521

MOVIMIENTO CURVILINEO

(*La odógrafa y sus aplicaciones*)

Por el *Dr. Jorge Mejía Ramírez*
Profesor de la Facultad.

1. - **El vector de Posición y su derivada.** Supongamos que un móvil se desplaza sobre un plano, describiendo con respecto al par de ejes OX y OY, situados en tal plano, a la trayectoria curvilínea AB, definida por las ecuaciones:

$$x = f(t) \qquad (1)$$

$$y = F(t) \qquad (2)$$

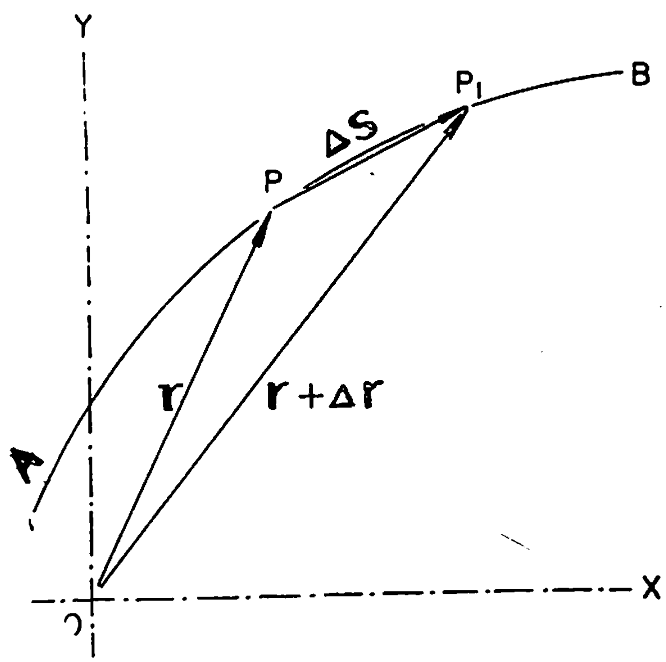

FIGURA 1.

La posición de P ocupada por el móvil en un instante dado, podemos entonces definirla con un vector, que vaya desde el origen de coordenadas a la referida posición ocupada por él sobre su trayectoria; en otros términos, tal vector tendría como componentes a lo largo de las direcciones OX y OY, a sendos vectores cuyos *módulos*, o tamaños escalares, estarían dados respectivamente por las ecuaciones (1) y (2). Expresado en la forma convencional, la ecuación de este vector de posición, sería:

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y \qquad (3)$$

ecuación que nos define al vector $\mathbf{r}$ como función del tiempo.

Refiriéndonos a la figura 1, supongamos ahora que P y P_1 sean dos posiciones, muy próximas, entre las cuales ha mediado un intervalo de tiempo Δt; estas dos posiciones estarían representadas por los vectores:

$$\mathbf{OP}=\mathbf{r}$$

$$\mathbf{OP}_1=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$$

en tanto que el vector $\mathbf{PP}_1=\Delta\mathbf{s}$ nos representa al desplazamiento durante el intervalo de tiempo de duración Δt que empezó a contarse a partir del instante en que el móvil se hallaba en la posición P. En la misma figura, el diagrama de vectores OPP_1 nos permite escribir:

$$\mathbf{OP}_1=\mathbf{OP}+\mathbf{PP}_1$$

$$\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{s}$$

ecuación según la cual

$$\Delta\mathbf{r}=\Delta\mathbf{s}$$

Como ambos cambios, $\Delta\mathbf{r}$ en el vector $\mathbf{r}$, el cual ha variado tanto en magnitud como en dirección, y el desplazamiento $\Delta\mathbf{s}$ del móvil a lo largo de su trayectoria, han tenido lugar durante el mismo intervalo de tiempo Δt, y como además, según la ecuación (3), $\mathbf{r}$ es función de t, es entonces evidente que

$$lim\,[(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{r}]/\Delta t=lim\,\Delta\mathbf{r}/\Delta t=d\mathbf{r}/dt=lim\,\Delta\mathbf{s}/\Delta t=d\mathbf{s}/dt=\mathbf{V}$$

(Límite cuando $\Delta t \rightarrow o$)

es decir, que la derivada con respecto al tiempo del vector de posición, es el vector velocidad.

