Enfoque Media-Varianza en la Función de Utilidad

Cesar Humberto Antunez Irgoin
(Peruano) Bachiller en Economía
econobitacora@gmail.com
nakatabox@hotmail.com

RESUMEN

Este trabajo presenta el Enfoque Media-Varianza (MV) en la función de utilidad. Trataremos de exponer los dos métodos más usados para determinar la utilidad esperada del agente, que determina que dicha utilidad esta en función de la media y la varianza de la riqueza.

ABSTRAT

This work presented the Focus Stocking-variance (MV) in the function of utility. We will try to expose the two methods more used to determine the agent's prospective utility that determines that this utility this in function of the stocking and the variance of the wealth.

PALABRAS CLAVES

Aversión al riesgo, Dispersión que preserva la media, Utilidad esperada

KEY WORDS

Aversion to the risk, Dispersion that preserves the stocking, prospective Utility

Classification JEL: D81

Fecha del artículo: 30 de junio de 2011

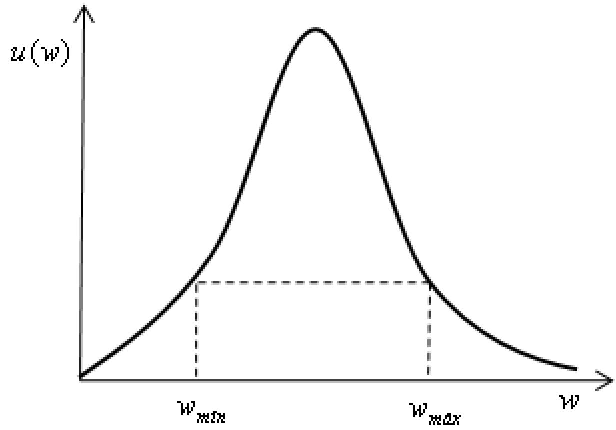
Revista ACADEMICA VIRTUAL "Contribuciones a la Economía", Universidad de Málaga | junio – julio | **2011**

En estas líneas trataremos de explicar el Enfoque Media-Varianza en la función de utilidad. Donde la utilidad esperada de un juego depende de toda la probabilidad de los resultados.

Si suponemos que el agente económico, tiene una función de utilidad que depende de la requisa "*w*" y esta tiene una distribución normal ($w \sim N(\bar{w};\sigma_w^2)$).

Donde su utilidad esperada se puede representa con una integral definida de la función de utilidad entre el intervalo $w_{mín}$ y $w_{máx}$ por la función de densidad de la riqueza.

$$E[u(x)] = \int_{w_{mín}}^{w_{máx}} u(x).f(x)dx$$



En muchas circunstancias la utilidad esperada de un juego solo depende de los estadísticos media-varianza ($\mu;\sigma^2$) de la distribución.

Supongamos que la función de utilidad sea cuadrática:

$$u(w) = w - \beta w^2$$

Sea $E[u(w)]$ la utilidad esperada en función a "*w*". El desarrollo se hace mediante la serie de Taylor de segundo orden de $E[u(w)]$ entorno a "*w*". Este es el primer método como resolver la utilidad esperada en función de la media y la varianza.

$$u'(w) = 1 - 2\beta w$$

$$u''(w) = -2\beta$$

Cualquier derivada mayor o igual a tres es cero:

$$\frac{\partial^k (u(w))}{\partial (w)^k} = 0 \qquad \forall\ k \geq 3$$

Revista ACADEMICA VIRTUAL "Contribuciones a la Economía", Universidad de Málaga | junio – julio | 2011

$$E[u(w)] \approx E\left[\sum_{i=1}^{n} p_i u^k(w_i)\right]$$

$$E[u(w)] \approx E\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \left(u(w) + \frac{u'(w)}{1!}(w-\overline{w}) + \frac{u''(w)}{2!}(w-\overline{w})^2 + \ldots\right)\right]$$

$$E[u(w)] \approx E\left[u(w) + u'(w)\sum_{i=1}^{n} p_i (w-\overline{w}) + \frac{u''(w)}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i (w-\overline{w})^2\right]$$

Si la utilidad tiene una distribución normal entonces $u(w) \sim N(0;\sigma_w^2)$, esto nos dice que el primer es cero y el segundo momento es σ_w^2. Reemplazando estos valores en la expresión anterior se tiene:

$$E[u(w)] \approx E\left[u(w) + u'(w)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i (w-\overline{w})}_{\approx 0} + \frac{u''(w)}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i (w-\overline{w})^2}_{\sigma^2}\right]$$

$$E[u(w)] \approx E\left[u(w) + u'(w).0 + \frac{u''(w)}{2}\sigma_w^2\right]$$

Reemplazando las derivadas de la función de utilidad se:

$$E[u(w)] \approx E\left[w - \beta w^2 + \frac{(-2\beta)\sigma_w^2}{2}\right]$$

$$E[u(w)] \approx E(w) - \beta E(w^2) - \beta E(\sigma_w^2)$$

$$E[u(w)] \approx \overline{w} - \beta\overline{w}^2 - \beta\sigma_w^2$$

Por lo que la función de utilidad esperada del juego esta únicamente en función de la media y la varianza de la riqueza.

