 https://doi.org/10.24844/EM3502.07

Modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ en docentes que enseñan álgebra en los primeros años escolares

Modes of thinking the set $\mathbb{Z}_4$ in teachers who teach algebra in the first years of school

Pedro Vidal-Szabó,[1] Marcela Parraguez,[2]
Daniela Bonilla,[3] Samuel Campos[4]

Resumen: Para vincular la aritmética con el pensar práctico y teórico del álgebra, esta investigación exploratoria enmarcada en la Teoría Modos de Pensamiento realizó un estudio de caso, con el objetivo de caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria. Para ello, se analizaron las respuestas que dieron 30 docentes en servicio a un cuestionario en línea, con base en un modelo cognitivo propuesto que define los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ con sus articuladores. Los resultados muestran que estos docentes, en general, adhieren al modelo cognitivo y evidencian más articulación entre los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético que entre los modos analítico-aritmético y analítico-estructural, lo que muestra un pensamiento teórico menos privilegiado. En conclusión, el álgebra de docentes de primaria puede activarse concibiendo al conjunto $\mathbb{Z}_4$ como un fragmento matemático que posee 4 elementos construidos. Cada uno es considerado un conjunto distinto de números congruentes módulo 4 que

Fecha de recepción: 5 de marzo de 2021. **Fecha de aceptación:** 23 de abril de 2023.

[1] Facultad de Educación, Universidad del Desarrollo, pfvidal@udd.cl, orcid.org/0000-0002-3320-9789.

[2] Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, marcela.parraguez@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-6164-3056.

[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, daniela.bonilla@pucv.cl, orcid.org/0000-0003-0478-7827.

[4] Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, sjcampos@uc.cl, orcid.org/0000-0001-6657-7599.

particionan el conjunto $\mathbb{Z}$, haciendo que el concepto clase de equivalencia tribute a la construcción cognitiva del conjunto $\mathbb{Z}_4$ como grafo cíclico de orden 4.

Palabras claves: *Teoría Modos de Pensamiento, Modelo Cognitivo del conjunto $\mathbb{Z}_4$, Fragmento matemático, Docentes de primaria, Aritmética modular.*

Abstract: To link arithmetic with the practical and theoretical thinking of algebra, this exploratory research framed in the Modes of Thinking Theory conducted a case study to characterize modes of thinking about the set $\mathbb{Z}_4$ and its interactions in Chilean primary school teachers. For this purpose, the answers given by 30 in-service teachers to an online questionnaire were analyzed, based on a proposed cognitive model that defines the modes of thinking about the set $\mathbb{Z}_4$ with its articulators. The results show that these teachers, generally adhere to the cognitive model and evidence more articulation between synthetic-geometric and analytic-arithmetic modes than between analytic-arithmetic and analytic-structural modes, which shows less privileged theoretical thinking. In conclusion, the algebra of primary teachers can be activated by conceiving the set $\mathbb{Z}_4$ as a mathematical fragment with 4 elements constructed. Each one is considered a distinct set of congruent numbers modulo 4 that partition the set $\mathbb{Z}$, making the concept of equivalence class contribute to the cognitive construction of the set $\mathbb{Z}_4$ as a cyclic graph of order 4.

Keywords: *Modes of Thinking Theory, Cognitive Model of the set $\mathbb{Z}_4$, Mathematical fragment, Primary teachers, Modular arithmetic.*

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico ha cobrado importancia en los currículos educativos, sobre todo, desde los inicios de la escolaridad obligatoria. En Chile, particularmente, el álgebra ha sido considerada como un eje temático que comienza en el grado 1 de primaria desde la reforma curricular del año 2012, estableciéndose que niñas y niños puedan explicar y describir relaciones entre números, formas, objetos y conceptos a través del análisis de patrones que "facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico" (Ministerio de Educación de Chile, 2012, p. 219).

Este tipo de pensamiento se concibe como una combinación entre (i) operar con incógnitas; (ii) pensar en términos de variables y sus relaciones; (iii) reconocer una estructura algebraica. Así, los sujetos que activan su pensar algebraico evidencian alguna manifestación referida a una combinación entre (i), (ii) y/o (iii), independiente si usan alguna notación algebraica usual (Carraher y Schliemann, 2014).

El álgebra temprana remite a un programa específico de investigación y provee de enfoques sobre la enseñanza para el álgebra escolar. Por ende, es considerada para la formación docente con el fin de permitir el fomento y desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años escolares. Además, contempla la aritmética elemental como un cimiento en el que se encuentran ideas y principios que son nociones y representaciones propias del álgebra. Ello requiere ser comprendido profundamente por docentes de manera avanzada para dar acceso inicial a sus estudiantes al álgebra. De hecho, son insuficientes los estudios que permiten cimentar las bases para el álgebra abstracta en la formación docente, a través de nociones elementales provenientes de la aritmética.

Es relevante hacer notar que el pensamiento algebraico ha sido definido de manera amplia, especialmente:

> El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las que la letra simbólica podría usarse como una herramienta, o alternativamente dentro de actividades que podrían realizarse sin usar la letra simbólica en absoluto, por ejemplo, analizar relaciones entre cantidades, notar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir. (Kieran, 2004, p. 149)

Vidal-Szabó y Núñez-Fernández (2021) indican que, para el aprendizaje del álgebra a una temprana edad, su enseñanza contemple tareas que incluyan patrones cualitativos y cuantitativos, en tanto, permiten descubrir o inventar formas de representar la realidad, mediante relaciones entre cantidades y el reconocimiento de estructuras en fenómenos modelables con álgebra. Entonces, es entendible que exista una visión funcional bastante extendida en la enseñanza de las expresiones matemáticas (Kieran *et al.*, 2016). Es así como:

> El enfoque funcional para el surgimiento del pensamiento algebraico… sugiere un estudio del álgebra que se centra en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones a través de encuentros con situaciones del mundo real, cuyas relaciones cuantitativas pueden ser descritas por estos modelos. (Heid, 1996, p. 239)

Tal como reportan Chrysostomou y Christou (2019), existe evidencia respecto de la generalización sobre una clase o distintas clases de números que niñas y niños son capaces de alcanzar. Por ejemplo, *un número impar más otro número impar da como resultado un número par*, y desde un conocimiento más avanzado puede interpretarse como el conjunto $\mathbb{Z}_2 =: \{\overline{0}, \overline{1}\}$, tal que la clase de equivalencia $\overline{0}$ representa a cada número entero que al dividirse en 2 poseen resto 0 (números pares) y, análogamente bajo la misma acción, la clase de equivalencia $\overline{1}$ representa a los que poseen resto 1 (números impares). En otras palabras, la concepción de número puede ampliarse y vincularse a la noción de clase de equivalencia al particionar $\mathbb{Z}$ en n-ésimas clases.

El álgebra temprana es un marco referencial, en el que esta investigación se circunscribe, en virtud del conjunto $\mathbb{Z}_4$ y la formación docente de primaria referida al pensamiento algebraico. En la sección siguiente, se presenta la base matemática sobre la cual se sustentan los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus articuladores como herramienta matemática que permite el pasaje entre los modos de pensar dicho conjunto.