Es preciso hacer notar aquí que en la figura (2) la posición límite de la secante PP_1, cuando $\Delta t \rightarrow$ o, es el de una tangente a la trayectoria en el punto P, y por lo tanto, la ecuación

$$d\mathbf{r}/dt=\mathbf{V} \qquad (4)$$

nos da a la velocidad tanto en magnitud como en dirección.

Según lo anterior las ecuaciones (3) y (4) nos dan

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V} = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' = \mathbf{i}f'(t) + \mathbf{j}F'(t) \qquad (5)$$

ecuación según la cual los módulos de las componentes $\mathbf{V}_x$ y $\mathbf{V}_y$, del vector velocidad, son respectivamente las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones (1) y (2).

EJEMPLO: Para el caso conocido del tiro inclinado se tienen las ecuaciones

$$x = v_0 t \cos \alpha \qquad y = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - gt^2/2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}(v_0 t \cos \alpha) + \mathbf{j}(v_0 t \operatorname{sen} \alpha - gt^2/2)$$

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}(v_0 \cos \alpha) + \mathbf{j}(v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt)$$

2. - **Odógrafa.** Sea *ABCDE*, figura 2ª, la trayectoria descrita por un móvil referida a los ejes *OX* y *OY*, movimiento que tiene lugar según las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = F(t)$.

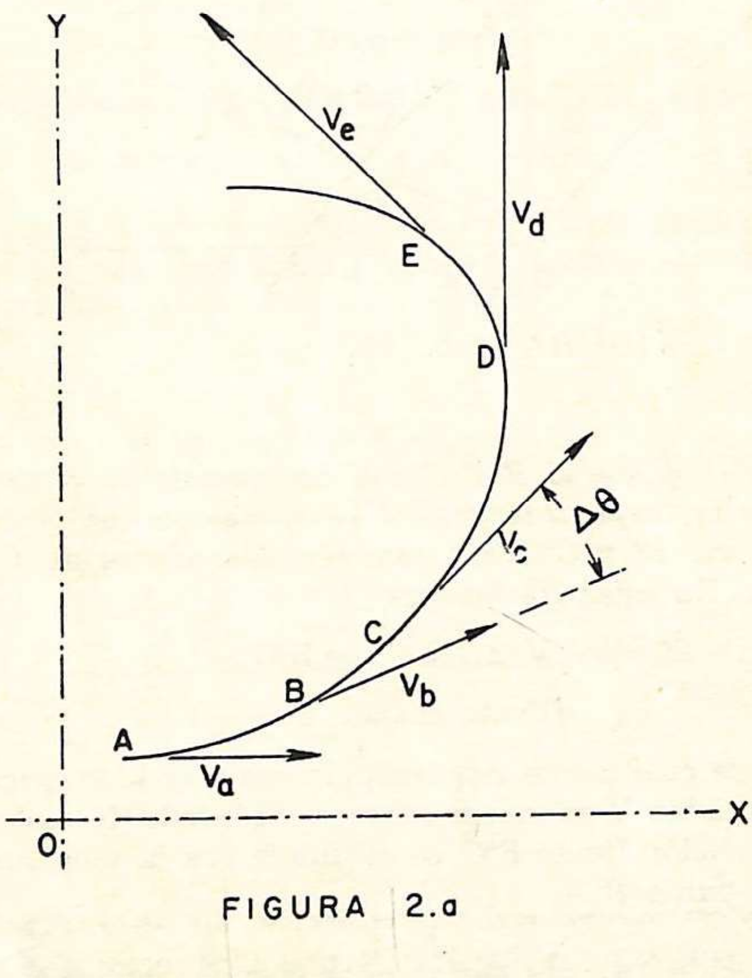

FIGURA 2.a

Si por el origen de otro par de ejes coordenados *OX'* y *OY'*, figura 2b, se trazan vectores que nos representen a la velocidad de la partícula móvil en todas las posiciones posibles de su trayectoria, unas pocas de las cuales hemos dibujado en la figura 2b, la extremidad del vector variable

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}f'(t) + \mathbf{j}F'(t) \qquad (5)$$

describe una curva $A'B'C'D'E'$ que recibe el nombre de *odógrafa* del movimiento que realiza la partícula.