La segunda manera de obtener la utilidad esperada es mediante la función de densidad de la utilidad.

i) $f(w)$ es una función con una distribución normal $w \sim N(0;\sigma_w^2)$

ii) $u(w) = -e^{-rw}$ la función de utilidad en este caso esta en función de la aversión absoluta al riesgo es constante. Además la riqueza sigue una distribución normal.

$$E[u(w)] = \int_{w_{mín}}^{w_{máx}} u(w) f(w) dw$$

$$E[u(w)] = \int_{w_{mín}}^{w_{máx}} -e^{-rw} . \frac{e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} dw$$

Si multiplicamos y dividimos $2\sigma^2$ al *rw*, tenemos:

$$E[u(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-\frac{rw.2\sigma^2}{2\sigma^2}} . \frac{e^{-\frac{w^2-2w\mu+\mu^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

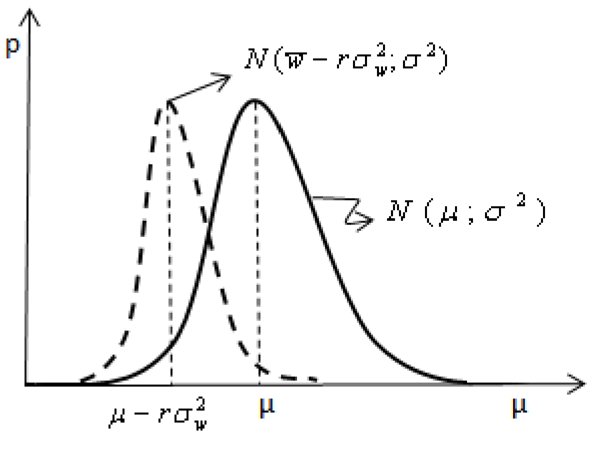
$$E[u(w)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w^2-2w\mu+rw^2\sigma_w^2+\mu^2\right)}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

Para solucionar este problema tenemos que completar cuadrados en $e^{-1/2\sigma \wedge 2(.)}$ para de esta forma formar un binomio perfecto al cuadrado $(a\pm b)^2$.

$$E[u(w)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w^2-2w\mu+rw^2\sigma_w^2+\mu^2-2r\mu\sigma_w^2+r^2\sigma_w^4+2r\mu\sigma_w^2-r^2\sigma_w^2\right)}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

$$E[u(w)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w-(\mu-r\sigma_w^2)\right)^2} . \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2r\mu\sigma_w^2-r^2\sigma_w^4\right)}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$

$$E[u(w)] = -\underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2rw\sigma_w^2-r^2\sigma_w^4\right)}}_{\substack{\text{Como es un parámetro}\\ \text{sale fuera de la integral.}}} . \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}(w-\tilde{w})^2}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \right) dw$$



El desplazamiento de la curva de la variable aleatoria es conocido como la **dispersión que preserva la media**, que mantiene constante la media (media corregida ($\tilde{w} = \overline{w} - r\sigma_w^2$)), pero que aumenta la varianza de *w*. Por lo que la función de densidad de la normal es igual a 1.

Si reemplazamos:

$\mu = \overline{w}$

$\tilde{w} = \overline{w} - r\sigma_w^2$ Que sería la media corregida.

$$E[u(w)] = -e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2r\overline{w}\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^4\right)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(w-\tilde{w}\right)^2}}{2\sqrt{\pi\sigma^2}}\right)dw}_{\approx 1}$$

$$E[u(w)] = -e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2r\overline{w}\sigma_w^2 - r^2\sigma_w^4\right)}$$

$$E[u(w)] = -e^{-r\left(w - \frac{r\sigma_w^2}{2}\right)}$$

Se puede apreciar que la utilidad esperada es creciente $\overline{w} - r\sigma_w^2/2$, por lo que se puede tomar transformaciones monótonas de la utilidad esperada y evaluar la distribución de la riqueza valiéndonos de la función de utilidad $u(w) = \overline{w} - r\sigma_w^2/2$.