1.1 La división en $\mathbb{Z}$

En los sistemas numéricos, las operaciones elementales son parte de las actividades que habitualmente comienzan en los primeros años de enseñanza. En particular, la operación división, a diferencia de las otras operaciones, posee 4 componentes numéricos: dividendo, divisor, cociente y resto.

La división puede ser presentada como la multiplicación del dividendo y el recíproco (inverso multiplicativo) del divisor, según Isoda y Olfos (2021). Por lo que dividir p y q (números enteros positivos) con resto 0, se transforma en la búsqueda de uno de los factores de la multiplicación, entendiendo así la división como una operación inversa a la multiplicación que usualmente es conocida como división exacta. Sobre su enseñanza, Ivars y Fernández (2016) afirman que, si las personas conocen el algoritmo de la división, entonces tienden a usarlo por sobre otras estrategias de resolución, lo que puede aumentar la aparición de errores o dificultades.

En el sistema numérico $\mathbb{Z}$, el concepto resto forma parte del proceso algorítmico de la división entre dos números enteros *dividendo* y *divisor* (no-nulo), cuyo valor puede variar desde 0 hasta el antecesor del valor absoluto del *divisor*, interpretándose de forma numérica, usualmente. Entonces, a pesar de que el resto puede tomar otros valores enteros positivos, hay insuficientes experiencias en formación docente que permiten ampliar el significado del resto a otras situaciones de enseñanza para primaria, lo cual denota que es posible avanzar a significados más abstractos para profundizar en la comprensión de estrategias que movilizan docentes en servicio, al resolver problemas que involucran al resto desde un pensar práctico y teórico, vinculado a conocimientos algebraicos. En consecuencia, el propósito de esta investigación es caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria en servicio.

1.2 Revisión matemática relacionada con el Conjunto $\mathbb{Z}_4$

Hasta el siglo XVIII, la noción de número, cardinal u ordinal, solo tenía sentido para conjuntos finitos. Más adelante, cobró sentido la introducción moderna de una escala de números infinitos. Los conjuntos de infinitos elementos son útiles para comprender los sistemas numéricos, por ejemplo, el sistema numérico $\mathbb{Z}$ con operaciones binarias definidas en este.

Respecto a la operación división, Lay-Yong (1966) hace un estudio comparado entre los métodos de resolución de una división entre dos números naturales, compara el método de galera, usado desde el siglo XV en Europa, el método hindú y el método chino que datan entre el siglo V y III a. e. c. Todos estos métodos explicitan la identificación de un resto en la división, aunque fue recién desde la segunda mitad del siglo XVIII que se comenzaron a publicar trabajos que estudiaban propiedades numéricas y algebraicas del concepto resto.

Uno de los primeros antecedentes formales de la Aritmética Modular fue el trabajo compilatorio y original de Gauss en el año 1801 en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*. Struik (1948/1980) declara que esta obra la fechan como un hito del comienzo de la teoría moderna de números, la cual aborda la teoría de las congruencias. La notación de Gauss para el módulo es $a \equiv b \; mod \; n$ y tiene dos significados: (i) a y b se encuentran en la misma clase de congruencia módulo n, si ambos dejan el mismo resto al ser divididos por n, o bien, (ii) $(a - b)$ es múltiplo de n. Hay que indicar que el significado (i) es el que domina en esta investigación, en virtud de los resultados obtenidos.

Esta investigación considera la relación de congruencia módulo 4 de la siguiente forma: $\forall \; (a,b) \in \mathbb{Z}^2$: $a \equiv b \; mod \; 4$. Como propiedad, el conjunto cociente que genera dicha relación es: $\mathbb{Z}/\equiv (mod \; 4) =: \{\overline{a}/ \; a \in \mathbb{Z}\}$, tal que $\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \; / \; x \equiv a \; mod \; 4\}$, lo que define cuatro clases de equivalencia, esto es, el conjunto $\mathbb{Z}_4$, a saber:

$\overline{0} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 0 \ mod \ 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 4k, k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$
$\overline{1} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 1 \ mod \ 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$
$\overline{2} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 2 \ mod \ 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$
$\overline{3} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 3 \ mod \ 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$

Notar que el representante de la clase de equivalencia puede estar dado por cualquier número que pertenezca a la misma relación de congruencia módulo 4. Por otra parte, la figura 1 define la operación $+$ en el conjunto $\mathbb{Z}_4$ por medio de la tabla de Cayley:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Figura 1. Tabla de Cayley para sumar en $\mathbb{Z}_4$.

Se destaca que $\overline{1}$ es generador del conjunto $\mathbb{Z}_4$ porque si se suma sucesivamente el $\overline{1}$ consigo mismo, se obtienen todos los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Al generalizar, el elemento generador a al sumarse consigo mismo origina el conjunto $(a, 2a, 3a, 4a, 5a, ...)$, tal que sus elementos son $2a = a + a$; $3a = a + a + a$; y así sucesivamente, como muestra la figura 2.

a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Figura 2. Ilustración del ciclo de los números congruentes módulo 4 y generadores de $\mathbb{Z}_4$.

De la figura 2, notar que no todos los valores de a permiten obtener todos los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Especialmente, si $a = \overline{1}$, o bien, $a = \overline{3}$, entonces se obtiene todo el conjunto $\mathbb{Z}_4$. También, las columnas, $5a, 6a, 7a$ y $8a$ vuelven a repetir las primeras cuatro columnas, formando un ciclo, el cual puede visualizarse por medio de un grafo que inicia desde un nodo ennegrecido que representa al $\overline{0}$ y, bajo una cierta orientación, se continúa pasando por cada nodo adyacente al anterior (ver figura 3).

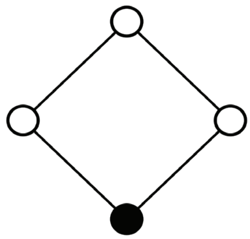


Figura 3. Grafo que representa un ciclo de orden 4.

Lo presentado se sustenta en la matemática y permite caracterizar tres modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, esto es, un grafo cíclico de orden 4, subconjuntos de $\mathbb{Z}$ derivados de la división por 4 y, dada la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$, las 4 clases de equivalencia. Estos aspectos matemáticos se exponen para explicitar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, lo que también permite vislumbrar articuladores que facilitan la interacción entre los modos de pensar dicho conjunto.

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación, se describe la definición de fragmento matemático, en el contexto de la Teoría Modos de Pensamiento, además con sus fundamentos para sustentar un modelo cognitivo que promueve comprender profundamente el conjunto $\mathbb{Z}_4$, y así contrastarlo con los resultados del instrumento aplicado en línea a docentes de primaria en servicio.