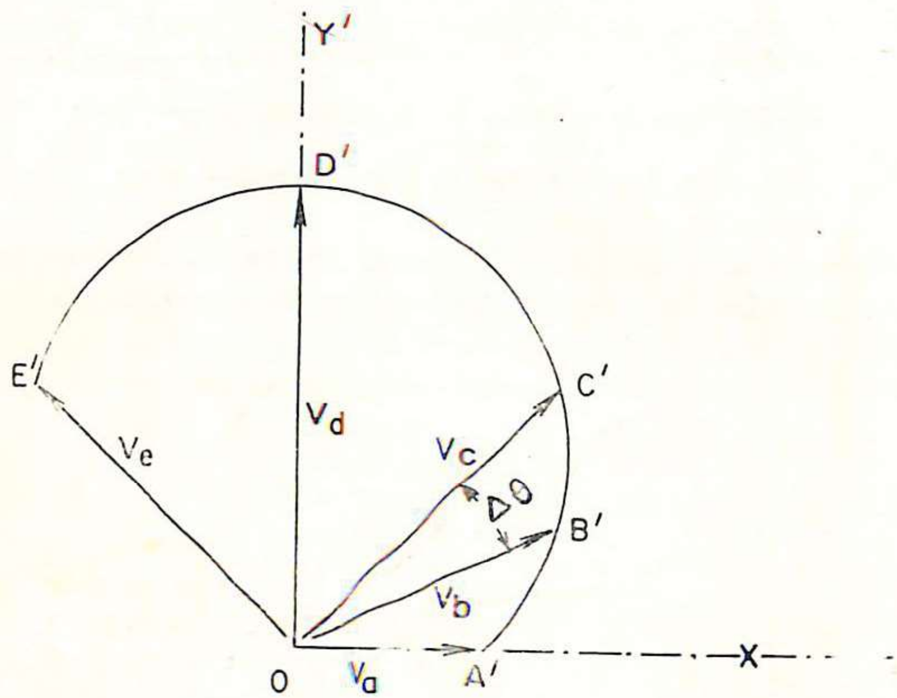

FIGURA 2.b.

Es evidente que si B y C son dos posiciones consecutivas del móvil sobre la trayectoria y si Δt es el tiempo que tarda en pasar de una a otra, B' y C' serán también dos puntos muy vecinos en la odógrafa. En estas condiciones,

$$lim\ (\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_b)/\Delta t = lim\ \Delta\mathbf{V}/\Delta t = \mathbf{a} = lim\ \mathbf{B'C'}/\Delta t = \mathbf{v}_v \qquad (6)$$

(límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$)

ecuación en la cual hemos representado con $\mathbf{v}_v$ a la velocidad con que el vector variable $\mathbf{V}$ se mueve sobre la odógrafa. No sobra advertir que en la posición límite $B'C'$ se confunde con la tangente a la odógrafa en el punto B'.

La ecuación (6) nos define pues la muy importante propiedad de que *la velocidad en un instante dado de la extremidad del vector que describe la odógrafa, curva (b), representa, en magnitud y di-*

rección, a la aceleración, en el mismo instante, de la partícula que se mueve sobre la curva (*a*).

El resultado (6) habría sido inmediato observando que en la figura 2b, el vector **V** es con respecto a **B′C′**, lo que en la figura (1) es el vector **r** con respecto a **PP′** oΔ**s**, y por lo tanto

$$d\mathbf{V}/dt=\mathbf{a}=d\mathbf{s}/dt=\mathbf{v}=d^2\mathbf{r}/dt^2$$

Según (5) y (6) podemos entonces escribir:

$$\mathbf{a}=d\mathbf{V}/dt=\mathbf{i}x''+\mathbf{j}y''=\mathbf{i}f''(t)+\mathbf{j}F''(t)=d^2\mathbf{r}/dt^2 \qquad (7)$$

ecuación esta última que nos muestra que los componentes $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$, del vector aceleración, tienen por módulos a las segundas derivadas de las ecuaciones (1) y (2) que nos definen el movimiento de la partícula sobre su trayectoria.

Ejemplo: Para el caso del lanzamiento inclinado tenemos:

$$\mathbf{V}=\mathbf{i}(vo\ cos\ \alpha)+\mathbf{j}(vo\ sen\ a=gt)$$

$$\mathbf{a}=d\mathbf{V}/dt=-\mathbf{j}g=\mathbf{a}_y$$

o sea que su aceleración es constante e igual a la aceleración de la gravedad.

En la figura 3 hemos dibujado la trayectoria parabólica de un lanzamiento con una inclinación α, sobre la horizontal y la odógrafa de tal movimiento.

