números y conjuntos numéricos, respectivamente.

En primer lugar consideramos la pregunta número 24 del cuestionario, cuyo objetivo es obtener información sobre el concepto de número decimal que los alumnos encuestados poseen. El recuadro siguiente recoge la pregunta tal y como la presentamos:

24 . Marca con un Sí los números decimales y explica brevemente tu respuesta:

-3,9		
0		
¼		
2		
$1+\sqrt{2}$		
10/5		
π		
-7/3		
0,666...		
$(\sqrt{2})^2$		
-3		
$1,3\widehat{5}$		
1,73205008....		
$\pi - 5$		
0,5		
$3 - \sqrt{3}$		
-1/3		
1,48		
$(1+\sqrt{5})/2$		

Hemos de señalar que esta pregunta no es contestada correctamente por los 36 alumnos encuestados.

Los errores más comunes y significativos cometidos por los alumnos son los siguientes:

1) Identifican el número decimal como un número con comas o con la escritura decimal (tendencia mayoritaria).

a)

0,666… es decimal porque lleva coma.

En relación con estas respuestas uno de los encuestados se aventura a dar una definición de número decimal:

Los números decimales son aquéllos que separan un número entero de los demás por medio de una coma.

Ej.: $4, \underbrace{213}$

$\underbrace{\textit{Nº entero} \quad \textit{números decimales}}_{\textit{Nº decimal}}$

b) En algunos casos se precisa que el número es decimal porque está compuesto por décimas, centésimas, etc.

-3,9 es decimal porque tiene décimas.

c) En otras ocasiones, se explica que un número es decimal porque hay un número después de la coma:

-7/3 = - $2,\widehat{3}$ *es decimal pues hay un número después de la coma y periódico.*

π *es decimal ya que hay decimales después de la coma y es infinito.*

d) Identificación de número irracional con una aproximación decimal:

π *es decimal porque es 3,14*

$1+\sqrt{2}$ *es decimal porque el resultado es un número decimal 2,4.*

e) Hay decimales que se obtienen al operar con números y otros que lo son por sí solos:

-3,9 es un decimal por sí solo.

$1+\sqrt{2}$ *es decimal porque el resultado es 2,41.*

e) Un escritura decimal periódica es un número decimal:

$1,3\widehat{5}$ *es decimal porque es un número decimal periódico.*

2) Clasifican a los números no decimales por la ausencia de comas en su representación.

a) Los naturales no son decimales:

El 2 no es decimal porque es un número entero.

b) Los enteros negativos no son decimales:

-3 no es decimal porque es un entero negativo.

d) El cero no es decimal:

El cero no es decimal porque significa que no tiene valor numérico.

3) Seleccionan a los números decimales tomando como referencia las fracciones y la escritura decimal.

a) Las fracciones no son decimales:

1/4 no es decimal porque es una fracción.

-1/3 no es decimal porque es una fracción negativa.

b) Las fracciones son números decimales:

-1/3 es decimal porque es un número fraccionario.

c) Los números decimales son el resultado de una división:

-1/3 es decimal porque al resolver la fracción no da exacta.

1/4 es decimal porque es una fracción y su resultado da un número decimal ya que el numerador es menor que el denominador.

La posición más común es que los números decimales son los números con coma o los que pueden expresarse mediante una escritura decimal. Los no decimales son los enteros o los fraccionarios, al pensar que no admiten una escritura con comas.

Para mostrar las dificultades y errores que cometen los alumnos en el problema de la densidad, hemos seleccionado la pregunta número 27 del cuestionario:

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

En esta pregunta se da un 36% de aciertos. El resto, 64%, tiene dificultades para reconocer, formular y manipular los infinitos números decimales entre 1,23 y 1,24.

El error más común cometido por los alumnos, es considerar que sólo hay un número finito de números decimales, en particular nueve o diez números. Las respuestas más comunes son:

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

$\boxed{1,23}$; 1,231; 1,232; 1,233; 1,234; 1,235; 1,236; 1,237; 1,238; 1,239; $\boxed{1,24.}$

Porque del 1,23 al 1,24 hay nueve espacios hasta llegar al 1,239.

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

9 números: 1,231; 1,232; 1,233; 1,234; 1,235;
1,236; 1,237; 1,238; 1,239

27. ¿Cuántos números pueden escribirse entre 1,23 y 1,24? Razona la respuesta.

1'23, 1'230 1'231, 1'232, 1'233, 1'234, 1'235, 1'236, 1'237, 1'238, 1'239,
1'24. Se podrían escribir 10 nºs más.

En otros estudios relativos a la densidad, se observan las mismas dificultades; por ejemplo, en el realizado por Brown y recogido en Hart (1981), los alumnos de 15 años dieron respuestas similares a las anteriores, a la pregunta sobre cuántos números distintos podrías escribir comprendidos entre 0,41 y 0,42, con un porcentaje del 38%.

