513

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Por
Luis de Greiff Bravo
Profesor de la Facultad

La consideración de un caso elemental, a saber, el de dos ecuaciones a dos incógnitas, nos sirve para indicar cómo se llega a la idea de *determinante*. Sea el sistema,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=c_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Eliminando en (1) la incógnita $\overline{x_2}$, se obtiene,

$$\overline{x_1}=\frac{c_1a_{22}-c_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

La provisión de una raya sobre la variable tiene por objeto el ayudar a distinguir la incógnita o solución, que es una constante, de la correspondiente variable, presente en la ecuación.

Análogamente, por eliminación de $\overline{x_1}$, se obtiene,

$$\overline{x_2}=\frac{c_2a_{11}-c_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

El denominador es el mismo para las dos incógnitas, a saber,

$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4}$$

que se escribe,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{5}$$

conviniendo que el valor de este *determinante* es igual al producto de los dos términos de la diagonal principal, menos el producto de los dos términos de la diagonal secundaria.

Sentado lo anterior, la solución del sistema (1) se puede escribir de la manera siguiente,

$$\overline{x_1}=\Delta_1/\Delta\,;\quad \overline{x_2}=\Delta_2/\Delta \tag{6}$$

en donde se tiene,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

resultado que en palabras se enuncia con la llamada *regla de Cramer*, que no repetiremos aquí.

El sistema (1) se dice *normal*, cuando el determinante de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero, o sea,

$$(8) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Cuando, por el contrario, es $\Delta = 0$, el sistema (1) es *imposible*, o mejor, *incompatible*, término que se emplea para expresar que el sistema carece de solución.

La génesis del concepto de determinante se encuentra en la resolución de sistemas lineales, al querer formar de una manera por así decirlo, automática, ciertas funciones sencillas de los coeficientes y de los términos conocidos, que nos dicen que las soluciones de los sistemas lineales tienen la misma *estructuración* para todas las incógnitas. Expliquemos lo anterior en el caso de un sistema de tres ecuaciones a tres incógnitas, a saber.

$$(9) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}\ x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

La resolución del sistema (9) por cualesquiera de los muy conocidos métodos del álgebra elemental, conduce a la expresión siguiente,

$$(10) \qquad \overline{x_1} = \frac{c_1a_{22}a_{33} - c_1a_{23}a_{32} + c_2a_{13}a_{32} - c_2a_{12}a_{33} + c_3a_{12}a_{23} - c_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}}$$

Limitémonos al análisis del denominador que resulta ser el mismo para las tres incógnitas. Se tiene,

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\ (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}\ (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\ &\quad + a_{31}\ (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

$$(11) \qquad = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Parece haber sido Leibniz quien primero escribió el resultado anterior, así,

$$(12) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

determinante de *tercer orden,* el cual aparece en (11) calculado según los elementos de su primera columna y los *menores* correspondientes, como sigue:

> el primer término del desarrollo del determinante de tercer orden, (12), se obtiene como producto del elemento a_{11}, por el determinante de segundo orden que se obtiene de Δ, por supresión de la primera línea y la primera columna; el segundo término se forma multiplicando a_{21} por el menor correspondiente, a saber, el determinante de segundo orden que proviene de Δ, por supresión en éste de la segunda línea y la primera columna, etc. etc.
>
> *Signos.* - Si se tiene en cuenta que el primer índice de un elemento da la posición de la línea y el segundo la posición de la columna, es fácil ver que, cuando la suma de los índices de posición es *par* (como ocurre para el primero y tercero elementos), el signo es positivo (+). Por el contrario, cuando la suma de los índices de posición es *impar,* como ocurre con el segundo elemento de la primera columna, a_{21}, el signo es negativo (—).

Definición de determinante. - El desarrollo de Δ que aparece en (11), puede escribirse, cambiando el orden de los factores, de la manera siguiente,

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{13}$$

donde aparecen seis productos que pueden sintetizarse así,

$$\Delta = \Sigma\ (\pm)\ a_{1p}a_{2q}a_{3r} \tag{13 bis}$$

expresión en la cual (p.q,r) es una cualesquierá de las *permutaciones* de los números 1,2,3, las cuales son,

(1,2,3), (1,3,2), (3,1,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,2,1)

De estas permutaciones, son de *clase par* las tres siguientes: (1,2,3,), (3,1,2), (2,3,1) y corresponde a ellas el signo positivo (+); las tres restantes, o sea, (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1) son de *clase impar* y les corresponde el signo menos (—). Se dice que una permutación es de clase par (resp. impar), cuando el número de cambios en la ordenación natural de sus elementos es número par (resp. impar).