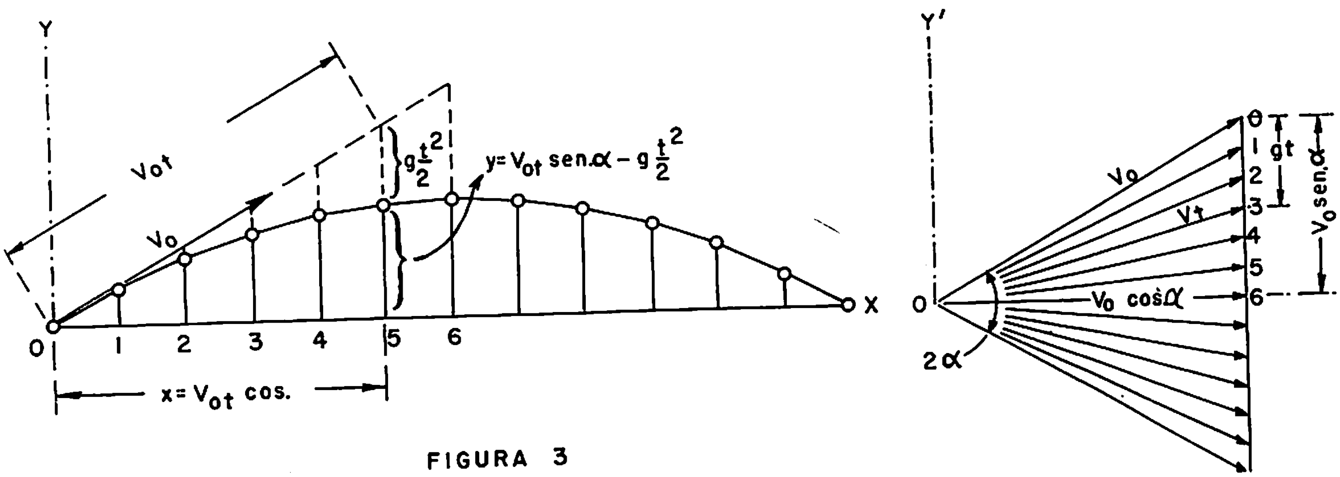

FIGURA 3

3. - **Odógrafa de un movimiento circular uniforme.** La odógrafa del movimiento de una partícula que recorra una trayectoria circular de radio *R*, con velocidad angular constante ω, será una circunferencia de radio $O'A=\mathbf{V}=\omega R$ como nos muestra la figura 4.

Siendo los radios $O'A'$ y $O'B'$ respectivamente paralelos a las tangentes a la trayectoria en los puntos A y B y como además estas

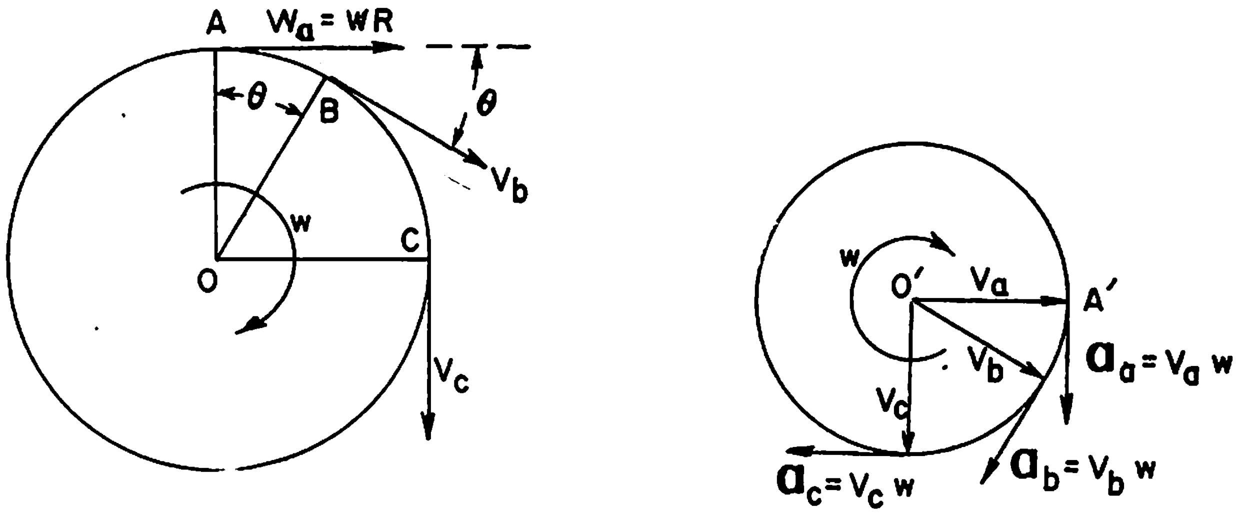

FIGURA 4.

tangentes forman entre sí un ángulo igual al ángulo OAB, resulta entonces que la velocidad angular del vector cuya extremidad describe a la odógrafa es igual a la del radio OA de la circunferencia que describe la partícula.

