Un Modelo de Principal y Agente con la Función de Utilidad

Cesar Humberto, Antunez Irgoin

Antunez Irgoin Cesar Humberto
(Peruano) Bachiller en Economía
econobitacora@gmail.com; nakatabox@hotmail.com

Revista ACADEMICA VIRTUAL "Contribuciones a la Economía", Universidad de Málaga | julio – Agosto | **2011**

RESUMEN

El propósito de este artículo es exponer el modelo de Holmström y Milgrom (1987). En que presenta un modelo de principal y agente, donde se quiere determinar el esfuerzo óptimo bajo riesgo moral. Si no existe riesgo ($\sigma^2=0$) entonces el sistema de incentivos esta dado por $w(x) = \delta+x$ y si existe riesgo ($\sigma^2>0$) entonces cada agente soporta parte del riesgo.

ABSTRAT

The purpose of this article is to expose the pattern of Holmström and Milgrom (1987). In that a model presents of main and agent, where he is wanted to determine the effort good low moral risk. If risk doesn't exist ($\sigma^2=0$) then the system of incentives this die for $w(x) = \delta+x$ and if risk exists ($\sigma^2>0$) then each agent supports part of the risk.

Fecha del artículo: 30 de julio de 2011

PALABRAS CLAVES: Sistema de incentivos, Equivalente cierto, Aversión al riesgo.

KEY WORDS: System of incentives, Equivalent certain, Aversion to the risk.

Classification JEL: D81, D82.

Estas líneas están basadas en el modelo de Holmström y Milgrom (1987), que proponen un sencillo sistema de incentivos.

Supongamos que el nivel de producción observado por el principal es:

$$x = e + \tilde{\varepsilon}$$

En el cual $\tilde{\varepsilon}$ sigue una distribución normal con media cero y varianza constante.

$E(\tilde{\varepsilon}) = 0$

$Var(\tilde{\varepsilon}) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$

Donde:
x: Es el nivel de producción observado por el principal.
e: Es el nivel de esfuerzo del agente.
$\tilde{\varepsilon}$: Es la variable aleatoria con una distribución normal.
$w(x)$: Es la riqueza del agente.

Supongamos que el contrato y sistema de incentivos con el agente es lineal:

$$w(x) = \delta + \gamma.x$$

Donde δ y γ son los parámetros a determinar. Dado que el principal es neutral al riesgo le interesa su función de utilidad:

$E[x - w(x)] = E[e + \tilde{\varepsilon} - \delta - \gamma.(e - \tilde{\varepsilon})]$

$E[x - w(x)] = E(e) + E(\tilde{\varepsilon}) - E(\delta) - \gamma.E(e) - \gamma.E(\tilde{\varepsilon})$

$E[x - w(x)] = e + 0 - \delta - \gamma.e - \gamma.0$

$E[x - w(x)] = (1-\gamma)e - \delta \ldots (I)$

$E[x - w(x)]$: Función de utilidad del principal.

Supongamos que el agente tiene una función de utilidad con coeficiente absoluto de aversión al riesgo constante: $u(w) = -e^{-rw}$ donde *r* es la aversión absoluta al riesgo y *w* es la riqueza.

Entonces la utilidad esperada es:

$$E[u(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(w)\, f(w) dw$$

$$E[u(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-rw}.\frac{e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} dw$$

Si multiplicamos y dividimos $2\sigma^2$ al *rw*, tenemos:

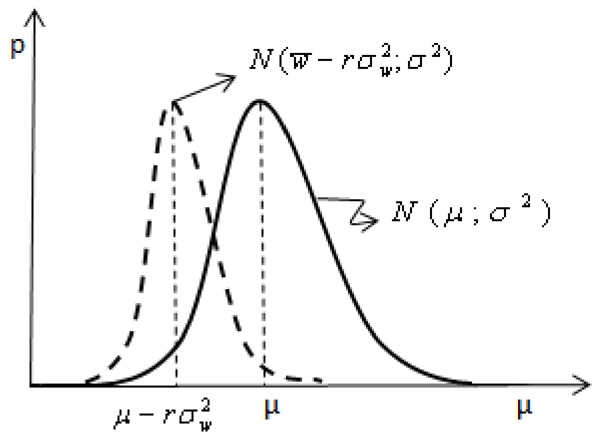
$$E[u(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-\frac{rw.2\sigma^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{w^2 - 2w\mu + \mu^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

Para solucionar este problema tenemos que completar cuadrados en e$^{-1/2\sigma \wedge 2(.)}$ para de esta forma formar un binomio perfecto al cuadrado.

$$E[u(w)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w^2 - 2w\mu + rw^2\sigma_w^2 + \mu^2 - 2r\mu\sigma_w^2 + r^2\sigma_w^4 + 2r\mu\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^2\right)}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

$$E[u(w)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w - (\mu - r\sigma_w^2)\right)^2} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2r\mu\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^4\right)}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

$$E[u(w)] = -\underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2r\overline{w}\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^4\right)}}_{\text{Como es un parámetro sale fuera de la integral.}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w - \tilde{w}\right)^2}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$



El desplazamiento de la curva de la variable aleatoria es conocido como la dispersión que preserva la media, que mantiene constante la media (media corregida ($\tilde{w} = \overline{w} - r\sigma_w^2$)), pero que aumenta la varianza de *w*. Por lo que la función de densidad de la normal es igual a 1.