Generalizando diremos que, dada la matriz cuadrada de orden m, a saber,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \tag{14}$$

cuyos elementos suponemos ser números reales, se llama *determinante* de la matriz y se representa por,

$$(15) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

a la siguiente función de sus elementos,

$$(16) \qquad \Delta = \Sigma\ (-1)^{t} a_{1p} a_{2q} a_{3r} \dots a_{ml}$$

o sea, en palabras:

> a la suma de los productos obtenidos tomando de todas las maneras posibles un elemento de cada línea y uno de cada columna, y dando al producto de dichos m elementos, el signo $+$ o el signo $-$, según que la permutación de los índices columna, $(p,q,r,\dots,l)$, sea de clase par o de clase impar, respectivamente.

Definición de Matriz.—Llámase matriz mxn, o simplemente, *matriz,* al ente matemático constituído por mxn elementos dispuestos según m filas horizontales (líneas) y n filas verticales, (columnas). Consideraremos únicamente el caso en que los elementos son números reales. La ubicación de cada elemento en una matriz, es dada al escribirla, pero en la teoría se indica mediante un doble índice, el primero de los cuales designa el orden de la línea a que pertenece el elemento; el segundo, el orden correspondiente a la columna. En tal forma, es corriente representar una matriz de la manera siguiente:

$$(17) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

existiendo diferencias en cuanto al tipo de paréntesis.

En toda matriz es posible formar determinantes tomando de aquélla, líneas y columnas. El orden mayor que podemos conseguir para tales determinantes es igual, evidentemente, al menor de los números *m,n*. Ahora bien, si *p* es el orden correspondiente al determinante de orden más alto diferente de cero que podamos obtener de la matriz, diremos que p es la *característica* de ésta. Por ejemplo, sea la matriz,

$$(18) \qquad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Supongamos que todos los determinantes de tercer orden provenientes de la misma, son nulos, a saber,

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ , etc.}$$

Si, por otra parte, se tiene,

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

en palabras: si este u otro de los determinantes de segundo orden provenientes de la matriz M dada en (18) es diferente de cero, decimos que la *característica* de dicha matriz, vale dos.

Determinante principal. - Dada una matriz, llámase *determinante principal* de la misma, al determinante de orden más elevado que sea posible extraer de aquélla, con valor diferente de cero. Es posible, dada una matriz, que existan varios determinantes provenientes de la misma, que gocen de tal propiedad. Como es obvio, el orden del determinante principal viene a ser igual a la característica de la matriz.

Resolubilidad de sistemas lineales. - Se debe a Rouché un teorema que expresa las condiciones bajo las cuales, un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, es o no resoluble. Dichas condiciones se expresan también en forma un poco distinta mediante el teorema de Capelli.

Para comprender el amplio contenido de dichos famosos teoremas, altamente sintéticos, vamos a pasar revista a varios casos sencillos, a fin de prepararnos para la generalización.

Veamos primero el sistema normal o de Cramer que es el que generalmente se resuelve en los tratados elementales.

Es un sistema de matriz cuadrada:

$$(21) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ . \ . \ . + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{nn}x_n = c_n, \end{array}$$

cuya característica es n. En otras palabras, para dicho sistema, se tiene,

$$(22) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Veamos la solución del sistema (21). Indicando con A_{ij} el cofactor correspondiente al a_{ij} se tiene, multiplicando las ecuaciones, respectivamente por A_{11}, A_{21}, . . ., A_{n1}, y sumando,

$$
\begin{aligned}
& (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})x_1 \\
+ & (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1})x_2 \\
+ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})x_n \\
= & c_1A_{11} + c_2A_{21} + \dots + c_nA_{n1}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

La expresión contenida en el primer paréntesis tiene por valor Δ, por equivaler al desarrollo del determinante según la primera columna. Las expresiones contenidas en los otros paréntesis del primer miembro, son nulas, porque equivalen al desarrollo de determinantes cuya primera columna es igual a la segunda, igual a la tercera, . . ., igual a la n—sima.