2.1 Definición de fragmento matemático

Hay un principio que se ha puesto en práctica para llegar a la teorización en matemáticas, esto es:

> La existencia de analogías entre los rasgos principales de diversas teorías implica la existencia de una teoría más general, de la cual esas teorías particulares no son sino ramales y que las unifica en lo que concierne a esos rasgos principales. (Fréchet (1955/1988, pp. 67-68)

Por ejemplo, en el cálculo vectorial se manifiesta, porque surge después de haberse desarrollado independientemente las teorías de las fuerzas, las velocidades de rotación, los torbellinos, entre otros fenómenos físicos. A saber:

> ... ciertas relaciones físicas de naturalezas diferentes para cada tipo de vectores llevaban a considerar como equivalentes dos sistemas de vectores de la misma naturaleza, cuyas representaciones geométricas tenían entre sí relaciones geométricas determinadas.
> En otros términos, equivalencias físicas diferentes se traducen en una misma equivalencia geométrica.
> Estudiar por consiguiente los vectores y la equivalencia geométrica de los sistemas de vectores, es constituir una teoría común a las magnitudes físicas vectoriales de naturalezas diversas. (Fréchet, 1955/1988, p. 68)

De este modo, un *fragmento matemático* (en adelante, *fm*) se concibe como una entidad invariante operativa o lógico-discursiva de una multiplicidad coherente de representaciones semióticas en registros distintos y reconocidas por la comunidad científica en el constructo matemático que le objetiviza. La naturaleza sistémica del *fm* puede desprenderse de Fréchet (1955/1988) que aborda la generalización como un proceso de práctica matemática:

> ... Todas las veces que el conjunto de propiedades de una entidad matemática, que son utilizadas para la demostración de una proposición concerniente a esa entidad, no caracteriza a la propia entidad, entonces la proposición puede ser extendida a una entidad más general. (p. 69)

Por su parte, el Álgebra Abstracta es una rama de la matemática que, vía definiciones y teoremas, estudia distintas estructuras algebraicas. Weisstein (2002) le define como la parte del álgebra que trata de temas como la lógica y sus fundamentos, el conteo, la teoría elemental de números, la teoría informal de conjuntos, el álgebra lineal y la teoría de operadores lineales.

Para efectos de esta investigación, el conjunto $\mathbb{Z}_4$ es un *fm* relacionado con el Álgebra Abstracta, pues se focaliza en distintas interpretaciones, mediante los modos de pensar este *fm* en un nivel matemático elemental, los cuales se describen en adelante.

2.2 Modos de Pensamiento teórico y práctico del fragmento matemático

La Teoría Modos de Pensamiento, en adelante TMP, ha sido desarrollada por más de dos décadas (Bonilla y Parraguez, 2013; Bonilla *et al.*, 2019; Campos y Parraguez, 2019; Sierspinska, 2000; Parraguez, 2012, 2018; Randolph y Parraguez, 2019), y se ha constituido como una teoría con enfoque cognitivo en la Didáctica de la Matemática que consiste en caracterizar modos de pensar algún *fm*, permitiendo estudiar fenómenos didácticos relacionados con su comprensión, vía la interacción que hace cognitivamente un sujeto entre los modos de pensar dicho *fm*. Lo anterior, desde la práctica investigativa, se puede evidenciar mediante la interpretación de argumentos que producen sujetos en la resolución de problemas matemáticos adecuados.

En la TMP, para alcanzar una comprensión sistémica de un *fm*, es primordial la articulación entre sus modos de pensar, en tanto, interactúan mediante articuladores que son herramientas matemáticas que permiten dicha interacción. De lo contrario, si no se considera dicha interacción, entonces se podría dar una comprensión sesgada del *fm*, generando un posible obstáculo didáctico, tal como lo reportó Sierpinska (2000) para el Álgebra Lineal y el conflicto entre su pensar teórico y práctico.

En la TMP se identifica el modo *Sintético-Geométrico* (SG) con el pensar práctico y los modos *Analítico-Aritmético* (AA) y *Analítico-Estructural* (AE) con el pensar teórico. Actualmente, se ha utilizado la TMP para interpretar la comprensión de algunos Sistemas Numéricos. Panorámicamente, Parraguez *et al.* (2020) reportan una indagación en los sistemas numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ desde los modos de pensamiento, cuyos resultados muestran que estudiantes y docentes de matemática, en formación, privilegian el modo AA en el abordaje de las actividades presentadas, siendo que estaban intencionadas para provocar el tránsito entre sus modos de pensar. Otro estudio reportó sobre cómo estudiantes de educación escolar y universitaria interpretan $\mathbb{C}$ y cómo es posible alcanzar su comprensión profunda, evidenciando ciertos articuladores que permiten el pasaje entre los modos de pensar $\mathbb{C}$ (Randolph y Parraguez, 2019).

Los modos de pensar un *fm* desarrollados y adheridos a los que definió Sierpinska (2000), se describen como:

- *Modo SG* del *fm* se presenta mediante una representación que evoca lo primero que se viene a la mente a través de una figura, un conjunto de puntos u otro similar de manera sintética geométrica.
- *Modo AA* del *fm* se muestra a través de relaciones numéricas o simbólicas u otras similares de manera analítica aritmética.
- *Modo AE* del *fm* se evidencia mediante axiomas, propiedades o teoremas de los objetos matemáticos que se le caracterizan como invariantes, más allá de la forma (prescindiendo de lo práctico) de manera analítica estructural.

Con base en la matemática, dichos *modos* y sus *articuladores* constituyen un Modelo Cognitivo del *fm* que da cuenta de la comprensión profunda en enseñantes y/o aprendices, en tanto, estos sujetos proporcionan evidencias de las interacciones en el modelo, conciliando lo práctico con lo teórico propios del *fm* (Parraguez *et al.*, 2021).

2.3 Modelo cognitivo propuesto para comprender profundamente el conjunto $\mathbb{Z}_4$

El modelo cognitivo para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, por medio de sus modos SG, AA y AE, y sus articuladores se muestra a continuación en las Tablas 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

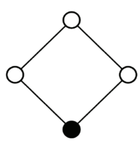
Modos de pensar	SG	AA	AE
Idea matemática	Grafo cíclico de orden 4	4 subconjuntos de $\mathbb{Z}$, cuya unión disjunta es $\mathbb{Z}$, dada la división por 4 y los restos generados	4 clases de equivalencia, dada la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$
Representación		$A = \{..., -8, -4, 0, 4, 8,...\}$ $B = \{..., -7, -3, 1, 5, 9,...\}$ $C = \{..., -6, -2, 2, 6, 10,...\}$ $D = \{..., -5, -1, 3, 7, 11,...\}$ en que $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C \cup D$ con $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$	$\overline{0} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 0\ mod\ 4\}$ $\overline{1} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 1\ mod\ 4\}$ $\overline{2} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 2\ mod\ 4\}$ $\overline{3} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 3\ mod\ 4\}$ tal que $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

Tabla 2. Articuladores hipotéticos entre los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Tránsitos	Articuladores	Descripción
SG ↔ AA	Correspondencia biunívoca	Para cada nodo del grafo cíclico de orden 4, le corresponde un único subconjunto de $\mathbb{Z}$, esto es, $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C \cup D$ con $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$, biunívocamente.
AA ↔ AE	Relación de congruencia módulo 4	Al dividir un número entero (dividendo) por el divisor fijo 4, se generan cuatro restos (0, 1, 2 y 3) que representan a los dividendos congruentes módulo 4 como clases de equivalencia.
SG ↔ AE	Correspondencia biunívoca	Para cada nodo del grafo cíclico de orden 4, le corresponde una única clase de equivalencia con base en $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$, biunívocamente.