Si reemplazamos:

$\mu = \overline{w}$

$\tilde{w} = \overline{w} - r\sigma_w^2$ Que seria la media corregida.

$$E[u(w)] = -e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2rw\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^4\right)} . \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}(w-\tilde{w})^2}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}}\right)dw}_{\approx 1}$$

$$E[u(w)] = -e^{-r\left(w - \frac{r\sigma_w^2}{2}\right)}$$

Entonces la utilidad esperada que depende de la media y la varianza es:

$$u^e(w) = \overline{w} - \frac{r\sigma_w^2}{2}$$

Donde

$\overline{w} = E[w(x)]$

$E[w(x)] = E[\delta + \gamma(e + \tilde{\varepsilon})] = E(\delta) + \gamma.E(e) + \gamma.E(\tilde{\varepsilon})$

$E[w(x)] = \delta + \gamma.e + \gamma.0$

$\boxed{E[w(x)] = \delta + \gamma.e}$

$\sigma_w^2 = E[w(x)]^2$

$E[w(x)]^2 = E[\delta + \gamma(e + \tilde{\varepsilon})]^2 = \gamma^2 E(\tilde{\varepsilon}^2)$

$\boxed{E[w(x)]^2 = \gamma^2.\sigma^2}$

Reemplazando la media y la varianza de la riqueza tenemos la utilidad esperada:

$$u^e = \delta + \gamma.e - \frac{r\gamma^2\sigma^2}{2}$$

Entonces el **equivalente cierto** del salario (es la utilidad esperad menos el costo de esfuerzo) es:

$$w^e = \delta + \gamma.e - \frac{r\gamma^2\sigma^2}{2} - c(e)\ldots(II)$$

$c(e)$: Es el costo del esfuerzo.

Maximizando la utilidad menos el esfuerzo del agente, tenemos:

$$Máx_{\{e\}}\Pi : \delta + \gamma.e - \frac{r\gamma^2\sigma^2}{2} - c(e)$$

De la condición de primer orden tenemos:

$\partial\Pi / \partial e = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma - c'(e) = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = c'(e)\ldots(III)$

Revista ACADEMICA VIRTUAL "Contribuciones a la Economía", Universidad de Málaga | julio – Agosto | 2011

El problema de maximización del principal es determinar δ y γ óptimos sujeto a las restricciones que recibe el agente, con un determinado nivel de reserva $\overline{w}$ y a la restricción de incentivos.

$$Máx_{\{e\}} E[x - w(x)] = Máx_{\{e\}} (1-\gamma)e - \delta$$

Sujeta a:
$$\begin{cases} \delta + \gamma . e - \dfrac{r\gamma^2\sigma^2}{2} - c(e) \\ c'(e) = \gamma \end{cases}$$

Despejando δ en la primera restricción y en la segunda γ e introduciendo en la función objetivo; el problema se reduce a solo maximizar *e*.

$$Máx_{\{e\}} e - \frac{c'(e)^2 r\sigma^2}{2} - c(e)$$

Aplicando la condición de primer orden tenemos:

$$\frac{\partial E[x - w(x)]}{\partial e} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{2c'(e).c''(e)r\sigma^2}{2} - c'(e) = 0$$

Despejando $c'(e) = \gamma$ tenemos el esfuerzo óptimo bajo **riesgo moral** es:

$$\gamma^* = \frac{1}{1 + rc''(e)\sigma^2}$$

- ✍ Si: $\sigma^2 = 0$ (no existe riego) entonces tenemos $\gamma = 1$; por lo que el sistema óptimo de incentivos viene dado por: $w(x) = \delta + x$.
- ✍ Si: $\sigma^2 > 0$ (existe riesgo) entonces $\gamma < 1$; Por lo que cada uno de los agentes soporta parte del riesgo.

Esto quiere decir cuando mayor es la incertidumbre (o mayor aversión al riesgo) del agente menor es γ.

Un caso particular es cuando el costo del esfuerzo es de forma cuadrática:

$$c(e) = \frac{e^2}{2} \quad \rightarrow \quad c'(e) = \frac{\partial c(e)}{\partial e} = e \quad \wedge \quad c''(e) = \frac{\partial c'(e)}{\partial e} = 1$$

Reemplazado la segunda derivada del esfuerzo en la ecuación de esfuerzo óptimo:

$$\gamma^* = \frac{1}{1 + r\sigma^2} < 1$$

- ✍ Si: $\gamma = 1$ es el óptimo con información completa; esto nos quiere decir que mientras más difícil sea observar el esfuerzo (mayor σ^2), menor es el esfuerzo que se solicita. Lo mismo ocurre si tenemos un "r" mayor (más aversión al riesgo).

Revista ACADEMICA VIRTUAL "Contribuciones a la Economía", Universidad de Málaga | julio – Agosto | 2011