La expresión que aparece a la derecha del signo $=$, es un determinante que difiere de Δ, en el hecho de que los elementos de la primera columna han sido sustituídos por los términos conocidos que forman el segundo miembro de cada ecuación, en orden. Indicando el determinante que así resulta, por Δ_1, se tiene,

$$\Delta\overline{x_1} = \Delta_1 \therefore \overline{x_1} = \Delta_1/\Delta, \tag{24}$$

y de manera análoga,

$$
\begin{aligned}
\Delta\overline{x_2} &= \Delta_2 \therefore \overline{x_2} = \Delta_2/\Delta, \\
\Delta\overline{x_3} &= \Delta_3 \therefore \overline{x_3} = \Delta_3/\Delta
\end{aligned}
\tag{25}
$$

de donde se concluye que *un sistema normal de Cramer tiene siempre una solución y una sóla.*

Se dice que un sistema es normal cuando la característica es igual al número de ecuaciones.

Veremos en seguida otros sistemas lineales de importancia teórica y práctica.

Sistema lineal con ecuaciones superfluas. - En otras palabras, sistema con más ecuaciones que incógnitas.

Supongamos el siguiente sistema que se presenta con frecuencia en Geometría Analítica.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= c_3
\end{aligned}
\tag{26}
$$

y veamos qué condición se requiere para que dicho sistema tenga una solución única. Sea la matriz de los coeficientes de las incógnitas,

$$
\begin{bmatrix}
a_{31} & a_{32} \\
a_{21} & a_{22} \\
a_{11} & a_{12}
\end{bmatrix}
\tag{27}
$$

Supongamos que la característica de esta matriz es dos, de manera que se tenga, por ejemplo,

$$(28) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto supuesto, podemos resolver las dos primeras ecuaciones del sistema (26), para tener,

$$(29) \qquad \overline{x_1} = \Delta_1/\Delta, \qquad \overline{x_2} = \Delta_2/\Delta$$

Si estos valores $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, satisfacen a la tercera ecuación del sistema (26), decimos que tal sistema es *compatible*, lo cual es otra manera de afirmar que dicho sistema posee una solución única. Entonces se tiene,

$$(30) \qquad a_{31} \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{32} \frac{\Delta_2}{\Delta} = c_3$$

de donde, al multiplicar por Δ,

$$(31) \qquad a_{31}\Delta_1 + a_{32}\Delta_2 - c_3\Delta = 0$$

Ahora bien, la relación (31) puede ser escrita de la manera siguiente,

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

A este determinante se le llama *determinante asociado*. El sistema (26) tiene, pues, solución única, si además de tener *dos* como característica de la matriz, se cumple la condición de que el determinante asociado sea nulo.

En caso de que el sistema (26) tuviere más de una superflua, a saber, un número p de éstas, serán otras tantas las condiciones (32) que expresen la compatibilidad del sistema. Así, si existiere una ecuación más en el sistema (26), a saber,

$$(33) \qquad a_{41}x_1 + a_{42}x_2 = c_4$$

la nueva condición de compatibilidad, para adjuntar a (32), sería,

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{41} & a_{42} & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

Sistemas lineales homogéneos. - Para simplificar la escritura, y sin afectar el carácter general de la exposición, consideremos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= c_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= c_4 \end{aligned} \tag{35}$$

Para sistemas de esta naturaleza se tiene siempre la *solución trivial,*

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = \overline{x}_4 = 0 \tag{36}$$

Ahora bien, interesa el caso en que, además de la solución trivial, existe una solución significativa, solución que estará definida *a menos* de un factor de proporcionalidad. Al efecto, hagamos ver que si los cuatro números $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_4$, satisfacen el sistema (35), también satisfarán al sistema los números $k\overline{x}_1$, $k\overline{x}_2$, . . ., donde k es constante arbitraria.

Demostración. - En virtud del aserto, se tiene,

$$a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{13}\overline{x}_3 + a_{14}\overline{x}_4 = 0 \tag{37}$$

. . . .

Multiplicando por $k \neq 0$, se tiene,

$$a_{11}(k\overline{x}_1) + a_{12}(k\overline{x}_2) + a_{13}(k\overline{x}_3) + a_{14}(k\overline{x}_4) = 0 \tag{38}$$

expresión que nos dice que $k\overline{x}_1$, $k\overline{x}_2$ . . . satisfacen el sistema (35).