Con base en la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$ se particiona $\mathbb{Z}$ y se generan 4 subconjuntos disjuntos, cuyos representantes son números distintos que no se interpretan como cantidades sino como clases de equivalencia.

Abordar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ desde sus modos SG, AA y AE pone de relieve un pensamiento sistémico que permite evidenciar su comprensión profunda. Una de las características de este tipo de pensamiento es el establecimiento e interacción de diferentes maneras de visualizar y entender un *fm*, involucrando vínculos entre estas interacciones dentro de un sistema, los que están conectados a otros *fm*. Por ejemplo, grupo cíclico, grupo cociente, aritmética modular, clases de equivalencia, división euclidiana, entre otros, están vinculados sistémicamente al conjunto $\mathbb{Z}_4$ en el contexto del álgebra abstracta. Por tanto, la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$ se produce por la interacción de los modos de pensar SG, AA y AE, con lo cual el pasaje de un modo de pensar a otro, a través de articuladores, se torna fundamental para esta investigación. A su vez, es requerido explicitar qué herramientas matemáticas son dichos articuladores.

Esta investigación busca caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes de primaria en servicio. Para ello, en el marco de la TMP, la pregunta de investigación es ¿qué articuladores propician la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$? A partir de los resultados obtenidos, producto del análisis de los datos cualitativos recolectados, la determinación de articuladores permite validar, refinar o refutar el modelo cognitivo propuesto (ver tablas 1 y 2).

3. METODOLOGÍA

Esta investigación exploratoria es cualitativa y se enmarca en un estudio de caso instrumental, ya que el caso se escoge para caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes de primaria en servicio, lo que permite conseguir un entendimiento más profundo del fenómeno didáctico en cuestión, pues se centra en lo específico y no en lo general. En otras palabras, es un estudio de lo singular, lo particular y lo exclusivo referido a un caso sobre un sistema integrado (Stake, 1998).

En este tipo de investigaciones se permite profundizar en temas poco explorados para alcanzar una indagación más detallada. Según Merriam (1988), los estudios de caso son descriptivos e interpretativos y, se apoyan en el razonamiento heurístico durante el tratamiento de diferentes fuentes de datos por parte del equipo investigador. Dentro de sus virtudes, un estudio de caso tiene el potencial de implicar a sus participantes en el proceso, reconociendo la necesidad de una construcción conjunta de la realidad percibida, vía relaciones e interpretaciones que se crean, lo cual además otorga oportunidades para que los investigadores afiancen una autorreflexión para comprender el caso (Simons, 2011). En la presente investigación se valora las perspectivas de los docentes como participantes, en cuanto al entendimiento que evidencian frente a una realidad que se supone subjetiva y que se reactiva con un problema matemático visto con anterioridad adaptado a un cuestionario en línea.

3.1 El caso: participantes y contexto

Participaron de esta investigación 30 docentes de primaria en servicio, solo 13 poseen alguna especialidad en matemática y para identificarlos se les rotuló desde P01 a P30, bajo consentimiento informado que garantiza anonimato y circulación reservada de los resultados del cuestionario aplicado en línea. Dichos docentes han sido parte de un programa chileno de desarrollo profesional llamado *Sumo Primero en Terreno* (SPT, versión año 2019-2021) que abarcó 200 escuelas con altos desafíos educativos.

En el cuestionario en línea, opcionalmente, los docentes podían subir archivos de sus resoluciones a Google Forms. Entre los participantes que subieron sus producciones, existe un desempeño que se denominó emblemático (docente P13) porque en sus respuestas escritas fotografiadas se vislumbra la coherencia con el modelo cognitivo propuesto para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

3.2 Instrumento de recogida de datos

En el programa SPT, dos investigadores del equipo diseñaron e implementaron un taller que puso en juego un problema matemático, que resolvieron los docentes para dotar al concepto resto de un significado. Este problema se convirtió en un pilotaje masivo y en una fuente de inspiración para el diseño del instrumento que se describe en la figura 4.

EL JUEGO DE LAS ESTACIONES DE COLORES

Consiste en predecir el color de la estación donde se encuentra Pablo al realizar saltos de una estación a otra, comenzando siempre en la estación roja (ver Figura A).

I- Predice la estación donde está Pablo a los:

a) 16 saltos (**Ítem A**); b) 34 saltos (**Ítem B**); c) 373 saltos (**Ítem C**)

Para cada caso, explica cómo lo pensaste.

II- ¿En qué estación cae finalmente Pablo a los $4n + 2$ saltos, siendo $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$? (**Ítem D**)

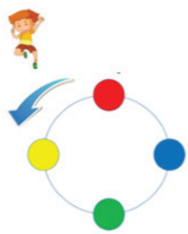


Figura A. El juego de las estaciones de colores

III- Partiendo siempre desde la estación roja, ¿Cómo expresaría los saltos de Pablo, si cada vez que juega cae finalmente en la estación azul? (**Ítem E**)

Figura 4. Problema matemático denominado *El Juego de las Estaciones de Colores*.

Este problema se adaptó para ser implementado en ítems del A al E, mediante un cuestionario en línea soportado en Google Forms, el cual contempló cinco secciones: (1) descripción del propósito del cuestionario y consentimiento informado; (2) perfil de los participantes; (3) Ítems A, B y C; (4) Ítems D y E y (5) sección final para reflexionar sobre lo realizado y contacto. Opcionalmente los participantes podían subir un archivo de su resolución por escrito (en formato doc, pdf, jpg o ppt) en la sección (3) y (4).

3.3 Categorías de análisis y descriptores

La tabla 3 presentan categorías de análisis que son los tránsitos producidos entre un modo y otro de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ mediante articuladores definidos (ver tabla 2). Así, es posible levantar evidencias para validar, refinar o refutar el modelo cognitivo propuesto para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Tabla 3. Descriptores de tránsitos generados por articuladores hipotéticos entre modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, según ítems.