Finalmente, pasamos a comentar la pregunta número 29 que tiene por objeto obtener información sobre el reconocimiento y la relación que los alumnos establecen entre los números de los diferentes conjuntos numéricos.

Veamos los diferentes errores encontrados.

Un ejemplo de respuesta bastante común se recoge en el siguiente cuadro 1:

	Natural	**Entero**	**Decimal**	**Racional**	**Irracional**	**Real**
-2,062	Sí	No	Sí	No	No	No
35.521	Sí	Sí	No	No	No	Sí
3/5	Sí	No	No	Sí	No	Sí
π	Sí	No	Sí	No	No	Sí
-1/2	Sí	No	No	Sí	No	No
0,63	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$-\sqrt{7}$	Sí	No	No	No	Sí	No
0,123456…	Sí	No	Sí	No	No	Sí
3,14	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$\sqrt{81}$	Sí	No	No	No	Sí	Sí

Se puede observar como:

- Todos los números que son identificados mediante una escritura con comas son decimales (π es considerado como 3,14).

- Los reales son todos menos los negativos.

- Todos son naturales.

- El único entero es el 35521.

En el segundo cuadro se observa otro tipo de interpretaciones erróneas que parte de una idea correcta: todos los números son reales.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
35.521	SÍ	NO	NO	NO	NO	SÍ
3/5	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
π	NO	NO	NO	NO	NO	SÍ
-1/2	NO	NO	NO	SÍ	NO	SÍ
0,63	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ
0,123456...	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
3,14	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
$\sqrt{81}$	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

De nuevo, las interpretaciones erróneas conducen a:

- Los decimales son los que explícitamente llevan comas, no los que sean susceptibles de escribirse como una expresión decimal con comas.

También surgen otras interpretaciones como:

- Las fracciones son los únicos racionales.
- Las raíces son irracionales.

Un tercer tipo de respuestas, se recoge en el tercer cuadro, y parte nuevamente de la misma idea correcta anterior: todos los números son reales, sin embargo, ahora la única condición para los decimales es que no sean enteros.

Otro tipo de interpretación errónea es la consideración de ser un número natural si no es negativo.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Sí	No	No	Sí
35.521	Sí	Sí	No	No	No	Sí
3/5	Sí	No	Sí	No	No	Sí
π	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
-1/2	No	No	Sí	No	No	Sí
0,63	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$-\sqrt{7}$	No	No	Sí	No	Sí	Sí
0,123456…	Sí	No	Sí	No	No	Sí
3,14	Sí	No	Sí	No	No	Sí
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí

En el cuadro 4, encontramos nuevamente que todos los números son reales salvo π, aunque en este caso se refleja la duda del alumno. Se vuelve a identificar a los números decimales como cualquier número, excepto los enteros ya que no es posible expresarlos con una escritura con comas.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	Si	NO	NO	Si
35.521	Si	Si	NO	NO	NO	Si
3/5	Si	NO	Si	Si	NO	Si
π	NO	NO	Si	NO	Si	NO
-1/2	NO	NO	Si	Si	NO	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$-\sqrt{7}$	NO	NO	Si	NO	Si	Si
0,123456…	Si	NO	Si	NO	NO	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$\sqrt{81}$	NO	Si	NO	Si	Si	Si

El quinto cuadro es una confirmación de los datos obtenidos anteriormente: todos son reales y todos son decimales menos lo enteros (ahora la duda está en la raíz cuadrada de 81). No obstante hay una identificación especial en este grupo de estudiantes: la identificación entre número decimal e irracional.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	Si	NO	Si	NO	Si	Si
35.521	Si	Si	NO	Si	NO	Si
3/5	Si	NO	Si	NO	Si	Si
π	NO	NO	Si	NO	Si	Si
-1/2	Si	NO	Si	NO	Si	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	Si	Si
$-\sqrt{7}$	Si	NO	Si	NO	Si	Si
0,123456…	Si	NO	Si	NO	Si	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	Si	Si
$\sqrt{81}$	Si		Si	NO	Si	Si

Los siguientes cuadros 6 y 7, nos muestran un elemento común que parece regir la organización mental de estos alumnos: todos los números son decimales, menos los enteros que son naturales y en consecuencia reales (cuadro 6), o menos los enteros que son identificados como enteros (cuadro7).