Para la discusión de este sistema consideramos la matriz de los coeficientes,

$$A = (a_{ij}) \tag{39}$$

Si el determinante de la matriz es nulo, o sea si es, $|A| = 0$ y los determinantes de tercer orden deducidos de la misma no son nulos todos a la vez, dando *tres* como valor de la característica, el sistema (35) tiene solución significativa. Por el contrario, si el determinante $|A|$ es diferente de cero, el sistema (35) no tiene solución distinta de la solución *cero* (solución trivial).

Supongamos,

$$|A| = 0, \quad |A_{41}| \neq 0, \quad |A_{42}| \neq 0, \quad |A_{43}| \neq 0, \quad |A_{44}| \neq 0 \tag{40}$$

la solución del sistema (35) podrá escribirse como sigue,

$$\overline{x}_1 = k|A_{41}|, \quad \overline{x}_2 = k|A_{42}|, \quad \overline{x}_3 = k|A_{43}|, \quad \overline{x}_4 = k|A_{44}| \tag{41}$$

donde k debe recibir el mismo valor para las cuatro incógnitas.

Caso en que el número de incógnitas es superior al de ecuaciones. - ($n > m$)

A primera vista parece que un sistema lineal que tenga un número de ecuaciones inferior al de incógnitas, es *indeterminado,* es decir, admite infinidad de soluciones. Pues bien, no siempre ocurre así. Sistemas de esta naturaleza pueden ser *incompatibles*, no admitiendo solución. Veamos un ejemplo,

$$(42)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= -\mathrm{k}\,;\; k \neq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que la terna de números, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, satisface el sistema (42). Por substracción de las dos ecuaciones, se deduce, $2k=0$, o bien $k=0$, resultado que contradice la hipótesis. El sistema (42) no admite, pues, solución. Es incompatible.

Consideremos ahora el siguiente caso,

$$(43)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{16}x_6 &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{26}x_6 &= c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{36}x_6 &= c_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{46}x_6 &= c_4 \end{aligned}$$

Escrita la matriz de los coeficientes de las incógnitas,

$$(44)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & \ldots & a_{46} \end{bmatrix}$$

supongamos que su característica es *dos* y que su determinante principal sea, por ejemplo,

$$(45)\qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

El sistema que analizamos puede ser escrito así,

$$(46)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 - \lambda_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2 - \lambda_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= c_3 - \lambda_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &= c_4 - \lambda_4 \end{aligned}$$

Según hemos visto antes [condiciones (32), (34)], para que el sistema (46) sea compatible es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones,

$$(47)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 - \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 - \lambda_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 - \lambda_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 - \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 - \lambda_2 \\ a_{41} & a_{42} & c_4 - \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora bien, introduciendo los valores de los λ, el primero de los determinantes (47) se descompone en la siguiente expresión,

$$(48) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} x_4 - \ldots = 0$$

Mas, en la última relación escrita, (48), son nulos los coeficientes de.. x_3, x_4, ... por razón de la hipótesis hecha respecto de la característica, que es *dos*. Resulta entonces *nulo* el primer determinante de dicha relación, llamado *determinante completo*, el cual escribimos nuevamente,

$$(49) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

teniéndose, por las mismas razones,

$$(50) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{41} & a_{42} & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

En el caso más general se tiene la igualdad a *cero*, de todos los determinantes completos del sistema, los cuales se forman así,

> *se escribe el determinante principal, δ, abajo la línea de los coeficientes de las incógnitas correspondientes al determinante principal y en la columna de la derecha los términos conocidos correspondientes a las líneas o ecuaciones elegidas.*

Ahora, si los dos determinantes completos son nulos, podemos asignar libremente valores a las incógnitas, x_3, ..., x_6, deduciendo los valores correspondientes de x_1, x_2. El sistema admite entonces un número infinito de soluciones. Es compatible y a la vez *indeterminado*.

Con lo anterior, nos encontramos preparados para enunciar el *teorema de Rouché*:

> Condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones con m incógnitas sea compatible, es que, siendo p la característica de la matriz A de los coeficientes y δ el determinante principal (de orden p), sean nulos todos los determinantes completos (de orden $p + 1$).

Caso de cumplirse las condiciones anteriores, el sistema tiene una solución única si el número de incógnitas es igual a p, y es determinado si el número de incógnitas es superior a p.

Si no se cumplen las condiciones anteriores, el sistema es incompatible, lo cual quiere decir que no existe un conjunto de valores x_1, x_2, ..., que satisfaga a todas las ecuaciones del sistema.

◆ ◆ ◆