Tránsitos	Articulador hipotético	Descriptor	Ítem
SG → AA	Conteo 1 a 1, haciendo corresponder el número de saltos con las estaciones de colores.	Cuenta uno por uno las estaciones de colores, cíclicamente, hasta llegar al salto 16, el cual hace corresponder a la estación roja.	A
SG → AA	El número de saltos que es múltiplo de 4 es asociado a la estación roja.	Para cada múltiplo de 4, le corresponde únicamente la estación roja.	A
SG → AA	Agrupa de 4 en 4 y cuenta lo restante.	Agrupa de a 4, y relaciona lo restante a una única estación de color. En este caso, 8 grupos de 4 saltos y 2 saltos más, lo cual asocia a la estación verde.	B
AA → AE	Algoritmo de la división.	Realiza la división entre 373 (dividendo dado) y 4 (divisor fijo), cuyo resto es 1 y lo relaciona con la estación amarilla.	C
AA ↔ AE	Noción de función.	Identifica como $\{4n+1\}$ a todos los saltos que se relacionan a la clase de equivalencia $\overline{1}$ (estación amarilla), expresando $373 = 4 \times 83 + 1$.	C
SG ↔ AE	Noción de función.	Reconoce que el número de saltos $\{4n+2\}$ se relacionan a la estación verde, dando valores para la variable n y generalizando hacia la clase de equivalencia $\overline{2}$, ya que son números congruentes módulo 4.	D
SG ↔ AA	Noción de función.	Reconoce que la estación azul está asociado al número de saltos $\{4n+3\}$ o $\{4n-1\}$, pues son números congruentes módulo 4.	E

Nota. La notación “p→q” da cuenta de un tránsito unidireccional desde “p” hacia “q”. Mientras que el uso de “p↔q” da cuenta de una bidirección, tanto de “p” hacia “q” como viceversa, siendo p y q distintos modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

3.4 Procedimiento de análisis y validación

Con base en la tabla 3, se distribuyó el trabajo de análisis, dos investigadores analizaron las respuestas a los ítems A, B y C; y otros dos analizaron las respuestas a los ítems D y E. Luego, se examinaron los análisis de forma conjunta y se concordaron diferencias.

El método de validación de datos, fue mediante el análisis conjunto de las interpretaciones a través de la TMP de los investigadores en dos equipos, lo cual fue útil para la valoración de aspectos cualitativos. Dicha técnica fue adecuada metodológicamente porque permitió una validez de contenido, mediante juicio experto (Escobar-Pérez, 2008).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Del análisis de los datos desde el ítem A al C, se destaca que, a medida que aumenta el número de saltos, la dificultad aumenta porque disminuyeron las respuestas correctas. Igualmente, en las respuestas a los ítems D y E se da cuenta de un nivel de dificultad progresivo, en tanto, una respuesta correcta debía otorgar una interpretación simbólica a los $4n + 2$ saltos, dado $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$ (ítem D) y expresar simbólicamente los saltos, si cada vez que se juega resulta que cae en la estación azul, partiendo siempre desde la estación roja (ítem E). En síntesis, la figura 5 muestra la distribución de respuestas correctas, según ítem.

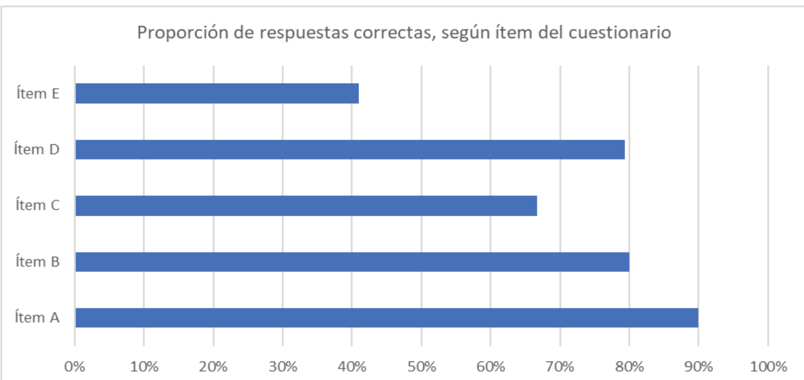


Figura 5. Gráfico de la distribución de respuestas correctas por ítem.

4.1 Análisis de las respuestas a los ítems A, B y C

El ítem A tuvo un bajo porcentaje de error, solo 3 docentes erraron de 30. En este ítem se privilegia los argumentos de contar 1 a 1 por estación de color y obtener que: *al salto 16, Pablo cae en la estación roja* (11 docentes, 37% de los participantes). Mientras que la segunda mayoría se centra en una estrategia multiplicativa, pues identifican que: *a los 16 saltos, agrupando de 4 en 4, corresponde a la estación roja de donde se partió* (9 docentes, 30% de los participantes).

Algunos argumentos evidencian un tránsito entre el modo de pensar SG al AA en el ítem A. Por ejemplo:

> P24: Conté de 1 en 1 hasta llegar a 16. Luego identifiqué que el rojo son todos los múltiplos de 4, por lo tanto, al salto 16 caería en el rojo.
>
> P16: Hice hasta el salto 4 que es cuando vuelve a la roja. Entonces me di cuenta de que cada 4 vuelve a la roja por lo que en el número 16 y cualquier múltiplo de 4 cae en la roja.

El argumento de P24 distingue que el contar 1 a 1 va por estación dando cuenta de un modo SG, el cual extiende al modo AA, identificando que el número de saltos que son múltiplos de 4 volverán a la estación roja. Mientras que P16 privilegia el modo AA, en tanto cambia el modo SG al AA porque al salto 4 identifica que cada 4 se vuelve a la estación roja, manifestando un razonamiento numérico más afianzado que P24.

Por su parte, P13 evidencia un modo de pensar AA, estrictamente, ya que evita contar estación por estación como se muestra a continuación:

> P13: La ronda, al tener 4 estaciones, puedo calcular el color a los 16 saltos de manera mental al amplificar por cuatro. De esta manera me evito de contar unívocamente.

En el ítem B se duplicó el porcentaje de error en relación con el ítem A, al responder incorrectamente 6 docentes de 30. Asimismo, deja de estar privilegiado el conteo 1 a 1, ya que el número de saltos es mayor que el ítem A (de 16 a 34 saltos), lo cual pudo producir que predominaran estrategias multiplicativas (17 docentes, 56% de los participantes). Hay argumentos en el ítem B que se aproximan a la estación por defecto, esto es, buscar un múltiplo de 4 menor y cercano a 34 para después sumar los saltos que faltan y así relacionarlos con la estación correspondiente. Por ejemplo, P15 privilegia el modo AA, aunque no abandona el pensar práctico:

P15: 32 es múltiplo de 4, por lo tanto, cae en la roja... saltamos dos veces para llegar al salto 34...cae en el verde.

Otros participantes, en cambio, entablan una relación aproximándose también por defecto, pero considerando los múltiplos de 16, por ejemplo:

P27: El doble de 16 son 32 más 2.
P21: Dupliqué la cantidad de la pregunta anterior y me moví las dos restantes.

Hay un argumento correcto que se aproxima a la estación por exceso, esto es, buscar un múltiplo de 4 mayor y cercano a 34, para luego restar los saltos que sobran y relacionarlos con la estación respectiva. Por ejemplo, P07 privilegia el modo AA en tanto expresa en su argumento numérico la siguiente operación combinada: "4 × 9 - 2".

Existe otro argumento que se acerca al modo AE desde el modo AA, al considerarse la secuencia *4, 8, ..., 32* (primeros múltiplos de 4, o bien, números que al dividir por 4 da resto 0) asociados a la estación roja y, desde ahí, llega al salto 34 sumando 2 para llegar a la estación verde, según explica P13 a continuación:

P13: De igual manera fui amplificando por 4, hasta acercarme al resultado. Me posicioné en el rojo a los 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32 y nada más salté los 2 espacios que faltaban para completar los 34.