Finalmente, las tangentes en los puntos A', B', C', etc., de la odógrafa, son respectivamente paralelas a los radios OA, OB, OC, etc., de la trayectoria y como se vio anteriormente que la magnitud y dirección de la velocidad representa en magnitud y dirección a la aceleración de la partícula en movimiento, se deduce que cuando éste sea circular y uniforme, la aceleración es en cada instante dirigida hacia el centro de la circunferencia y que su magnitud vale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}\omega = \mathbf{V}^2/R = \omega^2 R$$

aceleración a la cual se ha dado el nombre de aceleración centrípeta, ya que no altera a la magnitud de la velocidad de la partícula sino a su dirección.

4. - **Problema.** Para mostrar como con el auxilio de la odógrafa los problemas del tiro inclinado se reducen prácticamente a soluciones gráficas, vamos a resolver el siguiente problema: Con qué inclinación habrá que lanzar un proyectil hacia arriba de un plano que forme con la horizontal un ángulo β para que la incidencia sobre el plano tenga lugar normalmente a él.

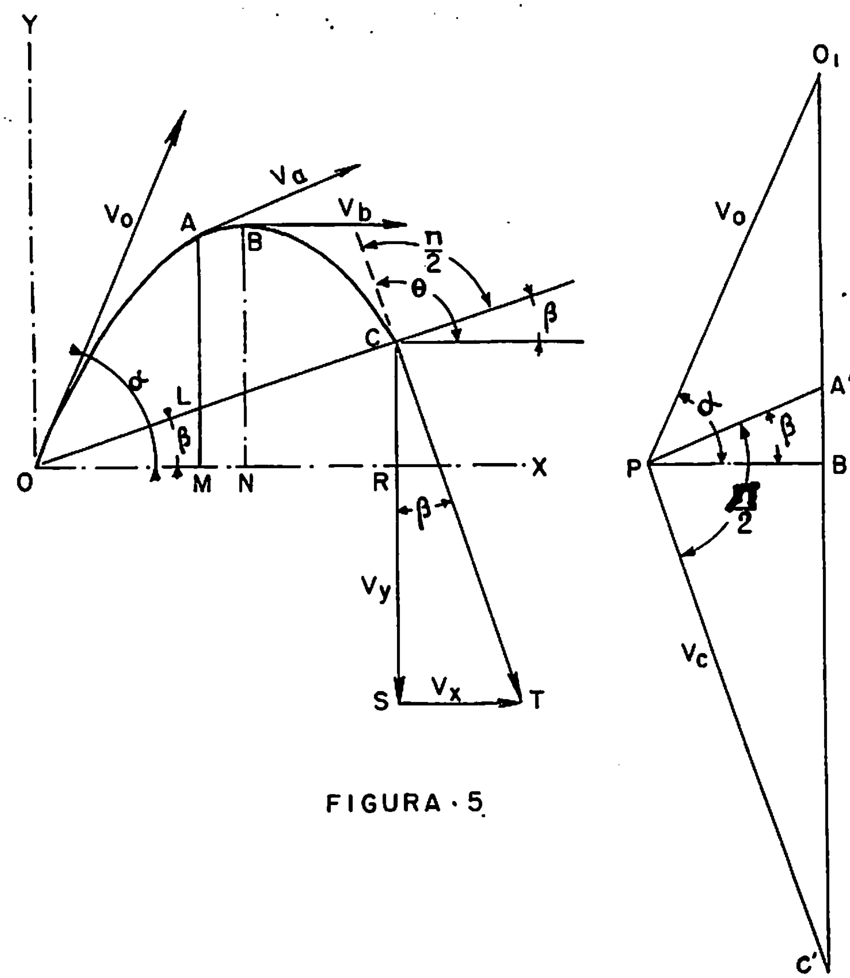

FIGURA · 5

La solución algébrica sería como sigue: por eliminación de t entre las ecuaciones paramétricas del movimiento,

$$x = v_0 t \cos \alpha \tag{1}$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - gt^2/2 \tag{2}$$

obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria

$$y = x \tan \alpha - gx^2/2v_0^2 \cos^2 \alpha \tag{3}$$

ecuación que resuelta simultáneamente con la ecuación de la recta *oc*, que nos representa al plano, y la cual es,

$$y = x \tan \beta \tag{4}$$

nos dan para la abscisa del punto de incidencia C

$$OR = x = [2V_0^2 \cos^2 \alpha/g] \quad (\tan \alpha - \tan \beta) \tag{5}$$

Si con CT representamos a la velocidad del móvil en el punto de incidencia y con CS y ST a sus componentes V_y y V_x, los ángulos SCT y ROC son iguales por tener sus lados respectivamente perpendiculares. Pero teniendo en cuenta que V_y es una cantidad negativa por encontrarse ya el móvil en el descenso, entonces:

$$cotan\, \beta = -V_y/V_x = -(V_0\, sen\, \alpha - gt)/V_0 \cos \alpha$$

$$\therefore t = [V_0 \cos \alpha/g]\ (tan\, \alpha + cot\, \beta) \tag{6}$$

valor que llevado a la ecuación (1) dan para la abscisa del punto C

$$x = [V_0^2 \cos^2 \alpha/g]\ (tan\, \alpha + cot\, \beta) \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) dan finalmente:

$$tan\, \alpha = 2\, tan\, \beta + cot\, \beta \tag{8}$$

Haciendo uso de la odógrafa la solución sería la siguiente: Se traza PA' formando con PB' el ángulo β y PC' perpendicular a PA'; PC' representará a la velocidad del proyectil en el momento de la incidencia sobre el plano. El triángulo rectángulo $PB'C'$ nos dá,

$$B'C' = PB'\, cot\, \beta = V_0 \cos \alpha\, cot\, \beta \tag{9}$$

$$O'B' + B'C' = O'C' = V_0\, sen\, \alpha + V_0 \cos \alpha\, cot\, \beta =$$

$$V_0 \cos \alpha\ (tan\, \alpha + cot\, \beta)$$

pero por la propiedad ya conocida de la odógrafa

$$O'C' = gt \tag{10}$$

(9) y (10) nos dan $\quad t = [V_0 \cos \alpha/g]\ (tan\, \alpha + cot\, \beta) \quad (6)$

que es la ecuación (6) obtenida antes.

PA' representará la velocidad del móvil en el instante en que se está moviendo paralelamente al plano. Del triángulo rectángulo obtenemos:

$$B'A' = PB'\, tan\, \beta = V_0 \cos \alpha\, tan\, \beta$$

$$O'A' = O'B' - B'A' = V_0\, sen\, \alpha - V_0 \cos \alpha\, tan\, \beta$$

$$\therefore t_1 = O'A'/g = [V_0 \cos \alpha/g]\ (tan\, \alpha - tan\, \beta) \tag{11}$$

Como PA' representa la velocidad del proyectil en la extremidad del diámetro MA correspondiente al sistema de cuerdas paralelas al plano OC y siendo todos los diámetros de una parábola paralelos al diámetro principal BN, siendo L el punto medio de OC, M será el punto medio de OR y como el proyectil avanza horizontalmente con velocidad constante $V_0 \cos \alpha$, entonces,

$$2t_1 = t$$

$$[2V_0 \cos \alpha / g] \quad (\tan \alpha - \tan \beta) = [V_0 \cos \alpha / g] \quad (\tan \alpha + \cot \beta)$$

$$\therefore \tan \alpha = 2 \tan \beta + \cot \beta$$

que es el resultado anteriormente obtenido.

Una segunda solución la obtenemos teniendo en cuenta la propiedad antes citada de la parábola, pues si el móvil para ir de O a A invierte el mismo tiempo que para ir de A a C, ello quiere decir que los dos segmentos de la odógrafa, $O'A'$ y $A'C'$ son iguales; por lo tanto,

$$O'A' = O'B' - B'A' = V_0 \operatorname{sen} \alpha - V_0 \cos \alpha \overset{\tan}{\cancel{\cot}} \beta$$

$$A'C' = A'B' + B'C' = V_0 \cos \alpha \tan \beta + V_0 \cos \alpha \cot \beta$$

$$\therefore V_0 \operatorname{sen} \alpha = V_0 \cos \alpha \ (2 \tan \beta + \cot \beta)$$

$$\tan \alpha = 2 \tan \beta + \cot \beta$$