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
35.521	Sí	Sí	No	Sí		Sí
3/5	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
π	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
-1/2	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
0,63	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
$-\sqrt{7}$	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
0,123456…	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
3,14	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SÍ			NO
35.521	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ
3/5	NO	NO	SÍ			SÍ
π	NO	NO	SÍ			SÍ
-1/2	NO	NO	SÍ			NO
0,63	NO	NO	SÍ			SÍ
$-\sqrt{7}$	NO	NO	SÍ			NO
0,123456…	NO	NO	SÍ			SÍ
3,14	NO	NO	SÍ			SÍ
$\sqrt{81}$	SÍ	SÍ	NO			SÍ

El último cuadro que tomamos como ejemplo es el 8, que también confirma la situación anterior: todos los números son decimales menos los enteros. Sin embargo, ahora el estudiante tiene muchas dudas y no encuentra un referente claro para los dos enteros que no son decimales (al 35 521, lo sitúa correctamente como natural y a la $\sqrt{81}$, como racional.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	Si	NO	Si	NO		
35.521	Si	Si	NO	NO		
3/5	Si	NO	Si	NO		
π	-	NO	Si	NO		
-1/2		NO	Si	NO		
0,63		Si	Si	NO		
$-\sqrt{7}$		NO	Si	Si.		
0,123456…		Si	Si	NO		
3,14		Si	Si	NO		
$\sqrt{81}$		Si	NO	Si		

Consideraciones finales

Hemos de señalar, en primer lugar, que el uso del cuestionario nos ha resultado útil para detectar y organizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas, si bien este instrumento es insuficiente para un análisis mas detallado de los errores, es necesario para seguir profundizando en los mismos realizar entrevistas clínicas con los alumnos que nos proporcionaran más pistas sobre los procesos seguidos a la hora de responder a las preguntas y nos aportaran más información sobre el origen de los errores.

En general los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas, sin embargo hay algunos errores que se han repetido en relación con los números decimales y los Sistemas Numéricos. En resumen:

- Los alumnos muestran confusión con la terminología: naturales, enteros, decimales, etc.
- Las relaciones ($N \subset Z \subset D \subset Q$; $Q \cap I = R$ y $Q \cap I = \Phi$) entre los sistemas numéricos no se establecen de forma clara.
- La identificación de los números se lleva a cabo por su escritura y no por sus propiedades numéricas.

Esta última situación no se detecta únicamente en los números decimales, sino también en los números racionales. Éstos son identificados por su escritura fraccionaria, es decir, el número racional se identifica como el cociente de dos números enteros.

En general, algunos de estos errores también han sido descritos en otros trabajos anteriores y con otros grupos de alumnos, tal y como señalan (Robinet (1986), Fischbein (1994) y Socas (2001)).

En segundo lugar, como hemos indicado con anterioridad, en Socas (2001) se describe para alumnos de 5º curso de la Licenciatura de Matemáticas, dos tendencias en relación con los números decimales. La primera: "el número decimal como sinónimo de número real" (87%). La segunda: "el número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas" (15%). En este trabajo con estudiantes de la especialidad de Educación Infantil, tomábamos la segunda posición como conjetura para un grupo de alumnos con una formación matemática más débil. Hemos de señalar de los resultados obtenidos, que de nuevo nos encontramos con las dos posiciones extremas, sólo que ahora la más significativa es la segunda, lo que evidencia la conjetura de partida, además, ahora nos encontramos también con otras posiciones intermedias que entremezclan las dos posiciones extremas, en este grupo de alumnos.

En tercer lugar, queremos indicar que la presencia en las Facultades de Formación del Profesorado de estos niveles de dificultad asociados a los Sistemas Numéricos, en general, y a los números decimales, en particular, nos sugiere la necesidad de cuidar el tratamiento de estos aspectos en la Formación del Profesorado, organizando propuestas de enseñanza-aprendizaje más coherentes y en consonancia con estos errores preconcebidos. Pensamos que muchos de los errores tienen su origen en una ausencia de sentido, concretamente están relacionados con cuestiones que se han desarrollado erróneamente en la Educación Primaria y Secundaria. De aquí, que sea importante poner de manifiesto estas imágenes mentales erróneas de los alumnos para tratar de corregirlas al diseñar Programas de Formación del Profesorado.

En estas propuestas de Formación y dado el origen del error, debe existir una participación activa del estudiante en tareas en las que se debe provocar conflicto en la mente del alumno a partir de la inconsistencia de sus propios errores, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos de número decimal por la comprensión conceptual adecuada.

Finalmente mencionar que el estudio continúa con otros grupos de alumnos en la Formación de Maestros, lo que nos va a permitir analizar y profundizar no sólo en la organización de estos errores, sino determinar su origen, así como realizar estudios comparativos entre los diferentes grupos.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1981): Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), pp. 33-115.

Centeno, J. (1988). *Números decimales*, Síntesis. Madrid.

Colera, J. y otros (1996): *Matemáticas 1 ESO*, Anaya. Madrid.

Dickson, L. y otros (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*, MEC-Labor. Barcelona.

Fischbein, E. (1994): The irracional numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceeding of the XVIII PME*, Lisbon, v.2, pp.352-359.

Hart; K.M. (1981). *Children´s Understanding Mathematics: 11-16*, John Murray. London.

Robinet, J. (1986): Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 21. IREM : Paris 7.

Socas, M. M. (2001): Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, Universidad de La Laguna, pp. 297-318.

Socas, M. M. (2002): La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Vol. 50, pp. 19-34

Vizmanos, J. R. y otros (2000). *1º Secundaria, Aritmos 2001 Matemáticas*. SM, Madrid.