El ítem C tuvo un porcentaje de error mayor que en el ítem B, no acertando correctamente 10 docentes de 30. Persiste la estrategia de aproximarse, a través de los múltiplos de 4 por defecto, lo cual da cuenta de un modo AA de pensar el problema que no excluye del todo al modo , por los indicios en el registro verbal que se dan con las expresiones: "un salto", "avanzando", "amarillo", entre otros, propios del contexto del juego. Por ejemplo:

P24: Consideré que estaría en el color rojo en el salto 372 (93 x 4) y más 1 salto quedaría en el color amarillo.
P28: Busqué el múltiplo de 4 y agregué 1.
P13: Amplificando el 4 hasta aproximarse al 372; avanzando 1 espacio quedando en el amarillo. También se puede hacer por medio de la división.

Otros argumentos, como respuestas al ítem C, ocupan el resto 1 de la división entre el número de saltos 373 y el número fijo de estaciones 4, relacionándolo a que cae en la estación amarilla (10 de 30 participantes). Esto evidencia privilegiadamente el modo AA, pues cada resto se relaciona con un único color de estación (idea emergente de clase de equivalencia, bajo el modo AE), estando el modo SG presente mediante términos como "un salto más", "de la roja pasamos a la amarilla", "el resto lo moví", entre otras expresiones. Por ejemplo:

P15: 373:4=93… 93x4=372 cae en la roja… el resto es 1, por lo tanto, debemos hacer un salto más para llegar al 373…de la roja pasamos a la amarilla.
P21: Realicé una división utilizando como divisor las 4 estaciones y solo el resto lo moví.
P11: Dividí 373 en 4, me sobra 1.

A partir de estos resultados, es posible reconocer un razonamiento figurativo con iteración al desplegar el modo SG mediante el uso de términos como *saltos*, *avanzar*, *estaciones*, *ronda*, entre otros; haciendo de la estrategia de conteo 1 a 1 una correspondencia biunívoca entre un único color de estación con los números de saltos respectivos.

Además, la idea de iteración se vincula, en la mayoría de los casos, a un razonamiento numérico que es cíclico, en el sentido que se toma en cuenta una aproximación por defecto, esto es, $4k + p$ con k entero positivo y p varía discretamente de 0 a 3, en que $p = 0$ corresponde a la estación roja, $p = 1$ a la amarilla, $p = 2$ a la verde y $p = 3$ a la azul. O bien, una aproximación por exceso, esto es, $4k - q$ con k entero positivo y q varía discretamente de 0 a 3, en que $q = 0$ corresponde a la estación roja, $q = 1$ a la azul, $q = 2$ a la verde y $q = 3$ a la amarilla. Tanto $4k + p$ como $4k - q$ son articuladores que van desde el modo SG al modo AA, y viceversa.

Igualmente, hay casos que dan uso del concepto resto al dividir la cantidad de saltos con la cantidad fija de 4 estaciones, lo cual hace que cada resto varíe discretamente de 0 a 3 y se relacione con un único color de estación. Lo anterior, evidencia los modos SG, AA y, en parte, que emerja el modo de pensar AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$.

4.2 Análisis de las respuestas a los ítems D y E

Esta sección precisa de una coordinación implícita, pues ambos ítems D y E pretenden que los docentes etiqueten cada estación en términos n-*ésimos*. Sin embargo, el alcance de logro en ambos ítems es desigual como se aprecia en la figura 5, siendo el ítem E el más exigente.

Las respuestas al ítem D alcanzaron un bajo porcentaje de error (5 participantes de 29 que respondieron, dado que P24 no responde). De ello, los docentes P04, P08 y P12 respondieron que la estación en que cae Pablo después de $4n + 2$ saltos es la estación azul, P09 dice que cae en la estación amarilla, mientras que P21 y P29 en la estación roja. Esto se puede interpretar, en el sentido de la TMP, que los docentes no han desarrollado la articulación entre los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, vía el concepto función.

Entre los argumentos correctos más recurrentes dados por los docentes al ítem D, se encuentra P01 que proporciona el siguiente argumento:

> P01: Porque cualquier múltiplo de 4 dejará a Pablo en el casillero rojo entonces más 2 lo lleva siempre al casillero verde, es una constante.

El argumento de P01 muestra una generalización porque dice "... cualquier múltiplo de 4...", al hacer de los múltiplos de 4 un punto fijo para moverse a otras estaciones. Esto evidencia que articula los modos SG con AE, mediante la correspondencia entre cada estación de acuerdo con una única clase de equivalencia (elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$).

Por su parte, menos de la mitad de las respuestas al ítem E fueron correctas. Su resolución requería construir un elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ por medio de una partición, asociada a un solo color de estación. Entre los argumentos que mostraron los docentes para indicar una expresión simbólica que representa los juegos de Pablo que caen en la estación azul partiendo de la roja, se pueden clasificar en dos tipos de argumentos, a saber:

Argumento tipo 1. Hay 9 docentes que expresan la situación del ítem E con la expresión $4n + 3$. Ello evidencia que hacen corresponder la estación azul (modo SG), con su representación generalizada, correspondiente a la expresión $4n + 3$, siendo el resto igual a 3 y convirtiéndose en un elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ (modo AE). Entre los argumentos que han empleado los docentes para su accionar simbólico, se encuentra el argumento de P02, a continuación:

> P02: Sería (4n+3) porque independiente de las vueltas completas que dé, siempre debe darle (3 en el resto) para que quede en el círculo azul, porque debe dar 3 saltos más a partir del círculo rojo.

Notar que P02 da cuenta que $4n$ es un invariante en tanto enuncia que "... independiente de las vueltas completas que dé...", haciendo de la estación roja un punto fijo para contar los saltos restantes luego de las vueltas completas, señalando que "... debe dar 3 saltos más a partir del círculo rojo".

Argumento tipo 2. Hay 5 docentes que expresan la situación del ítem E con la expresión $4n-1$. Análogo al argumento tipo 1, esto evidencia que hacen corresponder la estación azul (modo SG), con su representación generalizada correspondiente $4n-1$, tal que se busca un múltiplo de 4 por exceso para luego restar 1 salto y obtener así que dicho número generalizado de saltos corresponde a una clase de equivalencia como elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ (modo AE). Por ejemplo:

P27: Cae en la casilla anterior a la que partió.
P21: 4 × n - 1, siendo n = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.

Notar que P27 da cuenta de la acción de saltar en la orientación contraria al indicado en el problema (ver figura 4), ya que retrocede un salto desde la estación roja de partida.

En consecuencia, el argumento tipo 1 permite entablar una relación entre cada elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ con un único resto, mientras que el argumento tipo 2 fija la expresión $4n-1$ como una función, cuyo dominio es el conjunto N_0.

4.3 Desempeño emblemático de P13

A continuación, la figura 6 presenta un diagrama que muestra los argumentos escritos de P13 interpretados desde el modelo cognitivo propuesto.

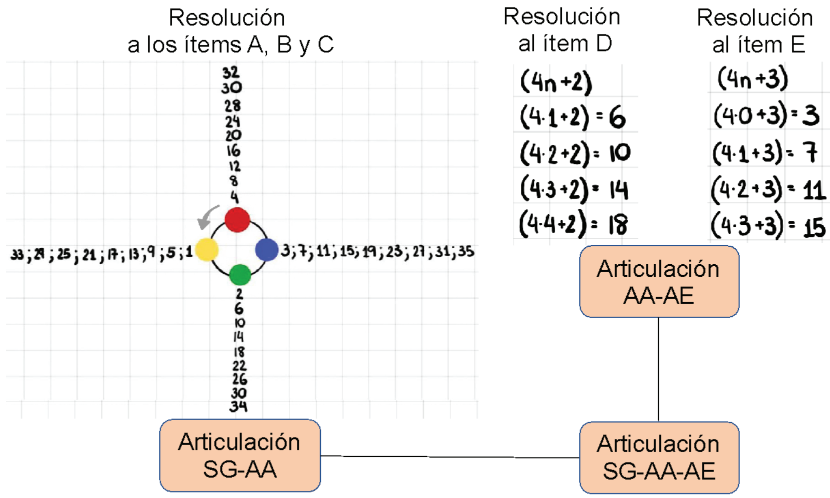


Figura 6. Interpretación de las respuestas de P13 de acuerdo con el modelo cognitivo propuesto.

El docente P13 brinda una articulación completa entre los tres modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, en el sentido que su producción muestra que para los ítems A, B y C existe un articulador entre los modos SG y AA, pues a cada color de estación le hace corresponder una única secuencia de saltos, biunívocamente. Asimismo, en la resolución a los ítems D y E, P13 evalúa las funciones $4n + 2$ y $4n + 3$, respectivamente, las que cumplen con el rol de articulador entre los modos AA y AE. De hecho, para el ítem D argumenta que: *Al desarrollar la expresión reemplazando los valores de "n"; determiné cual era el salto que Pablo se encontraba.* Notar que consideró como preimagen los valores 1, 2, 3 y 4; mientras que en el ítem E consideró los valores de preimagen 0, 1, 2 y 3. De lo anterior, se concluye que en el ítem E, P13 da uso del 0: "*(4 × n + 3)* saltos, donde *n = {0; 1; 2; 3; 4; 5; ...}*", pero cabe destacar que es difícil interpretar el salto número 0 producto del trilema compuesto por la cantidad (*0 saltos*), la posición (*salto 0*) y el elemento del dominio o del codominio de cierta función f –esto es, 0 como preimagen de f, o bien, 0 como imagen de f, respectivamente.

Desde la perspectiva funcional, la consideración del 0 será relevante en el dominio de cierta función f, dependiendo de la expresión algebraica para su imagen. En otras palabras, si el dominio parte de 0 (conjunto $\mathbb{N}_0$) como preimagen tiene sentido la expresión $4n + 3$ para sus imágenes en el ítem E, pero si el dominio parte con el valor de preimagen 1 (conjunto $\mathbb{N}$) debe ser considerada la expresión $4n - 1$ para sus imágenes, y así obtener el elemento $\overline{3}$ del conjunto $\mathbb{Z}_4$, ya que los conjuntos de dichas imágenes en ambos casos son números congruentes a 3 módulo 4, siendo una misma partición de $\mathbb{Z}$. Lo anterior, hace que cobre relevancia el modo AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$, prescindiendo de la forma al centrarse en la clase de equivalencia que genera dicha partición en $\mathbb{Z}$ como una estructura más integral y sistémica.

5. DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El propósito de esta investigación fue caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria en servicio. Según el análisis y los resultados se evidenció que los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ pueden ser caracterizados como un camino cíclico de orden 4 con una orientación determinada en el avance (pensamiento práctico) y como números congruentes módulo 4, inclusive, por la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$ como una tetrapartición del conjunto $\mathbb{Z}$ (pensamiento teórico).

Con el fin de que el pensar práctico y teórico robustezcan la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$ es necesario caracterizar los articuladores entre los modos SG, AA y AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Es así como la tabla 3, a la luz de los resultados, confirma que la propuesta de articuladores hipotéticos es plausible y viable. Otros estudios en esta línea podrían seguir refinando el modelo cognitivo propuesto, por ejemplo, de acuerdo con los sujetos resolutores del problema de la figura 4 dirigido a escolares, profesores en formación, incluso, al formador de profesores.

Las actividades tradicionales que se asocian al desarrollo temprano del pensamiento algebraico son el analizar relaciones entre cantidades, captar alguna estructura, estudiar el cambio, generalizar resolviendo problemas, modelando, justificando, probando y prediciendo (Kieran, 2004). Estas acciones se condicen a las sugeridas por Vidal-Szabó y Núñez-Fernández (2021) y coinciden con las realizadas por los docentes que participaron de esta investigación, en virtud del cuestionario en línea aplicado. Asimismo, tomando en cuenta a Carraher y Schliemann (2014), fue posible interpretar que el pensar algebraico de los docentes involucra una combinación entre operar con incógnitas y en términos de variables y sus relaciones, como también reconocer cierta estructura algebraica implícita, independiente de la usual notación algebraica.

Por su parte, se corrobora lo reportado por Ivars y Fernández (2016), pues algunos docentes por privilegiar el algoritmo de la división, sobre otras estrategias más adecuadas, favorecieron la aparición de errores. Además, de acuerdo con Chrysostomou y Christou (2019), esta investigación da cuenta que es posible extender el tratamiento que se da al conjunto $\mathbb{Z}_2$ en estudiantes al conjunto $\mathbb{Z}_4$ en docentes de primaria en servicio, y no solo desde una proximidad numérica, sino también desde una proximidad figural y estructural, generando una comprensión algebraica más profunda.

Se concluye que los docentes participantes, en general, adhieren al modelo cognitivo definido y evidencian más articulación entre los modos SG-AA que entre los modos AA-AE, lo que puede estar indicando un pensamiento teórico menos privilegiado. Además, el álgebra de los docentes de primaria en servicio puede activarse concibiendo al conjunto $\mathbb{Z}_4$ como un *fm* que posee 4 elementos que corresponden a números distintos y congruentes módulo 4 que particionan $\mathbb{Z}$ en un pensar teórico, haciendo que la concepción de número se modifique por la relación con el concepto clase de equivalencia que tributa a la construcción del conjunto $\mathbb{Z}_4$ como grafo cíclico de orden 4.

La idea del 0, o bien, análogamente la idea del 1, ambos como primer elemento a tomar en cuenta durante el proceso de abstracción del modo SG hacia el modo AA y/o AE ha resultado una limitación de la investigación en relación con el contexto del problema matemático, pues su fenomenología restringe el número de saltos en tanto comienza de 1 en vez de 0, pues el salto nulo (0 saltos como cantidad) no tiene significado en dicho contexto, pues sería un salto que no se hace; a menos que se signifique el salto 0 de forma ordinal. A pesar de ello, excepcionalmente, P13 pudo dar uso al número 0 como primer elemento cuando resuelve el ítem E, a diferencia de cómo resolvió ítem D, lo cual da indicios de una progresión en su comprensión profunda referida al conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Otra limitación es la orientación en el sentido antihorario de los saltos que se realizan en el juego de las estaciones de colores, pues restringe pensar en los números enteros negativos, para lo cual puede ampliarse a una orientación en el sentido horario para dar significado a la negatividad de los números enteros. Sin embargo, hubo docentes que generalizaron los saltos con la expresión $4n - 1$ en el ítem E (argumento tipo 2), la cual relacionan a la estación azul y que significaban para $n = 0$ el salto (-1) como uno en sentido horario desde la estación roja, esto es, retroceden un salto desde la estación roja. Ello puede transformarse en una oportunidad de aprendizaje para entender los elementos inversos del conjunto $\mathbb{Z}_4$ dotado de la operación adición.

Dentro de las implicancias de la investigación, y al considerar los países cuyos currículos tienen en cuenta el temprano desarrollo del pensamiento algebraico a nivel escolar, es pertinente y necesario que sus formaciones docentes promuevan el desarrollo de habilidades para tratar el álgebra como una aritmética generalizada. De esta forma, tanto estudiantes de pedagogía como docentes en servicio, pueden tener mayores oportunidades para ofrecer diseños de situaciones de aprendizaje que propicien el tránsito de la aritmética al álgebra en la escuela, tal como lo sugieren los Estándares de la Profesión Docente para las carreras de Pedagogía en Educación General Básica en Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2022).

Esta investigación puede proyectarse en dos perspectivas. Una que desarrolle la línea que permita explorar otros problemas en contextos cotidianos como, por ejemplo, días de la semana ($\mathbb{Z}_7$), meses del año ($\mathbb{Z}_{12}$), inclusive, extender el problema matemático de la figura 4 a $\boldsymbol{k}$ estaciones de colores para abordar $\mathbb{Z}_k$ con $k = 5, 6, 7, \dots, n$. Y otra perspectiva que permita progresar en la idea de conjunto $\mathbb{Z}_4$ hacia la idea de grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ como estructura algebraica, o bien, avanzar en la comprensión profunda del conjunto generalizado $\mathbb{Z}_n$ en contextos matemáticos para discernir procesos deductivos de pensamiento que pueden emerger en una secuencia de enseñanza para complementar la formación de docentes que enseñan o enseñarán álgebra a escolares.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por ANID a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468 y patrocinado por proyecto *Sumo Primero en Terreno* impulsado por la División de Educación General del Ministerio de Educación de Chile en convenio con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, año 2019-2021.

REFERENCIAS

Bonilla, D., y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento*. Editorial Académica Española.

Bonilla, D., Parraguez, M., y Solanilla, L. (2019). Aprendizaje de las cónicas en la geometría del taxista mediante una secuencia didáctica basado en los modos de pensamiento de Sierpinska. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la Práctica Docente desde la Didáctica de la Matemática: Formación Docente* (pp. 165-202). Graó.

Carraher, D., y Schliemann, A. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 193-196). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54

Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Entendendo sistemas de equações lineares: um estudo de caso no contexto da escola no Chile. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21*(3), 347-368. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p347-368

Chrysostomou, M., y Christou, C. (2019). Un análisis del concepto de pensamiento algebraico basado en evidencia empírica. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 721-781. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604022

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición, 6*, 27-36. http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Fréchet, M. (1988). Las Matemáticas y lo Concreto (G. Machado, Trad.; 2.ª ed.). Universidad Nacional Autónoma de México. (Original publicado en 1955).

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_18

Isoda M., y Olfos R. (2021). Problematics for Conceptualization of Multiplication. En M. Isoda y R. Olfos (Eds.), *Teaching Multiplication with Lesson Stud*y. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6_3

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática, 26*(1), 9-38. http://www.doi.org/10.24844/EM2801.01

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151. https://gpc-maths.org/data/documents/kieran2004.pdf

Kieran, C., Pang J., Schifter D., y Ng SF (2016). Survey of the State of the Art. En C. Kieran, J. Pang, D. Schifter y SF NG (Eds.), *Early Algebra. ICME-13 Topical Surveys*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2_2

Lay-Yong, L. (1966). On the Chinese Origin of the Galley Method of Arithmetical Division. *The British Journal for the History of Science, 3*(1), 66-69. https://doi.org/10.1017/S0007087400000200

Merriam, S. B. (1988). *Investigación de estudios de caso en educación: un enfoque cualitativo.* Jossey-Bass.

Ministerio de Educación de Chile (2012). Matemática. En autor (Ed.), *Bases Curriculares para la Educación Básica* (pp. 85-135). Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf#page=215

Ministerio de Educación de Chile (2022). *Estándares Disciplinarios Educación General Básica, Matemática.* Autor. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2022/02/EGB-Matematica.pdf

Parraguez, M. (2018). Miradas didácticas ad hoc en problemas específicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista Chilena de Educación Matemática, 11*(1), 9-14. https://www.sochiem.cl/documentos-rechiem/revista-rechiem-11-N1-2018.pdf

Parraguez, M. (2012). *Teoría de los modos de pensamiento en Didáctica de la Matemática.* Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Parraguez, M., Bonilla, D., y Randolph, V. (2021). Un modelo para la comprensión del sistema de los números racionales: un estudio de casos en la formación de profesores. En C. Guerrero-Ortiz, A. Morales y E. Ramos-Rodríguez (Eds.), *Modelación Matemática, aportes para la teoría y práctica desde la Didáctica de la matemática* (pp. 317-352). Graó.

Parraguez, M., Randolph, V., y Bonilla, D. (2020). Sistemas numéricos desde los Modos de Pensamiento: Un estudio de casos. En P. Balda, M. Parra, H. Sostenes y L. Serna (Eds.), *ALME, 33*(2), 17-27. CLAME. https://clame.org.mx/documentos/alme33_2.pdf

Randolph, V., y Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Revista Formación Universitaria, 12*(6), 57-82. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062019000600057

Sierpinska, A. (2000). One some aspects of student's thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica.* Ediciones Morata.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata.

Struik, D. J. (1980). *Una historia concisa de las matemáticas* (P. Lezama, Trad.; 3.ª ed.). Consejo editorial del Instituto Politécnico Nacional. (Original publicado en 1948).

Vidal-Szabó, P., y Núñez-Fernández, J. (2021). Álgebra Temprana en Niñas y Niños: Secuencias con Regularidad y Patrones. En A. Pizarro, C. Caamaño y C. Brieba (Eds.), *Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Aportes a la Formación Continua de Profesores* (pp. 52-69). Ediciones Universitarias de Valparaíso. https://euv.cl/wp-content/uploads/2022/09/ddm_2.pdf#page=52

Weisstein, E. W. (2002). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* CRC Press.

Correspondencia

Dirección: Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile; código postal: 2340000.
pfvidal@udd.cl; marcela.parraguez@pucv.cl;
daniela.bonilla@pucv.cl; sjcampos@uc.cl